Кинематика

> *- Вы куда?*
> *- Спросите у Кинематики.*
> *(из разговора в метро)*

Если будешь знать, малыш,
Правила движения,
Перейдёшь дорогу сам
И без приключения...

Кинематика - это раздел механики, занимающийся описанием механического движения идеализированных тел (материальная точка, абсолютно твёрдое тело), без рассмотрения причин движения.

Что значит "описание движения"? Это может быть наблюдение за реальным телом (планета, футбольный мяч) и анализ его результатов. А могут нам "ленивые" физики дать готовую формулу и сказать: "Вот это тело движется по такой формуле. Проанализируйте-ка такое движение. У нас времени на это нет - нам пора идти в футбол играть." И вы начинаете анализ формулы и определяете все параметры движения.

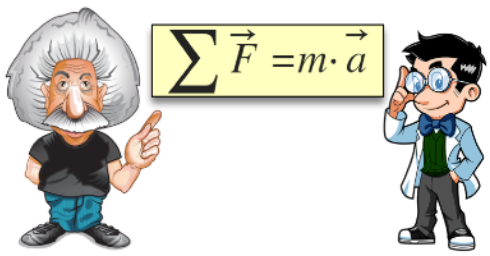
А почему только "идеализированных тел"? А потому, что эти "идеализированные тела" - простейшие модели, движение которых можно описать, "без рассмотрения причин их движения".

Кинематика отвечает на вопрос ***"как?"*** тело движется.
А Динамика отвечает на вопрос ***"почему?"*** тело движется.

Исторически Физика началась с Кинематики. Классическая Механика, Теория Тяготения, Электродинамика, Термодинамика, Оптика и Квантовая Механика ещё, как вы сами понимаете, не родились. И отвечать на вопрос "почему тело движется" было просто некому.

Жрецы Древнего Египта и Древнего Вавилона наблюдали движение планет и говорили, будет ли этот год урожайным. Датский астроном Тихо Браге всю жизнь наблюдал и описывал движение звёзд и планет. Немецкий астроном Иоганн Кеплер на основе этих наблюдений вывел три закона движения планет. А Исаак Ньютон использовал эти законы для создания теории тяготения[1].

Но отвечать на вопрос "как?" гораздо легче, если знаешь ответ на вопрос "почему?" И сегодня логика физического исследования такова: физики-динамики сначала отвечают на вопрос "почему тело движется". На вопрос "почему" в классической физике отвечает прежде всего рассмотрение сил, действующих на тело. В Классической Механике - это силы взаимодействия тел: силы трения, силы реакции, силы упругости и пр. В Электродинамике - это кулоновские силы, силы Лоренца и Ампера. В Гидродинамике - силы вязкого сопротивления и силы давления. В Термодинамике - силы давления. Рассмотрев все силы, действующие на тело, физики-динамики, утерев пот со лба, записывают Второй закон Ньютона $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$[2] (ну и, возможно, формулы законов сохранения) и зовут физиков-кинематиков. "Вот вам формулы. Описывайте движение" - говорят физики-динамики. Физики-кинематики тут же переписывают Второй закон Ньютона в виде $\sum F_x = m \cdot x''(t)$[3] (и для других осей аналогично) и начинают лихорадочно решать получившиеся дифференциальные (потому что в них



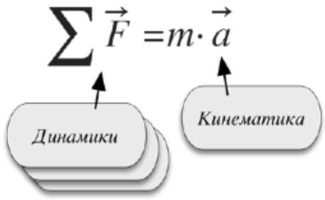
---

[1] *Смотри Историю про Гравитацию.*

[2] *И/или аналогичное динамическое уравнение для вращательного движения.*

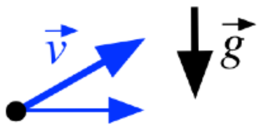
[3] *Мы же с вами знаем, что вторая производная координаты по времени и есть ускорение.*

присутствуют производные) уравнения. И находят-таки в результате $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. "Вот как движется тело!" - радостно кричат физики-кинематики.
Слегка утрированно, но на самом деле всё примерно так и происходит (конечно, физиков никто не делит на "динамиков" и "кинематиков").



И я бы даже рискнул сказать, что Второй закон Ньютона является "переходником" между Динамикой и Кинематикой.

И выскажу весьма крамольную мысль: а коли "почему" по логике физического исследования идёт перед "как", то и изучать Кинематику логичнее после изучения всех Динамик. Ну посудите сами. Классическая задачка кинематики: камень брошен под углом к горизонту. И как объяснить "начинающему физику", что горизонтальная составляющая вектора скорости камня не изменяется, если не пользоваться Первым законом Ньютона? Ну да ладно, не будем расшатывать устои.



Вы, наверное, уже догадались, что основным инструментом Кинематики является математика: аналитическая, векторная, геометрия.

Механическое движение тела - это изменение его положения в пространстве относительно других тел с течением времени.

Механическое движение происходит в пространстве и времени. Только во времени все мы движемся одинаково: в одну сторону и с одинаковой скоростью - скоростью света[4]. В механическом движении интерес представляет именно соответствие положения в пространстве "стреле времени" (функция положения от времени). Напомню особо одарённым: пространство наше трёхмерно, а Земля - ~~плоская~~ круглая.

Почему говорится именно о "положения в пространстве ***относительно других тел***"? Вы когда-нибудь высматривали на ночном небе движение спутника? Металлическая поверхность спутника прекрасно отражает солнечные лучи[5] и он хорошо виден. Движение спутника кажется весьма медленным, но его точно можно распознать на фоне неподвижных звёзд. То есть мы определяем движение спутника относительно звёзд. И если внимательно подумать, то окажется, что *мы всегда воспринимаем движение и определяем положение относительно чего-либо*. Иначе понятия "движение" и "положение" просто теряют смысл. Именно из этого вытекает свойство *относительности движения*. Ну об этом чуть позже.

И осталось дело за малым - выяснить, а что же такое "положение тела".

[4] *Смотри Историю про Гравитацию.*

[5] *Только не спрашивайте меня: "Где же это видано, чтобы ночью, да солнечные лучи?!" Солнце - на другой стороне Земли (там, где день) и спутник всё равно освещает.*

Положение материальной точки

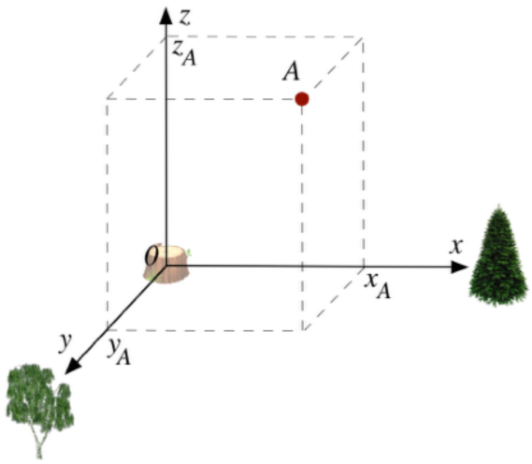
> *Материальная точка* - это тело, размерами которого ***в данных условиях*** можно пренебречь.

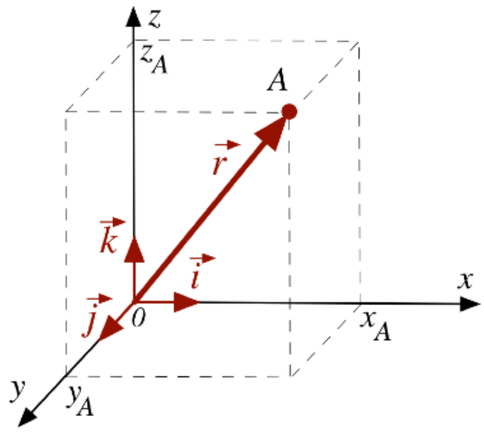
Материальных точек в природе не бывает (даже электрон имеет размеры), но материальная точка - это идеализированная модель, которая позволяет абстрагироваться от размеров физического тела и его внутренней структуры. Если такого понятия не вводить, то в любой задаче по механике пришлось бы описывать размеры тела и распределение массы внутри него. В страшном сне не приснится такое!

Мы уже сказали выше, что положение любого тела (в том числе и материальной точки) определяется относительно чего-либо (другого тела). Это другое тело называют телом отсчета. Математически строже надо говорить о ***точке отсчёта***. К точке отсчёта привяжем начало системы прямоугольных (декартовых) пространственных координат - в общем случае трёхмерную систему координат. Но каждая система координат имеет свою *ориентацию в пространстве* - поэтому надо ещё указать как выбираемая нами система координат сориентирована. Ну вот, мы построили систему отсчета для описания положения нашей материальной точки.

> *Поэтому решение всех задач механики начинается словами: "Привяжем систему отсчета к пеньку на полянке, направив ось x к ёлке, а ось y - к берёзе."*

Выбрать можно любую систему отсчёта. Это вытекает из свойств однородности и изотропности нашего пространства. Но выбирают ту систему отсчёта, которая удобна для решения данной задачи. Согласитесь, было бы странно, если бы для решения задачки "камень брошен под углом к горизонту", была выбрана система отсчёта, связанная с далёкой звездой Альфа Центавра.





Ну а дальше понятно: в такой системе отсчёта положение точки A можно описать либо алгебраически как тройку чисел-координат (x_A, y_A, z_A) (координатный способ), либо геометрически как радиус-вектор, представимый через базисные единичные вектора и те же координаты: $\vec{r} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k}$ (векторный способ). Оба эти способа эквивалентны. Какой выбрать? По большому счету - это дело вкуса.

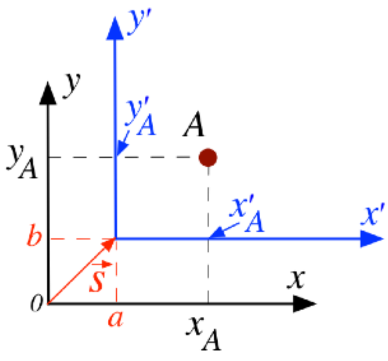
> Помните как в замечательном пиратском романе "Остров сокровищ" описывалось место, где зарыт клад: "от поваленного дуба триста шагов строго на север, а затем - пятнадцать шагов строго на восток"? Так по сути задавалась система отсчёта и положение клада в ней.

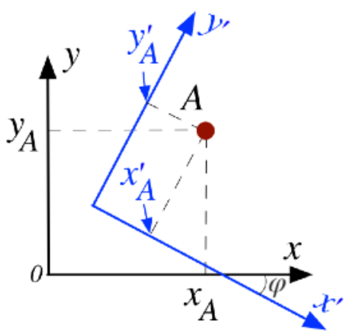
Всё это довольно очевидно. Можно заключить, что:

> Положение материальной точки в пространстве описывается тремя числами-координатами (x, y, z), а в пространстве-времени - четырьмя (x, y, z, t).

Понятно также, что в зависимости от задачи, бывает достаточно рассмотреть "плоский" случай с двумя координатами (третья предполагается неизменяемой) (тот же брошеный камень) или одномерный случай с одной ("из пункта А в пункт Б выехал велосипедист").

В некоторых задачах со сложными движениями рационально рассматривать не одну систему отсчёта. Например: корабль плывёт по реке, а мальчик бежит по кораблю. И тогда приходится пересчитывать положение материальной точки из одной системы отсчёта в другую (положение мальчика относительно корабля в его положение относительно неподвижной земли). Если одна система отсчёта - это просто параллельный перенос исходной, то координаты пересчитываются простым прибавлением констант. А если одна система отсчёта ещё и повернута относительно исходной (мальчик бежит по вращающейся карусели), то придётся повозиться с синусами-косинусами при пересчёте.





Положение твёрдого тела

> *Твёрдое тело* - это тело, у которого расстояние между двумя любыми точками не меняется в процессе движения.

Твёрдое тело - это тоже модель, но оно уже ближе к реальным телам, нежели материальная точка. А скажите: две материальные точки, соединённые невесомым стержнем - это твёрдое тело? Да. Такая конструкция подходит под определение. А сколько материальных точек в твёрдом теле? Этот вопрос напоминает старый схоластический: "Сколько ангелов разместится на кончике иглы?" Но ответить можно: от двух до бесконечности.

Принципиальное отличие твёрдого тела от материальной точки состоит в том, что твёрдое тело имеет *размеры, форму и внутреннюю структуру*.

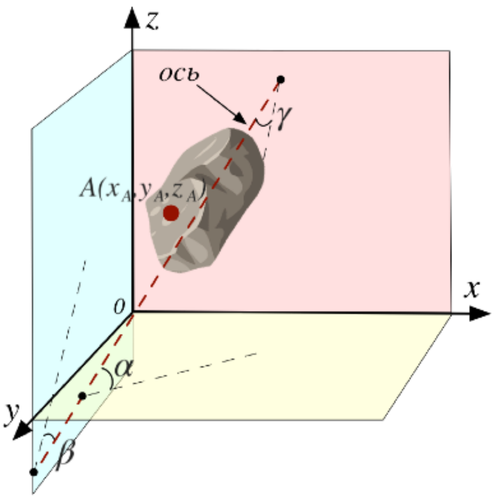
Вот на столе лежит материальная точка. Можно определить где относительно центра стола она лежит. Ничего больше о её положении сказать нельзя.

А вот на столе лежит твёрдое тело. И помимо его положения относительно центра стола, можно говорить о его *ориентации* относительно стола.

Так как будем описывать положение твёрдого тела?

"А давайте выберем на теле три точки, не лежащие на одной прямой, и будем описывать их координаты", - подал голос вдумчивый ученик.

В некоторых задачах так можно поступать, однако как общий метод это не самый лучший вариант. Координаты трёх точек - это девять чисел. И в этом присутствует избыточность. Хочется описать положение твёрдого тела минимальным количеством независимых параметров.



Давайте, как и в случае с материальной точкой, сначала выберем систему отсчёта.

Выберем на теле точку A и ***ось, через неё не проходящую***. По сути мы определим тем самым некоторую плоскость, однозначно привязанную к телу. И описание положения тела сводится при этом к описанию положения такой плоскости. Описывать положение точки мы умеем. А ориентацию оси (прямой) однозначно определяют три угла, которая ось образует с плоскостями $x0y, x0z, y0z$ соответственно. Как находить углы между прямой и плоскостью вы знаете из школьного курса стереометрии.

И тогда имеем описание положения твёрдого тела в виде $(x_A, y_A, z_A, \alpha, \beta, \gamma)$, где x_A, y_A, z_A - координаты точки A, а α, β, γ - углы, образуемые осью с соответствующими координатными плоскостями.

Положение твёрдого тела в пространстве описывается шестью числами $(x_A, y_A, z_A, \alpha, \beta, \gamma)$, а в пространстве-времени - семью $(x_A, y_A, z_A, \alpha, \beta, \gamma, t)$.

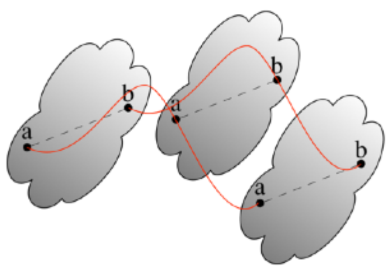
Количество параметров, полностью описывающих положение тела в пространстве называют в физике ***количеством степеней свободы***. У материальной точки три степени свободы, у твёрдого тела - шесть.

Ну вот, описывать положение как материальной точки, так и твёрдого тела, мы теперь умеем. Пора начинать разговор о движении.

Движение

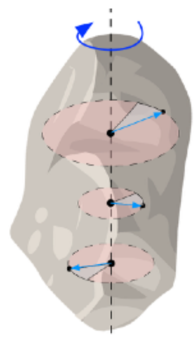
Виды движения

Существует два принципиально разных вида механического движения: *поступательное* и *вращательное*. Наличие этих двух видов движения вытекает из базовых свойств пространства.



Поступательное движение - это механическое движение тела, при котором отрезок прямой, соединяющий две любые точки этого тела, не изменяется в размере и остаётся параллельным своему положению в любой предыдущий момент времени. При поступательном движении все точки тела описывают одну и ту же траекторию и в любой момент времени имеют одинаковые по направлению и абсолютной величине векторы скорости и ускорения. Это относится как движению в одной плоскости, так и к движению в пространстве.

Прямолинейное движение - механическое движение, происходящее вдоль прямой линии. То есть, при прямолинейном движении материальной точки траектория представляет собой прямую линию. *Прямолинейное движение является частным случаем поступательного движения*.



Вращательное движение - это вид механического движения, при котором ***материальная точка*** описывает окружность, а у твёрдого тела все его точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Центры всех окружностей лежат при этом на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой ***осью вращения***. Если ось вращения расположена внутри тела, то говорят, что тело вращается само по себе. Если ось вращения расположена вне тела, то говорят об ***орбитальном вращении*** (пример - Земля вокруг Солнца).

Тело может участвовать в *нескольких вращательных движениях одновременно*: примером тому опять же является наша Земля - Земля вращается вокруг своей оси и вращается вокруг Солнца.

Математически доказывается, что:

> Любое механическое движение тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательных движений!

То есть любое механическое движение сводится к сумме поступательное + вращательные. ***Поступательное движение нельзя свести к вращательным, а вращательное - к поступательным.*** Они - принципиально различны!

"Получается, что материальная точка не может совершать поступательное движение?! Ведь выражение из определения "*...отрезок прямой, соединяющий две любые точки этого тела...*" к ней неприменимо. Странно," - вдумчивый ученик всегда в бою.

Формально - да. Но материальная точка - настолько упрощённое понятие, что ей простительно.

Если твёрдое тело совершает ***только поступательное движение***, то достаточно рассмотреть движение только какой-либо одной его точки - все остальные будут двигаться точно так же.

Положение тела всегда описывается относительно выбранной системы отсчёта, которая, в свою очередь, привязывается к какому-либо физическому телу или точке. В другой системе отсчёта положение тела будет описываться по-другому. То есть *положение тела - это категория относительная*. "Относительная" относительно выбранной системы отсчёта.

$$\text{Движение} = \Delta(\text{Положение})(t)$$

А коли механическое движение тела - это изменение его положения в пространстве с течением времени, то можно записать: "движение - это изменение положения как функция времени". И тогда становится ясно, что и *движение - категория относительная*. "Относительная" относительно выбранной системы отсчёта.

Рассмотрим параметры движения. Именно их надо определять при анализе движения.

Параметры движения

Закон движения

Основная задача механики - отыскание ***закона движения*** тела. Закон движения - это та волшебная формула, которая скажет нам в каком положении находилось тело в любой момент своего движения.

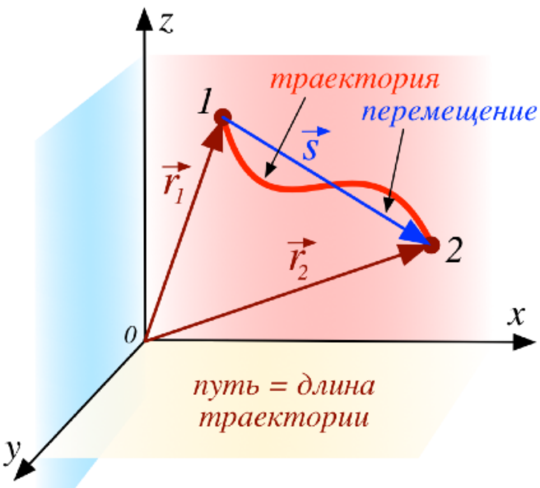
Очевидно, что для материальной точки закон движения в общем виде выглядит так: $Z = f(x, y, z, t)$, а для твёрдого тела так: $Z = f(x_A, y_A, z_A, \alpha, \beta, \gamma, t)$. Закон движения математически может задаваться одним уравнением, системой уравнений (по каждой координате отдельно). Вот так для материальной точки: $Z = \begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \\ z = f_z(t) \end{cases}$

А вот так закон движения для материальной точки может задаваться векторно: $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$.

Если тело в процессе движения не изменяет своего положения по какой-либо координате, то движение является плоским.

Закон движения - это "фильм про движение тела", который мы можем прокрутить с любого места и остановить в любое время.

Траектория, путь, перемещение материальной точки



Пусть материальная точка переместилась из положения 1 в положение 2 по какой-то замысловатой кривой. Кривая эта называется *траекторией*. Длина этой кривой (траектории) называется *путь*. Путь - это число (скаляр). А вектор, начинающийся из точки 1 и заканчивающийся в точке 2, называется *перемещение*. Вектор перемещения "ничего не знает" про траекторию и путь, для него "важны" лишь начальная и конечная точки. Вектор перемещения можно описать так: $\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, где $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радиусы-векторы начального и конечного положения материальной точки.

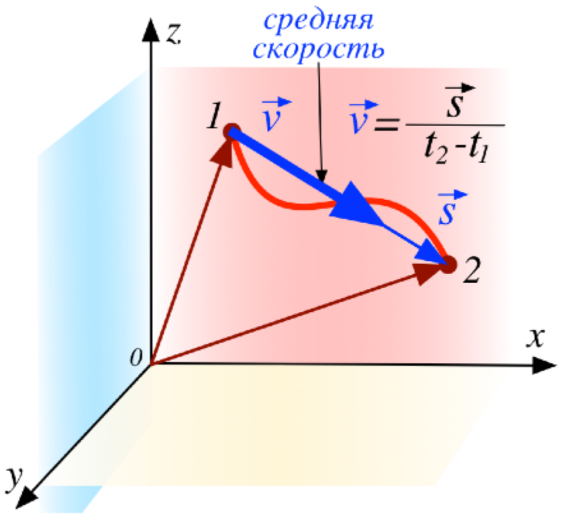
Всё просто и понятно.

Если материальная точка движется по прямой, то длина вектора перемещения равна пройденному пути. В общем случае длина вектора перемещения меньше пройденного пути.

Траектория, путь, перемещение - это *пространственные* категории движения тела. Время в них не фигурирует.

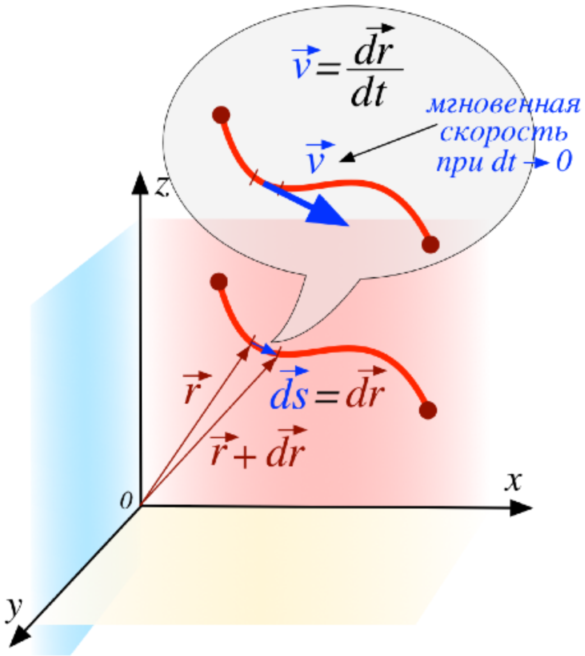
А теперь "подключаем" время.

Скорости материальной точки



Разделим вектор перемещения на интервал времени движения нашей точки из положения 1 в положение 2 - получим вектор *средней скорости* $\vec{v} = \dfrac{\vec{s}}{t_2 - t_1}$.

Он сонаправлен с вектором перемещения $\vec{s}$. Но так же, как вектор перемещения "ничего не знает" про траекторию и путь, так и вектор средней скорости "ничего не знает" про то, как двигалась наша точка между положениями 1 и 2. В некоторых задачах знания средней скорости может быть вполне достаточно, но в общем случае надо знать и детали.



Как тонкие знатоки и любители математического анализа поступим так: рассмотрим малое перемещение нашей точки $\overrightarrow{ds}$ (приращение перемещения, говоря языком математического анализа) по траектории за малое время dt. Это приращение $\overrightarrow{ds}$ равно приращению радиус-вектора: $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{dr}$. А теперь разделим приращение перемещения $\overrightarrow{ds}$ на малый интервал времени dt, за который это приращение произошло:

$\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{ds}}{dt} = \dfrac{\overrightarrow{dr}}{dt}$ - получим величину *мгновенной скорости* точки при этом малом перемещении (естественно, малое время dt стремится к нулю по законам математического анализа).

Всё, что я описал выше, есть не что иное, как взятие производной: *вектор мгновенной скорости равен производной по времени от радиус-вектора*. Вектор мгновенной скорости (будем в дальнейшем говорить "вектор скорости в такой-то точке") направлен по касательной к линии траектории движения. Если мы знаем уравнение для вектора скорости в зависимости от времени, то мы знаем как двигалась наша точка в любой момент времени.

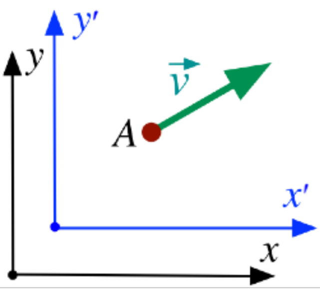
А что такое радиус-вектор как функция времени? А это не что иное, как *закон движения* в векторной форме: $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$. А как тогда выглядит выражение для вектора скорости? А вот так: $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \dfrac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \dfrac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \dfrac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$ и вектора $\vec{v}_x = \dfrac{dx}{dt} \cdot \vec{i}$, $\vec{v}_y = \dfrac{dy}{dt} \cdot \vec{j}$ и $\vec{v}_z = \dfrac{dz}{dt} \cdot \vec{k}$ - это проекции вектора скорости $\vec{v}$ на соответствующие координатные оси. Причём $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

То есть движение материальной точки можно разложить на три независимых движения по осям и рассматривать общее движение материальной точки как ***суперпозицию*** *этих трёх независимых движений.*

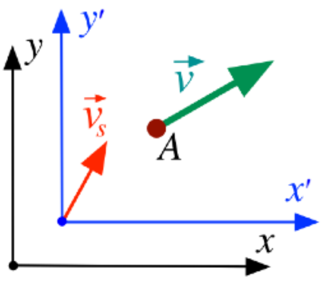
Если мы знаем закон движения материальной точки, то мы всегда сможем найти уравнения для её скорости (взятием соответствующих производных)[6].

Если мы знаем уравнения скорости движения материальной точки, то мы можем найти закон её движения (решив обратную задачу - интегрированием)[7]. Но потребуется ещё знание начального положения точки (или любого другого положения в известный момент времени).

Точно так же, как и положение тела, скорость - это категория относительная. "Относительная" относительно выбранной системы отсчёта.



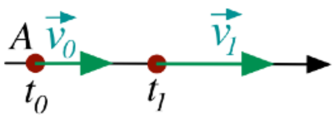
Вот есть у нас две несовпадающие (про совпадающие и говорить не о чем) системы отсчета. Но они *неподвижны* друг относительно друга! Положение точки A в системах отсчёта $x0y$ и $x'0y'$ различны, но их можно пересчитать так, как мы это делали выше. А вот скорости точки A в обеих системах одинаковы - ведь скорости считаются как отношение приращений перемещения к интервалу времени. А приращения перемещений в двух *неподвижных* друг относительно друга системах одинаковы. Значит и скорости одинаковы.



А вот точка A - в двух движущихся друг относительно друга системах отсчёта: система $x'0y'$ движется *с постоянной по величине и направлению скоростью*[8] (то есть ***равномерно и прямолинейно***) $\vec{v_S}$ относительно системы $x0y$. В этом случае скорость точки A в системе отсчёта $x0y$ не совпадает со скоростью точки A в системе отсчёта $x'0y'$ - приращения перемещений в них будут разными. А связаны эти скорости ***законом сложения скоростей***, сформулированным ещё Галилеем: $\overrightarrow{v_A^{x'0y'}} = \overrightarrow{v_A^{x0y}} + \vec{v_S}$, где $\overrightarrow{v_A^{x'0y'}}$ - скорость точки A в системе отсчёта $x'0y'$, $\overrightarrow{v_A^{x0y}}$ - скорость точки A в системе отсчёта $x0y$, $\vec{v_S}$ - скорость движения системы отсчёта $x'0y'$ относительно системы отсчёта $x0y$.

Всё логично и понятно[9]. И случай взаимно неподвижных систем отсчёта тоже сводится к закону сложения скоростей при $\vec{v_S} = 0$.

Частный и простейший случай движения материальной точки - при неизменном по величине и направлению вектору скорости - ***равномерное прямолинейное движение***. А состояние покоя - это частный случай равномерного прямолинейного движения. Именно эти понятия лежат в основе классической механики (Первый закон Ньютона).



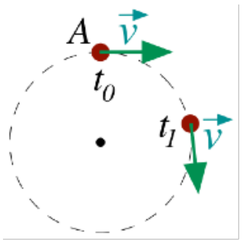
А может ли материальная точка двигаться по прямой, но с меняющейся скоростью? Конечно! Движение по прямой - это движение с неменяющимся направлением вектора скорости. А по величине скорость может меняться как угодно. И в целом такое движение будет просто *прямолинейным*.

[6] *Это, так называемая, прямая задача кинематики.*

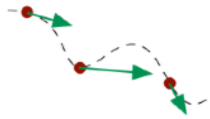
[7] *Это, так называемая, обратная задача кинематики.*

[8] *Это принципиально важно.*

[9] *Специальная теория относительности пересмотрела этот закон. Но в классической механике он является основным.*



А может ли она двигаться равномерно по окружности? Конечно. Как только мы говорим, что точка движется не по прямой (а, в данном случае, по окружности), то это значит, что у точки меняется направление вектора скорости. А величина скорости может и не меняться. И получаем *равномерное движение по окружности*.

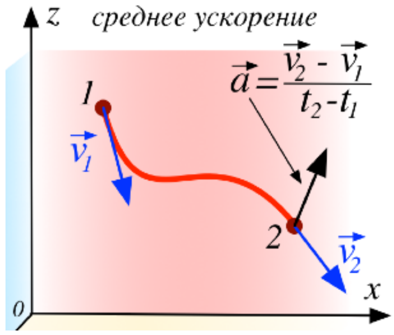


Точно так же точка может двигаться равномерно по любой кривой: меняется при этом лишь направление вектора скорости. Ну а при изменении и направления вектора скорости и его величины имеем движение в общем случае - *переменное движение по кривой*.

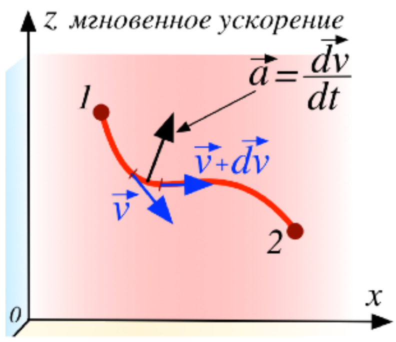
Пора поговорить об ускорении.

Ускорения материальной точки

Если скорость - это "скорость" изменения положения материальной точки, то ***ускорение - это "скорость" изменения её скорости***. И графически и аналитически понятие ускорения вводится аналогично понятию скорости.



Разделим векторную разность скоростей материальной точки в положениях 2 и 1 на интервал времени, затраченный на прохождение точкой этого пути. Получим *среднее ускорение на интервале*. Опять же это среднее нам ничего не говорит про движение точки внутри интервала.



Для выбранной точки внутри траектории $1 - 2$ будем сокращать рассматриваемый "кусочек движения"и считать величину $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$. При $dt \to 0$ получим *мгновенное значение ускорения* в в выбранной точке. Или на языке математического анализа: *вектор мгновенного ускорения равен производной по времени от вектора скорости*. Или *вектор мгновенного ускорения равен второй производной по времени от радиус-вектора*.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Проекции вектора мгновенного ускорения по осям можно записать так:

$a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}; a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2}; a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}$. И $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$.

> Если мы знаем закон движения материальной точки, то мы всегда сможем найти уравнения для её ускорения (взятием соответствующих производных).
>
> Если мы знаем уравнения ускорения движения материальной точки, то мы можем найти закон её движения (решив обратную задачу - интегрированием). Но потребуется ещё знание начального положения точки и её начальной скорости.

Вдумчивый ученик тянет руку: "Ну я, конечно, учил в школе и про скорость и про ускорение. Но вот хотел спросить. Ладно, скорость - это производная по времени от перемещения. А разве знания только скорости не достаточно для анализа движения материальной точки? Вводят понятие ускорения как второй производной. Ну коль человечество научилось брать производные, то можно ввести и "сверх-ускорение" как третью производную, а затем и четвёртую и так далее. Где остановиться?"

Крик твоей души, о вдумчивый ученик, услышан. Хороший вопрос. Скажу сразу: ни "сверх-ускорений", ни "свер-сверх-ускорений" в физике не рассматривают. Просто не надо. Ограничиваются лишь скоростью и ускорением. Почему?

- если ускорение материальной точки на всей траектории её движения равно нулю, то точка совершает равномерное прямолинейное движение. А такое движение - это отсутствие действия нескомпенсированных внешних сил (Первый закон Ньютона);
- если же у материальной точки при её движении присутствует ускорение, то это значит, что на неё оказывают действие нескомпенсированные внешние силы (Второй закон Ньютона). И "разбираться" с ними следует методами динамики.

Поэтому ускорение - важнейшая характеристика движения, определяющая с какой физикой мы имеем дело. Одной скорости явно недостаточно.

➤ Давайте рассмотрим задачку. Физики-динамики говорят нам: "Вот вам закон движения материальной точки: $\overrightarrow{r}(t) = (20 + 5 \cdot t^2) \cdot \overrightarrow{i} + (105 + 32 \cdot t^2 - t^4) \cdot \overrightarrow{j}$. Мы его долго искали, исписав кучу бумаги. Проанализируйте движение этой материальной точки от момента $t = 0$ до того момента, когда координата y станет равной нулю. Всё выражается в метрах и секундах."

Мы берёмся за дело. Смотрим на закон движения и сразу замечаем, что в нём координата z равна нулю (в законе движения нет слагаемого вида $z(t) \cdot \overrightarrow{k}$). Это значит, что пространственно движение материальной точки - ***плоское*** - происходит в плоскости $x0y$. Уже легче! Выражение для координаты x выглядит вот так: $x(t) = 20 + 5 \cdot t^2$, а для координаты y вот так: $y(t) = 105 + 32 \cdot t^2 - t^4$.

В момент времени $t = 0$ наша точка находится в положении A с координатами $(20{,}105)$ (просто подставили ноль в выражения для x и y) - это точка начала движения.
А в какой момент времени координата y станет равной нулю? Для ответа надо решить уравнение $105 + 32 \cdot t^2 - t^4 = 0$. Решаем-получаем: при $t = \sqrt{35}$ секунд координата y станет равной нулю - движение закончится. Подставляя это значение в выражение для x, получаем координаты точки окончания движения: $B(195{,}0)$.

Теперь из закона движения можно найти вектора скорости и ускорения:

$$\overrightarrow{v} = 10t \cdot \overrightarrow{i} + (64t - 4t^3) \cdot \overrightarrow{j} \text{ и}$$

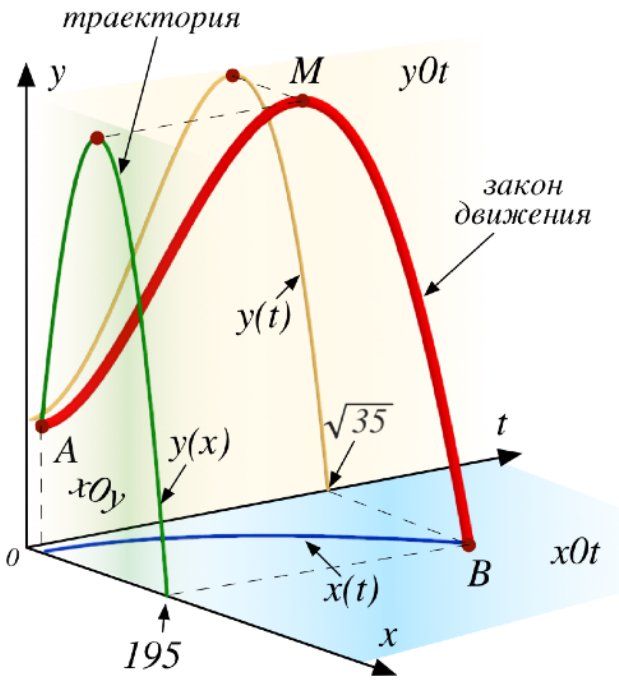
$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = 10 \cdot \overrightarrow{i} + (64 - 12t^2) \cdot \overrightarrow{j}.$$

Что можно сказать, глядя на эти выражения?

Про скорость. По оси x материальная точка движется с линейно возрастающей по времени скоростью $v_x = 10t$. Глядя на выражение для скорости по оси y ($v_y = 64t - 4t^3$), можно сообразить, что при определённом значении t эта скорость обращается в ноль, после чего становится отрицательной. То есть точка вначале двигалась вверх, а потом, достигнув максимума, начала двигаться вниз. Это положение максимума тоже неплохо было бы отыскать. В этом положении скорость по оси y обращается в ноль. Поэтому, положив $v_y = 64t - 4t^3 = 0$, найдём время достижения максимума: оно равно $t = 4$ сек. А теперь легко найти координаты точки максимума (подставив $t = 4$ в выражение для x и y): $M(100{,}873)$.

Про ускорение. По оси x материальная точка движется с постоянным ускорением 10 м/с². По оси y ускорение меняется по закону $a_y = 64 - 12t^2$.
Ну вот, с формулами разобрались. Больше, мне кажется, из них ничего не "вытянуть".

А хорошо бы построить какие-нибудь графики!
В нашем случае закон движения - это функция трёх переменных $f(x, y, t)$. Его надо строить в осях x, y, t - то есть график должен быть трёхмерным. На бумаге мы можем построить двумерный график. Как быть? На помощь придут компьютерные математические графические программы, которые позволяют строить 3D-графики и позволяют их вволю "покрутить" на экране монитора. Я пользуюсь удобной программой GeoGebra (хотя подойдёт и могучий MatLab).



Вот я построил в GeoGebr'e 3D-график закона движения нашей материальной точки и ещё кое-что. Давайте обсудим - увидим много интересного.

Толстая красная линия - график закона движения нашей материальной точки. Он построен математически точно по данному нам в задаче закону движения *в пространстве трёх переменных x, y, t (как говорят математики)*. Это - пространственная кривая (не плоская!). Она отображает *наиболее полную информацию* о движении нашей точки: в любой момент времени из интервала движения $t \in [0, \sqrt{35}]$ мы точно можем сказать каковы были её пространственные координаты x, y.

Она отображает *движение точки не только в пространстве, но и во времени*. В физике подобные кривые называют также *мировыми линиями*. Этот термин появился в специальной теории относительности при рассмотрении четырёхмерного пространства-времени.

На графике закона движения обозначены начальная и конечная точки движения A и B, а также точка достигаемого локального максимума M.

Если спроецировать график закона движения на координатную плоскость $x0t$, то мы получим на ней график зависимости координаты x от времени: он нам задан в задаче как $x(t) = 20 + 5 \cdot t^2$ [1].

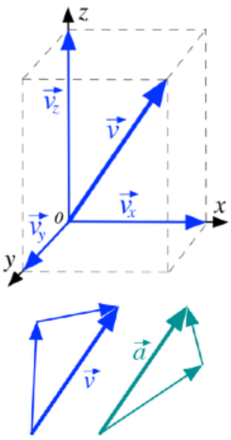
Если спроецировать график закона движения на координатную плоскость $y0t$, то мы получим на ней график зависимости координаты y от времени: он нам тоже задан в задаче как $y(t) = 105 + 32 \cdot t^2 - t^4$ [2].

А вот если спроецировать график закона движения на координатную плоскость $x0y$, то мы получим на ней график зависимости y от x, который описывает пространственную ***траекторию движения*** точки (время из рассмотрения исключено). Чтобы аналитически "спроецировать", надо из уравнения [1] выразить t и подставить его в уравнение [2].

Получится: $y(x) = 105 + \dfrac{32}{5}(x - 20) - \dfrac{1}{25}(x - 20)^2$. Это *уравнение траектории движения*. И очевидно, что это - парабола. Видите как всё связано!

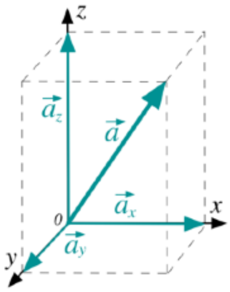
На этом анализ движения материальной точки можно и закончить - зовите физиков-динамиков!

=================



Мы уже сказали, что вектора скорости и ускорения материальной точки можно разложить по осям координат и рассматривать общее движение материальной точки как суперпозицию трёх движений.

Скажу более: *любой вектор* скорости и ускорения материальной точки можно представить как сумму двух (трёх, четырёх, ...) векторов и рассматривать суперпозицию соответствующих движений. Вопрос лишь в том, чтобы такое представление несло в себе физический смысл.

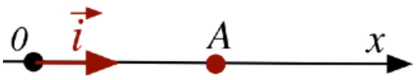


А теперь поговорим о ***видах движения*** материальной точки. Эти виды классифицируются по видам траекторий, по которым движется материальная точка. По большому счёту эти виды можно разделить на три: движение по прямой (одномерное движение), движение в плоскости (двумерное движение) и движение в пространстве (трёхмерное движение). Движение материальной точки в пространстве всегда можно свести к суперпозиции двух движений в перпендикулярных плоскостях. Поэтому поговорим о движениях материальной точки по прямой и в плоскости.

Движение материальной точки по прямой

Прямая - простейший вид траектории движения. При движении по прямой ни о каком вращательном движении речи быть не может. Вращательное движение - это движение как минимум в двух измерениях.

При движении по прямой вектора скорости и ускорения ***не меняют своего направления***[10]. Это - главный (и единственный) признак прямолинейного движения.



Закон движения сводится к простейшему виду: $Z = x(t) \cdot \vec{i}$ (при условии, что ось x совпадает с прямой движения). Или просто в координатном виде: $x = f(t)$. Ну а дальше в общем случае можно вычислять скорости-ускорения как соответствующие производные по времени.

Первый частный случай - *равномерное движение материальной точки по прямой*: величина скорости не меняется. То есть $v = x'(t) = const$. Ускорение, очевидно, равно нулю. Путь = длина траектории = величина перемещения. Закон движения в координатном виде: $x = x_0 + v \cdot t$, где x_0 - координата точки при $t = 0$. Координата линейно изменяется со временем. Скорость имеет знак (то есть может быть как положительной, так и отрицательной)!

Второй частный случай - *равнопеременное движение материальной точки по прямой*: величина ускорения не меняется. То есть $a = v'(t) = x''(t) = const$. Если $a > 0$, то говорят о *равноускоренном* движении. Если $a < 0$, то говорят о *равнозамедленном* движении. Выражение для скорости выглядит так: $v = v_0 + a \cdot t$, где v_0 - скорость точки при $t = 0$. Скорость линейно изменяется со временем.

Выражение для координаты так: $x = x_0 + v_0 \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2}$, где x_0 - координата точки при $t = 0$, v_0 - скорость точки при $t = 0$. Координата квадратично зависит от времени (изменяется "по параболе").
Эти формулы с очевидностью выводятся из условия $a = v'(t) = x''(t)$ интегрированием.

---

[10] *Если только они не нулевые.*

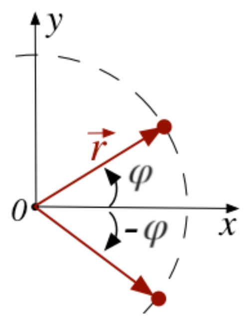
Движение материальной точки в плоскости

Траектория такого движения - плоская кривая. Плоская кривая - это кривая, полностью лежащая в какой-либо плоскости. Разумно с этой же плоскостью связать двумерную систему координат для рассмотрения движения. Плоское движении материальной точки - это суперпозиция движений по прямой и вращательных движений.

Закон движения в этом случае сводится к: $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$.

Поговорим сначала о частных случаях плоского движения. Из всех плоских кривых самой любимой для нас является окружность.

Движение материальной точки по окружности

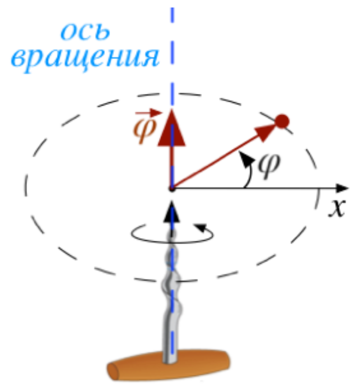


Движение по окружности - это вращение в чистом виде. Свяжем центр окружности вращения с началом системы отсчёта и направим ось x определённым образом. Что значит двигаться по окружности? Это значит оставаться на одном и том же расстоянии от её центра - на расстоянии радиуса r этой окружности. Линия, перпендикулярная плоскости вращения и проходящая через центр окружности вращения - *ось вращения*.

И положение точки на данной окружности можно определить не только как пару координат (x, y) (причём $x^2 + y^2 = r^2$), но и по углу поворота φ, отсчитанного, скажем, от положительного направления оси x[11]. И координаты точки с таким углом связаны: $x = r \cdot cos\varphi$, $y = r \cdot sin\varphi$.

К отсчёту по углу есть два вопроса:

- а есть ли разница между поворотом на угол 45 градусов и на угол 405 градусов? При вращении в обоих этих случаях точка займёт одно и то же пространственное положение: угол поворота - понятие периодическое с периодом в 2π радиан (360 градусов[12]). Разница может заключаться в параметрах движения точки в обоих случаях (скорости, ускорении).
- а как математически различить углы поворота против часовой стрелки и по часовой стрелке? А давайте считать угол поворота против часовой стрелки положительным, а угол поворота по часовой стрелке отрицательным. Так и считают. Чтобы полностью "математизировать" понятие угла поворота, поворот объявляют *вектором*. "Ой!" - скажете вы и будете правы. Но на самом деле в этом заключён математический смысл: при таком подходе вектор поворота (угла поворота) можно включать в векторные формулы, в которых фигурируют радиус-векторы, вектор скоростей и пр. И ещё: угол поворота при вращении - это аналог перемещения при поступательном движении. А перемещение - вектор. Так как же задают вектор поворота? А очень просто. Длина вектора поворота численно равна величине угла поворота (углы - в радианах). Если поворот против часовой стрелки - вектор поворота направлен вверх по оси вращения и наоборот. Мнемонически определять направление вектора поворота помогает правило правого винта (оно же - правило буравчика).



Поскольку при движении по окружности точка находится на одном и том же расстоянии от начала отсчёта, то кинематически её движение определяется лишь зависимостью угла поворота от времени $\varphi(t)$.

И эта зависимость $\varphi(t)$ по сути и является ***законом движения точки по окружности***.

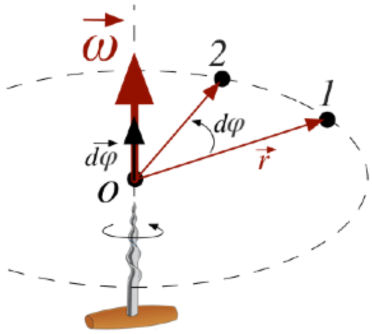
---

[11] *Так углы и договорились отсчитывать.*

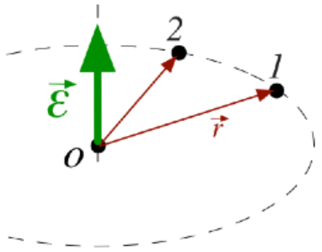
[12] *В физике принято углы поворота-вращения выражать в радианах.*

Параметры движения материальной точки по окружности

Первая группа параметров - ***угловые параметры***. Они определяются как соответствующие производные по времени от функции угла поворота $\varphi(t)$.



- *Угол поворота* мы выше обсудили.
- *Угловая скорость* - скорость изменения угла поворота. Я привожу её определение как *мгновенную*[13] угловую скорость. Угловая скорость - это отношение изменения (приращения) угла поворота ко времени этого изменения: $\vec{\omega} = \dfrac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}$, то есть - первая производная от функции угла поворота по времени. Угловая скорость $\vec{\omega}$ - это вектор, сонаправленный с вектором поворота $\overrightarrow{d\varphi}$ (работает правило буравчика). Измеряется в ***рад/сек***.

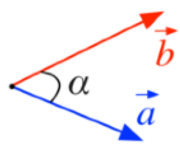


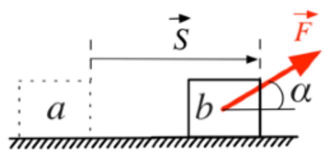
- *Угловое ускорение* - скорость изменение угловой скорости. Угловое ускорение - это отношение изменения (приращения) угловой скорости ко времени этого изменения: $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\overrightarrow{d\omega}}{dt} = \dfrac{\overrightarrow{d^2\varphi}}{dt^2}$, то есть - первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная от функции угла поворота по времени. Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ - это вектор, сонаправленный с вектором изменения угловой скорости $\overrightarrow{d\omega}$. Измеряется в ***рад/сек²***.

В определении угловых параметров не фигурирует радиус окружности вращения. То есть эти параметры определены при вращении точки по окружности любого радиуса.

Но прежде, чем двигаться дальше, необходимо ввести понятие ***векторного произведения векторов***. В школе его не дают - боятся "перегрева" мозгов у "среднего" школьника. Ну мы-то с вами физики, нам ли чего бояться? Тем более, что ничего сложного в этом нет - надо чуть "усилить" своё пространственное воображение.

Вы знакомы из школьного курса геометрии с понятием *скалярного* произведения векторов. *Скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число c (скаляр), равное $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\alpha$. Так и обозначается: $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

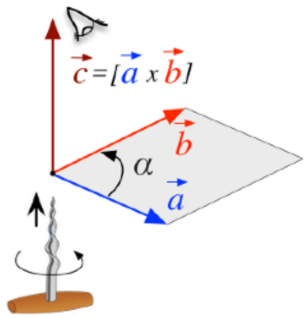




Скалярное произведение из двух векторов получает число. В физике оно применяется для определения, например, работы силы: при перемещении тела из точки a в точку b силой F, направленной под углом α к линии перемещения, работа силы F равна $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot cos\alpha$. Всё понятно. Школьные мозги переварили и усвоили это знание.

Но в физике, в которой очень много разных векторов, не все закономерности описываются лишь скалярным произведением. Поэтому физика позаимствовала у математики и широко использует понятие ***векторного произведения векторов***. Если скалярное произведение векторов - это "плоский случай" (два вектора с общей начальной точкой всегда лежат в одной плоскости), то векторное произведение векторов рассматривается в трехмерном пространстве.

[13] *Можно, конечно, определить и* ***среднюю*** *угловую скорость отдельно, но это очевидно.*



Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что:
- длина этого вектора численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах (а именно $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\alpha$).
- вектор $\vec{c}$ **перпендикулярен** к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть из конца вектора $\vec{c}$, то поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ осуществляется ***против часовой стрелки***. Мнемонически определять направление вектора поворота помогает уже нам знакомое правило правого винта (правило буравчика).

Обозначается $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ (иногда просто $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$).

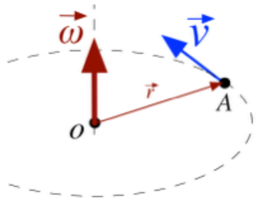
Векторное произведение двух векторов - это вектор!

Основные свойства векторного произведения:
- векторное произведение двух коллинеарных (параллельных, α=0) векторов равно 0; частный случай: $[\vec{a} \times \vec{a}] = \vec{0}$;
- $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$ - векторное произведение некоммутативно!

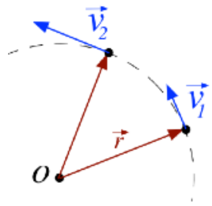
Не сложно? Надо лишь аккуратненько следить за направлением вектора $\vec{c}$ и будет нам счастье.

=================

А вот теперь - группа параметров вращения, которые определяются при вращении точки по окружности конкретного радиуса r - *линейные* параметры.

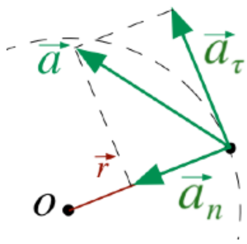


Линейная скорость - скорость перемещения вращающейся точки относительно неподвижной системы отсчёта. Определяется как $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ - векторное произведение! Вектор линейной скорости $\vec{v}$ всегда направлен по касательной к окружности вращения! В школе вы определяли линейную скорость "упрощённо" численно: $v = \omega \cdot r$, а вектор её направлен по касательной к окружности вращения туда, "куда точка вращается".



Линейное ускорение. А вот тут придётся поговорить. Когда точка движется по окружности, то вектор её линейной скорости ***всегда*** направлен по касательной к этой окружности. То есть в разных точках окружности вектор скорости направлен по-разному. А это ужЕ повод говорить об ускорении: ускорение - это скорость изменения *вектора* скорости. Но ведь вектор скорости при движении точки по окружности меняет не только своё направление, он *может* менять и свою величину. И тогда появится второй повод говорить об ускорении - за счет изменения величины скорости.

Поэтому при движении точки по окружности говорят о двух видах ускорений:
- ***нормальном*** ускорении a_n, обусловленном изменением *направления* вектора скорости и
- ***тангенциальном*** ускорении a_τ, обусловленном изменением *величины* скорости.



При движении точки по окружности ***нормальное ускорение*** a_n присутствует *всегда*. Вектор нормального ускорения направлен от точки к центру вращения.

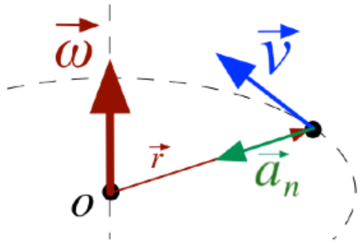
Величина его: $a_n = \omega^2 \cdot r = \dfrac{v^2}{r}$. Или в векторной форме: $\vec{a_n} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$.

При движении точки по окружности ***тангенциальное ускорение*** a_τ появляется в случае ускоренного или замедленного вращения (об этом чуть позже), *при равномерном вращении оно отсутствует*. Вектор тангенциального ускорения направлен по касательной к окружности вращения. Если линейная скорость возрастает, то вектор тангенциального ускорения направлен "по ходу движения", если убывает - против. Величина его определяется как: $a_\tau = \varepsilon \cdot r$ или в векторной форме: $\vec{a_\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$.

Вектор ***полного ускорения*** точки $\vec{a}$ равен векторной сумме нормального и тангенциального ускорений: $\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_\tau}$ или в величинах: $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$.

Частные случаи движения материальной точки по окружности

Первый частный случай - *равномерное вращение*: ***величина угловой скорости постоянна***.

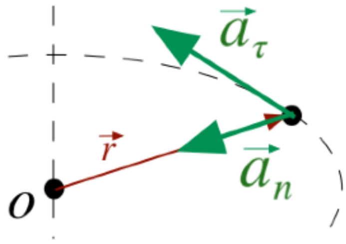


То есть: $\vec{\omega} = \dfrac{\vec{d\varphi}}{dt} = const.$

Откуда следует: угловое ускорение равно нулю - $\varepsilon = 0$, тангенциальное ускорение равно нулю - $a_\tau = 0$. Закон движения в "угловом" виде $\varphi(t)$: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot t$, где φ_0 - угол поворота точки при $t = 0$.

Величина линейной скорости: $v = \omega \cdot r$. Величина нормального ускорения: $a_n = \omega^2 \cdot r = \dfrac{v^2}{r}$. Полное ускорение точки равно её нормальному ускорению.

Второй частный случай - *равнопеременное вращение*: ***величина углового ускорения постоянна***.



То есть $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{d\omega}}{dt} = const.$

Если $\varepsilon > 0$, то говорят о *равноускоренном* вращении. Если $\varepsilon < 0$, то говорят о *равнозамедленном* вращении.

Величина угловой скорости: $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$, где ω_0 - угловая скорость при $t = 0$.

Закон движения в "угловом" виде $\varphi(t)$: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \dfrac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$, где φ_0 - угол поворота точки при $t = 0$, ω_0 - угловая скорость точки при $t = 0$.

Линейная скорость: $v = \omega \cdot r$ - меняется со временем линейно.

Нормальное ускорение: $a_n = \omega^2 \cdot r$ - меняется со временем квадратично.

Тангенциальное ускорение: $a_\tau = \varepsilon \cdot r$ - постоянно.

Полное ускорение точки равно $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$.

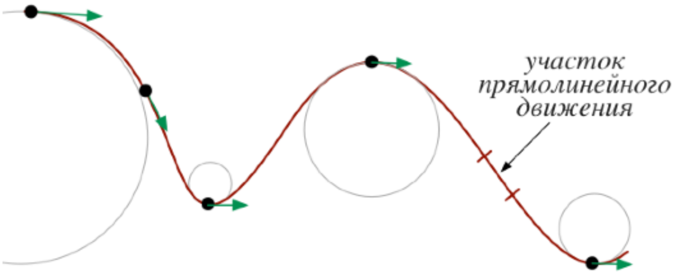
Вдумчивый ученик: "Слушайте, до чего ж похожи формулы частных случаев движения точки по прямой и по окружности! А что, если прямую представить как окружность бесконечного радиуса? Тогда формулы просто совпадут!"

Эк ты, братец-вдумчивый ученик, и придумал! Хотя за смелость аналогии хвалю. Чисто геометрически представить прямую как окружность бесконечного радиуса можно. Но вот физического смысла в таком представлении нет. Это скорее отсылает нас к вопросу: в нашей Вселенной какая геометрия справедлива - евклидова или не-евклидова? А похожесть формул вытекает всего лишь из общности правил дифференцирования-интегрирования. "Не надо искать лишних сущностей", как говаривал монах Оккама.

Общий случай движения материальной точки

Под общим случаем движения материальной точки будем говорить как о плоском движении, так и о движении в пространстве (по "неплоским" кривым).

Подход в этом случае достаточно прост: любое движение точки по гладкой кривой[14] можно представить как последовательность движений по окружностям и участкам прямых.



Поясню. Математика утверждает, что к любой точке гладкой кривой (плоской или пространственной) можно построить касательную окружность ненулевого радиуса. Поэтому мгновенное движение в любой точке кривой можно рассматривать как вращение по окружности соответствующего радиуса, пользуясь параметрами движения и их формулами, рассмотренными выше. Если у кривой есть прямолинейные участки, то движение точки по ним - это движение по прямой.

Если у нас имеется аналитическая формула линии движения (траектории), то, пользуясь методами математического анализа, мы можем посчитать *кривизну* этой линии в любой точке. То есть посчитать радиус окружности, касающейся этой линии в любой точке. Надо ещё знать начальную скорость движущейся точки и тогда по сути у нас есть закон движения. И остаётся лишь найти его параметры.

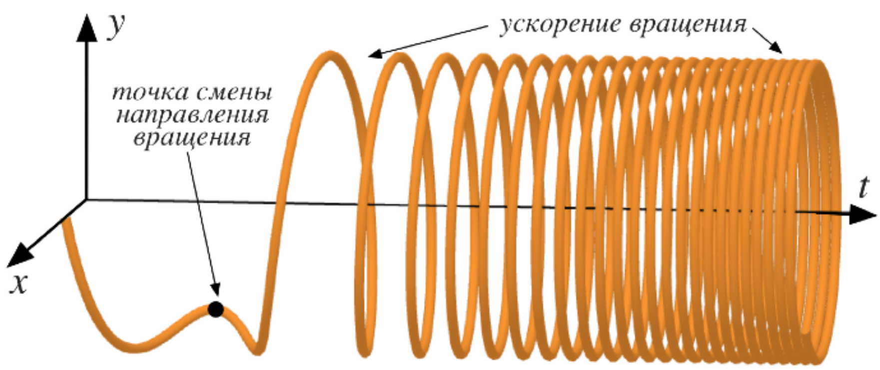
> Давайте рассмотрим задачку. Точка вращается по окружности радиуса $r = 1$ по закону $\varphi(t) = -4t + 2t^2 + t^3$. Определите параметры вращения точки.

Вращение - плоское. Считаем не в векторах, а в значениях.

Угловая скорость: $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = -4 + 4t + 3t^2$ - изменяется со временем по квадратичному закону. При $t = 2/3$ сек обращается в ноль (сами решите квадратное уравнение). При $t < 2/3$ угловая скорость отрицательна (точка вращается по часовой стрелке), при $t > 2/3$ угловая скорость положительна (точка вращается против часовой стрелки), при $t = 2/3$ происходит смена направления вращения.

Угловое ускорение: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 4 + 6t$ - возрастает линейно, всё время положительно.

Строю с помощью GeoGebr'ы закон движения в трёхмерном пространстве x, y, t. Координаты x, y считаются так: $x = r \cdot cos\varphi(t)$, $y = r \cdot sin\varphi(t)$ (смотри выше).



Вот как наглядно получилось: видна и точка смены направления вращения, видно как вращение ускоряется - витки становятся гуще.

---

[14] *Математически под **гладкой кривой** понимается кривая, в каждой точке которой определена её первая производная.*

Движение материальной точки в поле силы тяжести

Ещё один частный случай, но он реализуется во многих задачах, связанных со свободным движением точки у поверхности Земли. Камень, подброшенный вверх, камень, брошенный под углом к горизонту, снаряд, выпущенный из орудия и пр. - всё это случаи движения в поле силы тяжести.

Из динамики мы знаем, что сила тяжести, действующая на тело, обуславливается *законом всемирного тяготения*. И ускорение, с которым тело движется под действием ***только*** силы тяжести, называется *ускорением свободного падения*.

Рассматриваемая модель движения подразумевает ограничения:

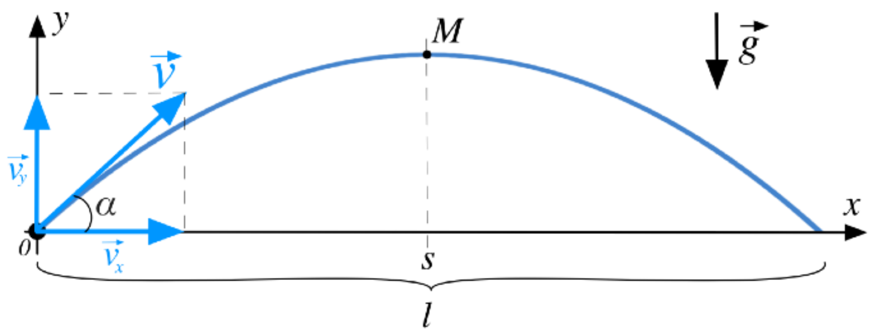
- материальная точка движется под действием ***только*** силы тяжести (силы сопротивления воздуха и прочие силы отсутствуют);
- величина ускорения свободного падения на всей траектории движения материальной точки постоянна, направлена вертикально вниз и равна $g = 9{,}81$ м/с².

Из этих ограничений следует:

- в горизонтальном направлении материальная точка движется равномерно. Это вытекает из Первого закона Ньютона;
- в вертикальном направлении материальная точка движется равнопеременно с ускорением g.

Рассмотрим пример бросания камня под углом к горизонту (в школе его вы уж точно рассматривали) как общий случай такого движения.

Выберем прямоугольную систему отсчёта (ось x - горизонтально) и привяжем её начало к точке бросания. Из начальных условий нам известна величина начальной скорости v и угол её вектора α к горизонту. Будем рассматривать движение камня как два независимых движения: по оси x и по оси y.



Тогда и вектор начальной скорости разложим по осям: $v_x = v \cdot cos\alpha$ и $v_y = v \cdot sin\alpha$.
Движение по оси x - равномерное, движение по оси y - равнопеременное с ускорением g.
Пишем уравнения для координат по осям с учётом знаков:

$$\begin{cases} x = v_x \cdot t \\ y = v_y \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2} \end{cases}$$

По большому счёту у нас есть закон движения - мы можем определить координаты камня в любой момент времени.

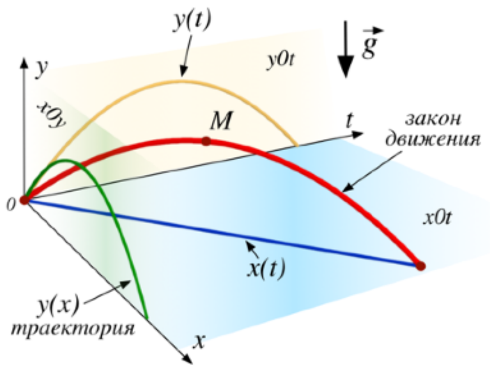
Но хочется ответить на вопросы:

- как далеко улетит камень;
- на какую высоту он поднимется;
- сколько времени он будет лететь;
- каков вид траектории его движения.

Из первого уравнения выражаем t и подставляем его во второе: $y = \dfrac{v_y}{v_x} \cdot x - \dfrac{g \cdot x^2}{2 \cdot {v_x}^2}$. Если учесть, что $\dfrac{v_y}{v_x} = tg\alpha$ и $v_x = v \cdot cos\alpha$, то получаем уравнение траектории камня:
$y = tg\alpha \cdot x - \dfrac{g}{2 \cdot v^2 \cdot cos^2\alpha} \cdot x^2$ - парабола "рогами" вниз. У этой параболы есть максимум - точка M - точка наивысшего подъёма. И эта парабола-траектория симметрична относительно оси Ms!

Теперь отвечаем на вопросы.
Время подъёма до точки M (равнозамедленное движение по оси y, в точке M вертикальная составляющая скорости равна нулю) определяется из уравнения для скорости при равнозамедленном движении: $v_y = g \cdot t_M$. Полное время в полёте из-за симметрии параболы: $T = 2t_M = 2\dfrac{v \cdot sin\alpha}{g}$. Расстояние по горизонтали, на которое улетит камень: $l = v_x \cdot T = 2\dfrac{v^2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha}{g} = \dfrac{v^2}{g}sin2\alpha$. Высота, на которую поднимется камень в точке M: $h = v_y \cdot t_M - g\dfrac{{t_M}^2}{2} = \dfrac{{v_y}^2}{2g} = \dfrac{v^2}{2g}sin^2\alpha$.

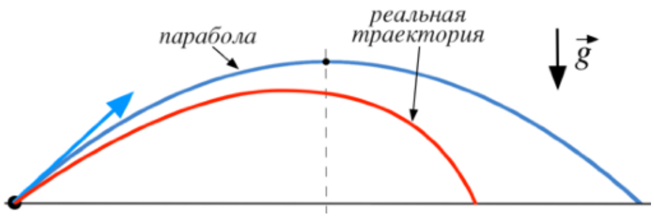
А вот закон движения, построенный в пространстве x, y, t. Всё наглядно и понятно.



Вдумчивый ученик: "А как считают траекторию снаряда при стрельбе из пушки? К этим формулам просто добавляют ещё и сопротивление воздуха?"

О, это целая наука - баллистика. Она - "взрослая дочь кинематики". Попытаюсь немного поговорить об этом. Задача при стрельбе снарядом - не "попасть в глаз мухе", а доставить снаряд в некоторую область вокруг цели. Ну, скажем, в окружность радиусом 5 метров. В этом и состоит точность стрельбы. И задача артиллериста - правильно сориентировать ствол (по двум углам).

Реальная траектория снаряда отличается от идеальной параболы (расчитанной при тех же начальных условиях) так, как это примерно показано на рисунке. И вот какие факторы влияют на неё.



Сопротивление воздуха. В полёте на снаряд со стороны воздуха действует сила вязкого трения (сопротивления воздуха). И эта сила будет различной в разных точках траектории. Вот почему:

- сила вязкого трения пропорциональна квадрату скорости. Скорость снаряда различна в разных точках траектории;
- сила вязкого трения зависит от плотности воздуха. На разных высотах полёта снаряда плотность воздуха различна (из-за разного давления и температуры);
- в разных точках траектории снаряд немного по-разному ориентирован относительно вектора скорости - явление прецессии (об этом чуть ниже).

Прецессия снаряда. Орудийные стволы делают *нарезными*. Это придаёт вращение снаряду. Вращение делает движение снаряда значительно стабильнее нежели при стрельбе из гладкоствольного оружия. Но у этого вращения есть и оборотная сторона: летящий вращающийся снаряд начинает ***прецессировать***[15] - вращаясь вокруг своей оси, он начинает вращаться ещё и вокруг немного отклонённой оси, изменяя тем самым площадь своего сопротивления встречному воздушному потоку.

Эффекты вращения Земли. Да-да, при стрельбе на дальности 20-30 км необходимо учитывать и это. В Истории про Вращение, мы покажем, что на тело, движущееся вдоль меридиана Земли, действует боковая так называемая сила Кориолиса, которая может значительно отклонить снаряд. Эта сила Кориолиса зависит от скорости снаряда и от его координат (широты-долготы).

Ну вот, пожалуй и всё. Но вы уже, наверное, понимаете, что никакой красивой формулы при учёте всех этих факторов быть не может - применяются численные методы. Естественно, все расчёты делаются на компьютере и такие устройства называются *баллистическими вычислителями*. Им "на входе" задаются: собственные координаты (спутниковые системы навигации GPS или Глонасс для того и существуют); координаты цели (разведчики постарались); информация о погоде в районе (температура, ветер). А сделав вычисления, эти устройства определяют на какой угол повернуть и на какой угол поднять ствол орудия. Ну а дальше... Главное - чтоб не было войны!

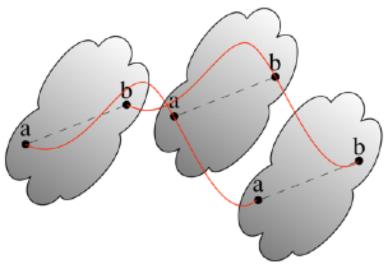
Движение твёрдого тела

Твердое тело состоит из бесконечного количества материальных точек. Если твердое тело движется, то вместе с ним движутся и все принадлежащие ему материальные точки. Уравнения движения твердого тела должны позволять в любой момент времени определить положение и кинематические характеристики любой его точки.

Поступательное движение твёрдого тела

Напомню: *твёрдое тело* - это тело, у которого расстояние между двумя любыми точками не меняется в процессе движения. И: *поступательное движение* - это механическое движение тела, при котором отрезок прямой, соединяющий две любые точки этого тела, не изменяется в размере и остаётся параллельным своему положению в любой предыдущий момент времени.

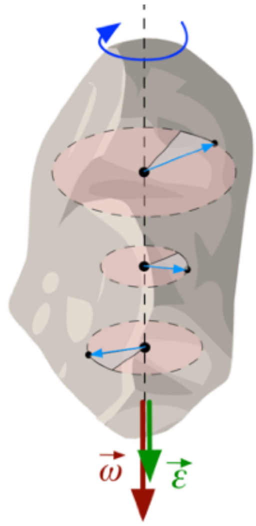
Легко видеть (хотя это и просто доказывается), что все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают совпадающие при наложении траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые скорости и одинаковые ускорения.



Поэтому поступательное движение твердого тела полностью определяется движением какой-либо его точки, например центра тяжести. В этом случае имеют смысл выражения "скорость тела" или "ускорение тела". При других формах движения каждая точка тела имеет свою скорость и свое ускорение.

[15] *Явление прецессии мы разберём в Истории про Вращение.*

Вращательное движение твёрдого тела



Напомню: *вращательное движение твёрдого тела* - это вид механического движения, при котором все его точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Центры всех окружностей лежат при этом на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой *осью вращения*.

Если при поступательном движении линейные перемещения, линейные скорости и линейные ускорения (линейные параметры) всех точек твёрдого тела одинаковы, то *при вращательном движении одинаковыми остаются все угловые параметры движения точек: углы поворота, угловые скорости и угловые ускорения*.

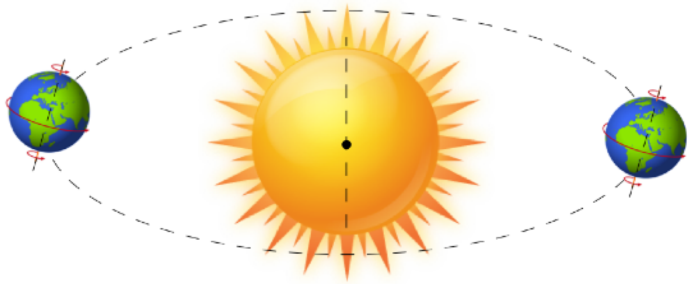
Вот вам и сформулировано отличие поступательного от вращательного движений: неизменными остаются разные группы параметров[16].

Поэтому ***уравнением вращательного движения твёрдого тела*** является $\varphi = \varphi(t)$. И его угловые параметры - угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{\overrightarrow{d\omega}}{dt} = \frac{\overrightarrow{d^2\varphi}}{dt^2}$.
Всё, что мы говорили об угловых параметрах движения материальной точки по окружности, относится и к вращательному движению твёрдого тела.

А если нам вдруг захочется узнать линейные параметры вращения какой-нибудь точки (под "какой-нибудь" надо понимать "отстоящей на расстоянии r от оси вращения") твёрдого тела, то можно воспользоваться всеми теми способами, что мы обсуждали при разговоре о линейных параметрах движения материальной точки по окружности: о линейной скорости $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, нормальном ускорении $a_n = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$, тангенциальном ускорении $a_\tau = \varepsilon \cdot r$ и полном ускорении $\vec{a} = \vec{a_n} + \vec{a_\tau}$.

Твёрдое тело может одновременно участвовать в нескольких вращательных движениях (вокруг разных и разнонаправленных осей) и поступательном движении.

Пример такого сложного движения - движение Земли относительно центра нашей Галактики: Земля вращается вокруг Солнца, Земля вращается вокруг своей оси (ось вращения Земли наклонена относительно плоскости вращения вокруг Солнца), вся Солнечная система вращается вокруг центра Галактики.

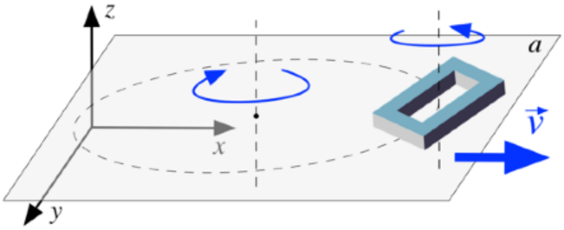


Рассмотрим частный случай движения твёрдого тела - плоское движение.

[16] ***Инварианты****, как сказали бы теоретические физики.*

Плоское движение твёрдого тела

Плоское (плоскопараллельное) движение твёрдого тела (ТТ) - движение, при котором каждая его точка всё время движется в одной и той же плоскости. Траектории всех точек ТТ *лежат в параллельных плоскостях*, то есть траектории всех точек - плоские кривые.

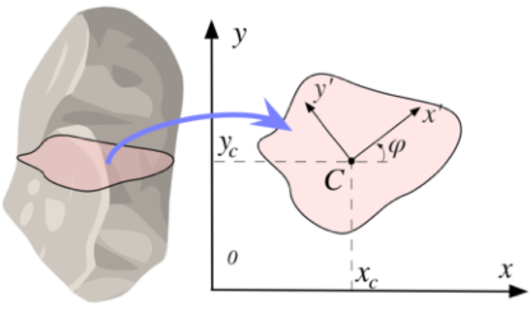


Хоть плоское движение есть частный случай, но он часто встречается на практике.

Поскольку любое механическое движение можно разложить на поступательное и вращательные, то вот что можно сказать о них:

- поступательное движение плоского движения - "плоское" - происходит в одной плоскости;
- у всех вращательных движений, в котором участвует ТТ при плоском движении, оси вращения параллельны.

Описание плоского движения тела сводится к описанию движения одного сечения тела плоскостью, параллельной плоскостям траекторий точек тела.



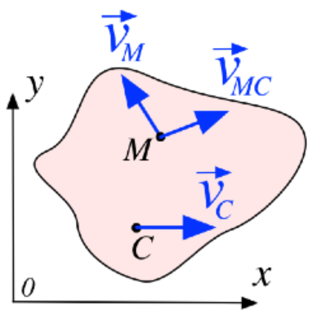
На рисунке: выбирается некоторая точка C - ***полюс,*** совершающая *только поступательное движение*[17]. Её координаты и угол поворота сечения относительно неё и определяют положение сечения и всего тела в целом.

$$\begin{cases} x_c = x_c(t) \\ y_c = y_c(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$ - уравнение плоского движения ТТ.

Уравнения $x_c = x_c(t)$ и $y_c = y_c(t)$ описывают поступательное движение полюса, уравнение $\varphi = \varphi(t)$ описывает вращательное движение плоской фигуры (сечения) вокруг полюса.

Из этой системы можно найти параметры движения: линейные (линейную скорость и линейное ускорение) и угловые (угловую скорость и угловое ускорение).

А вот *теорема о сложении скоростей при плоском движении* о том, как складывать скорости поступательного и вращательного движений.



Скорость точки плоской фигуры равна векторной сумме скорости полюса (скорости поступательного движения) и скорости вращательного движения этой точки относительно полюса.

Имеем: $\overrightarrow{v_C}$ - скорость поступательного движения полюса C; $\overrightarrow{v_{MC}}$ - скорость вращательного движения точки M относительно полюса C; $\overrightarrow{v_M}$ - полная скорость точки M.

$$\overrightarrow{v_M} = \overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{v_{MC}}$$

Эта простенькая теорема, которая доказывается "в одну строчку", не даёт "закружиться голове" при сложении поступательного и вращательного движений.

---

[17] *В общем случае полюс может совершать и вращательное движение. Но здесь для простоты понимания считаем, что только поступательное.*

А вот очень неожиданный и интересный вывод из этой теоремы:

> Всегда существует точка плоской фигуры, ***полная скорость которой в данный момент равна нулю***. Такая точка называется *мгновенным центром скоростей (МЦС)*.

"Ой!" - скажете вы и опять будете правы. Я же обещал, что будет интересно!

У мгновенного центра скоростей МЦС есть свойства:
- положение МЦС на движущейся фигуре не является неизменным, в процессе движения его положение постоянно меняется;
- *МЦС может находиться вне тела*;
- если угловая скорость тела в данный момент равна нулю, то МЦС располагается в бесконечности. В этом случае скорости всех точек тела одинаковы.

МЦС может быть как некой виртуальной точкой (когда находится вне тела), так и вполне конкретной точкой тела в данный момент движения.

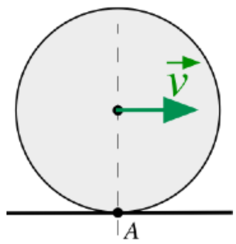
И тогда как следствие теоремы: *если полюсом выбрать МЦС, то полная скорость любой точки равна скорости этой точки относительно МЦС.*

Ну хватит теоретизировать, а то голова начнёт плоско-перпендикулярное движение. Перейдём к самому распространённому виду плоского движения - качению колеса. Тут много интересного.

Качение колеса

"Ой, что мы колёс не катали? Чего там неизвестного-то?" - воскликнете вы. Погодите.

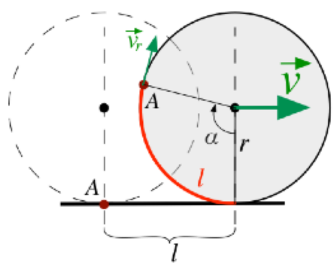
Вот абсолютно твёрдое колесо равномерно катится по абсолютно твёрдой поверхности. Колесо совершает как поступательное движение, так и вращательное - и всё это в одной плоскости. И это пример *плоского движения*.



Скорость центра колеса относительно поверхности равна v. Колесо катится *без проскальзывания*. Что это значит? А это значит то, что в каждый момент времени точка колеса, касающаяся поверхности (точка A) и точка поверхности, касающаяся колеса, имеют одну и ту же скорость. Но поверхность неподвижна, а значит в этот момент времени скорость точки A равна нулю.

"Точка A - мгновенный центр скоростей?" - вдумчивый ученик на посту. Точно.

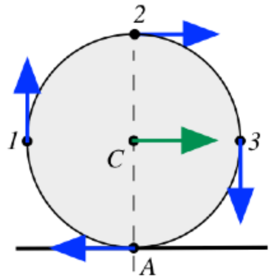
А теперь давайте подумаем: если скорость центра колеса v (скорость поступательного движения), то чему равна линейная скорость вращения точек обода колеса?

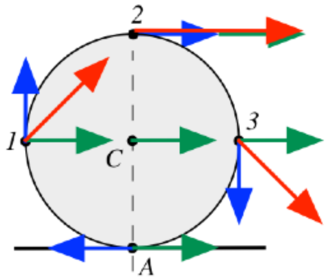


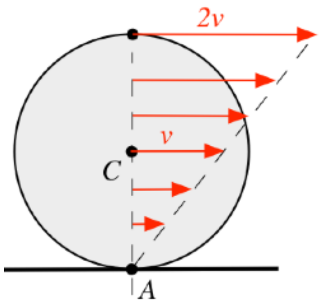
Пусть за время Δt центр колеса переместился на расстояние l. Точка A за это же время повернулась на угол α, описав красненькую дугу. *Из условия непроскальзывания* очевидно, что длина этой красненькой дуги тоже равна l. А уж из этого с неизбежностью вытекает (не буду вас унижать столь элементарными выкладками), что *линейная скорость вращения точки A равна v*.

А каковы тогда полные скорости точек обода катящегося колеса? А вот тут-то нам и поможет теорема о сложении скоростей при плоском движении. Выбираем в качестве полюса центр колеса.

Для четырёх точек колеса $(A,1,2,3)$ синими векторами обозначил линейные скорости вращения каждой точки относительно полюса C. Теперь для определения полной скорости точек по "теореме о сложении" к этим синим векторам надо добавить по зелёному вектору скорости полюса C - получились красные вектора полных скоростей точек. Что из этого следует? Точка A - мгновенный центр скоростей - её полная скорость действительно равна нулю. Полная скорость точки 2 в два раза больше скорости поступательного движения колеса. Полные скорости каждой точки в процессе плоского движения постоянно меняют величину и направление.





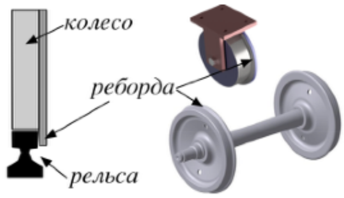


Можно даже построить так называемую ***эпюру скоростей*** (распределение скоростей) точек колеса, лежащих на вертикальном диаметре. Она довольно наглядна.

Самая верхняя точка колеса поезда Москва-Питер всегда едет в Питер в два раза быстрее, чем сам поезд!

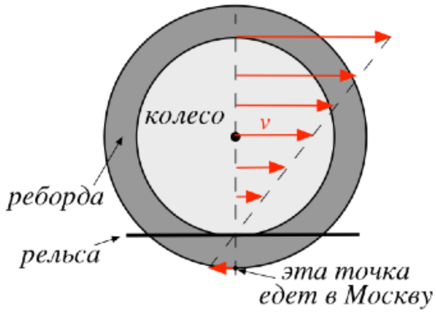
В классической книге Якова Исидоровича Перельмана "Занимательная физика" есть такой вопрос-задача: "Есть ли в поезде, едущем из Москвы в Ленинград[18], точки, "едущие" из Ленинграда в Москву?"

"Ой! А как это быть-то может?" - воскликнете вы. Может! Надо только внимательно посмотреть на устройство колеса поезда.

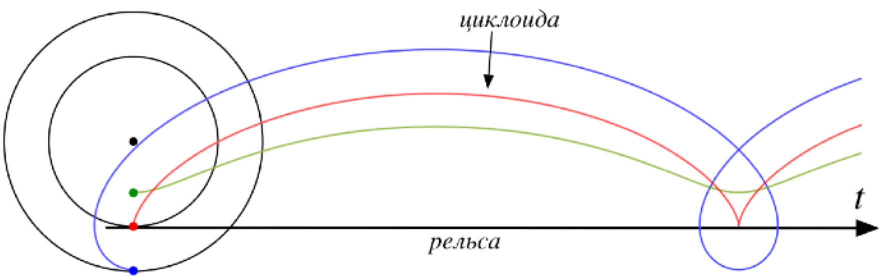


У всех колёс рельсового траспорта (поезда, трамваи, метро и пр.) есть в конструкции непременная деталь - *реборда* - бортик, который позволяет колесу "цепляться" за рельсу при движении. Вы наверняка это видели. Вопрос Перельмана как-раз про реборду.

Ну вот посмотрите: следуя той же логике, что и выше, я разрисовал эпюру скоростей для колеса с ребордой. И оказывается, что у точек реборды, находящихся ниже уровня рельса, вектор полной скорости направлен "в Москву". Вот ответ на вопрос. Неожиданно?



"А по каким траекториям движутся точки катящегося колеса?" Своевременный вопрос. Мы же физики-кинематики! Для нас траектории очень важны.



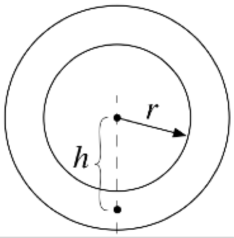
Точки катящегося колеса движутся по кривым, общее название которых - ***циклоиды***[19]. Вот взглянiет на картинку - на ней показаны три циклоиды: красная - собственно *циклоида* - для точки, находящейся на ободе колеса, который катится без скольжения по оси; синяя -

---

[18] *Так тогда Санкт-Петербург назывался.*

[19] *От греческого "круглый".*

удлинённая циклоида - для точки, находящаяся на реборде колеса поезда; зелёная - *укороченная циклоида* - для точки, находящейся ближе к оси вращения колеса.



Общее уравнение движения точки катящегося колеса выглядит так:
$$\begin{cases} x = r \cdot t - h \cdot sint \\ y = r - h \cdot cost \end{cases}$$
, где r - радиус колеса; h - расстояние от оси вращения до точки.

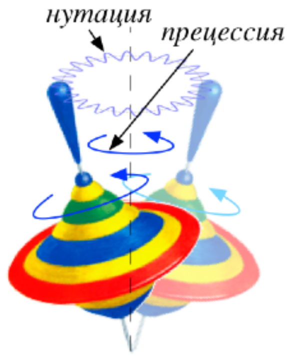
Если $h = r$, то получаем циклоиду, если $h > r$, то получаем удлинённую циклоиду, если $h < r$, то получаем укороченную циклоиду.

У циклоид есть масса замечательных свойств. Например: длина одной дуги циклоиды равна $8r$, а площадь под ней в три раза больше площади колеса. Циклоиды широко используются в прикладной механике.

Общий случай движения твёрдого тела

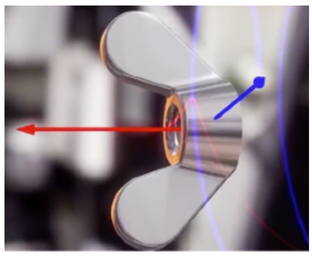
В общем случает твёрдое тело может одновременно участвовать в поступательном и многих вращательных движениях.

Дифференциальные уравнения сложного вращательного движения написаны ещё Эйлером в конце 18-го века. Для каждого конкретного случая их надо решить и найти закон движения тела и кинематические параметры.



То, насколько неожиданным может оказаться сложное вращательное движение, покажу на двух примерах.

Все нам знакома с детства юла-волчок. Если вы её раскрутите и, поставив на пол, чуть отклоните её ось вращения от вертикали, то ось юлы начнёт вращаться по окружности. Это явление называется ***прецессия***. Более того, верхний конец юлы начнёт выписывать по окружности прецессии колебательные движения. Это явление называется ***нутация***. Все эти явления вытекают из дифференциальных уравнений сложного вращательного движения. Но ведь удивительно же! Скажу более: ось вращения Земли тоже подвержена прецесии и нутации. Об этих эффектах мы ещё поговорим в Истории про Вращение.



Наберите в поисковике "эффект Джанибекова" и посмотрите видео поведения гайки-барашка в невесомости. Вот неожиданно и удивительно!

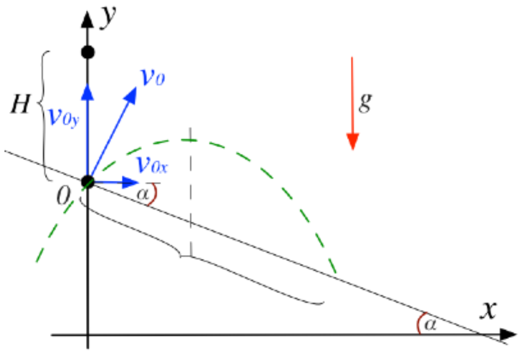
Всеми вопросами кинематики и динамики сложного движения твёрдого тела занимается *теоретическая механика*. Её вы обязательно будете изучать в институте.

=================

Ну и напоследок вот вам сложная задачка по кинематике из школьного курса.

Задача. С высоты H на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α=45⁰, свободно падает мяч и упруго отражается с той же скоростью. Найти расстояние от места первого удара до второго, затем от второго до третьего и т.д. Решить задачу в общем виде (для любого угла α).

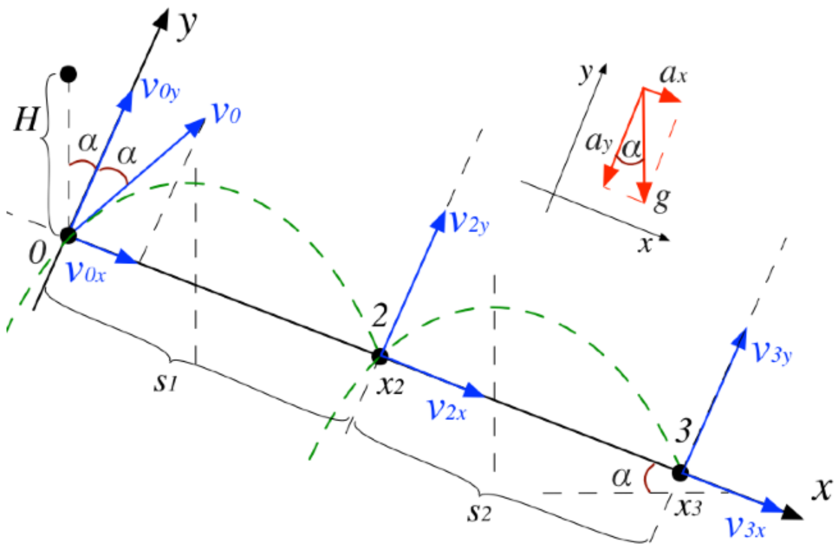
Решение: Вспоминаем: *при упругом ударе угол падения равен углу отражения!* Главное в этой задаче - правильно выбрать удобную систему координат. Какие варианты?



Первое, что напрашивается, - ось x - горизонтально. Какие плюсы? Движение по оси x - равномерное, движение по оси y - равноускоренное под действием силы тяжести. Минусы: координаты y каждой точки удара мяча о плоскость - разные - гораздо более громоздкие уравнения для вычислений.

А вот если пустить ось x по наклонной плоскости, то все точки падения будут иметь координату $y = 0$ (это очень поможет при решении уравнений). Правда движение по оси x станет равноускоренным (под действием x-составляющей вектора g). Мяч будет двигаться по тем же параболам, что и в первом случае (и это очевидно, поскольку выбор системы координат не влияет на форму траектории), только параболы эти будут наклонены относительно осей x, y. Чутьё подсказывает, что этот вариант проще для решения.

Конечно, чтобы сравнить варианты, надо решить задачу обоими способами. Я решил. Естественно, результат получился одинаковым. Однако второй вариант *существенно* проще при составлении и решении уравнений[20]. Итак, выбираем второй вариант - ось x по наклонной плоскости.



Мяч, падая с высоты H, первый раз ударяется о плоскость со скоростью $v_0 = \sqrt{2gH}$ (это очевидно, посчитайте сами) под углом α к оси y и под этим же углом с той же скоростью отскакивает от плоскости.

Уравнение движения по оси y: $y = v_{0y}t - \frac{a_y t^2}{2}$, $v_{0y} = v_0 \cdot cos\alpha$, $a_y = g \cdot cos\alpha$ - y-составляющая вектора g. Координата y второго соударения равна 0. Поэтому легко найти время между первым и вторым соударением: $t = \frac{2v_0}{g} = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

[20] *Развивайте физическое чутьё и учитесь доверять ему!*

За миг до второго удара: $v'_{2y} = v_{0y} - a_y \cdot t$. Подставляем t и получаем: $v'_{2y} = -v_{0y}$, а значит и $v_{2y} = v_{0y}$, где v_{2y} - скорость мяча через миг после второго удара. То есть y-составляющая скорости отскока мяча после второго удара равна y-составляющей скорости отскока мяча после первого удара. Аналогично посчитав время между вторым и третьим ударом и y-составляющую скорости отскока мяча после третьего удара, придем к выводам:

- времена между всеми ударами одинаковы и равны $t = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}$
- y-составляющая скорости мяча после каждого отскока будет одинаковой: $v_{ny} = v_{0y}$

Ищем расстояние между ударами:

- между первым и вторым:

уравнение движения по x: $x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$; $v_{0x} = v_0 \cdot sin\alpha$; $a_x = g \cdot sin\alpha$,

подставляем t и находим координату x точки второго удара: $s_1 = x_2 = 8H \cdot sin\alpha$.

- между вторым и третьим: $s_2 = x_3 - x_2$; $x_3 = v_{0x}(2t) + \frac{a_x(2t)^2}{2} = 24H \cdot sin\alpha$,

$s_2 = 24H \cdot sin\alpha - 8H \cdot sin\alpha = 16H \cdot sin\alpha$;

- между третьим и четвертым: $s_3 = x_4 - x_3$; $x_4 = v_{0x}(3t) + \frac{a_x(3t)^2}{2} = 48H \cdot sin\alpha$,

$s_3 = 48H \cdot sin\alpha - 24H \cdot sin\alpha = 24H \cdot sin\alpha$

- между четвертым и пятым: $s_4 = x_5 - x_4$; $x_5 = v_{0x}(4t) + \frac{a_x(4t)^2}{2} = 80H \cdot sin\alpha$,

$s_4 = 80H \cdot sin\alpha - 48H \cdot sin\alpha = 32H \cdot sin\alpha$,

- и т.д.

Получается, что $s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : \ldots = 1 : 2 : 3 : 4$... при $s_1 = 8H \cdot sin\alpha$.

К этому выводу можно прийти также вот из каких соображений:

Определим x-скорости: $v_{2x} = v_{0x} + a_x t = v_0 sin\alpha + g sin\alpha \frac{2v_0}{g} = 3v_0 \cdot sin\alpha$. Поскольку времена между соударениями одинаковы, то

$v_{3x} = v_{0x} + a_x \cdot 2t = v_0 sin\alpha + g sin\alpha \frac{4v_0}{g} = 5v_0 \cdot sin\alpha$, из чего можно обобщить:

$v_{nx} = (2n - 1) \cdot v_0 \cdot sin\alpha$. x-скорость между ударами растет линейно (постоянное ускорение a_x). Средняя скорость между:

- первым и вторым ударом: $\frac{v_{0x} + v_{2x}}{2} = \frac{v_0 sin\alpha + 3v_0 sin\alpha}{2} = 2v_0 sin\alpha$
- вторым и третьим ударом: $\frac{v_{2x} + v_{3x}}{2} = \frac{3v_0 sin\alpha + 5v_0 sin\alpha}{2} = 4v_0 sin\alpha$
- третьим и четвертым ударом: $\frac{v_{3x} + v_{4x}}{2} = \frac{5v_0 sin\alpha + 7v_0 sin\alpha}{2} = 6v_0 sin\alpha$ и т.д.

То есть средние скорости между ударами относятся как *1:2:3:4:...*, а поскольку время между ударами одинаковое, то и расстояния между ударами будут относиться как *1:2:3:4:...*

==========================

Ну вот и всё! Надеюсь, это было вам полезно. Удачи!