Электростатика

Электродинамика - это раздел физики, описывающий электрические и магнитные явления. В этой Истории мы поговорим о полях, порождаемых этими явлениями. Всё, что я расскажу здесь, по бОльшей части выходит за рамки "школьного электричества", но позволит понять физическую суть.

Если вы еще не твердо в жизни выбрали дорогу
И не знаете, с чего бы трудовой свой путь начать,
Бейте лампочки в подъездах - люди скажут вам "спасибо".
Вы поможете народу электричество беречь.
Григорий Остер

"Электричество" - это общеупотребительное разговорное слово. Физика использует другие слова. Разберёмся в названиях-определениях.

Электростатика - раздел физики, изучающий взаимодействие ***неподвижных*** электрических зарядов.

Магнитостатика - раздел физики, изучающий взаимодействие ***постоянных*** токов и ***постоянных*** магнитных полей.

Электродинамика - раздел физики, изучающий электромагнитное поле в наиболее общем случае. Совсем обще можно сказать, что ***электродинамика - это наука о зарядах***. Электродинамика включает в себя электростатику и магнитостатику.

В школе проходят электростатику и магнитостатику. Предполагаю, что вы их помните (хотя бы в общих чертах).

Электростатика

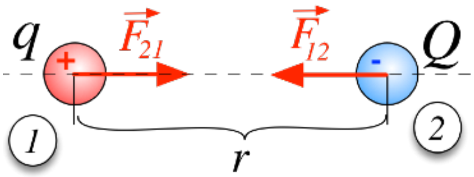
Давайте вспомним как нам преподавали электростатику в школе.

Это мы вспоминаем как было в школе

После демонстрации опытов с электризацией тел (расчёска притягивала кусочки бумаги, натёртая эбонитовая палочка - тоже) нам рассказывали о законе Кулона в такой формулировке:

Силы взаимодействия неподвижных зарядов равны по модулю

$F = \dfrac{1}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{q \cdot Q}{r^2}$, где q, Q - модули зарядов;



r - расстояние между зарядами; ε - диэлектрическая проницаемость среды ($\varepsilon \geq 1$); ε_0 - электрическая постоянная, равная примерно 8,85·10^{-12} Ф/м. Плюс дополнения (*целая инструкция по применению*):

- одноименные заряды отталкиваются, разноименные - притягиваются
- заряды неподвижны друг относительно друга
- закона Кулона справедлив для точечных зарядов
- по третьему закону Ньютона $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$
- силы эти действуют по линии, соединяющей эти точечные заряды.

А затем вводили понятие: ***Напряженность электрического поля*** - физическая величина, равная отношению силы, с которой поле действует на ***положительный пробный*** заряд q_0, к величине этого заряда: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$ [Вольт/метр=В/м].

Понятно, что для школьной программы 7-8-х классов это единственно возможная простая логика и последовательность изложения. Но есть логика школьной программы и есть логика физики. Я хочу рассказать вам об электродинамике с точки зрения логики электродинамики.

Какие вопросы вызывает "школьная логика" изложения:

- сила - это вектор. Закон Кулона описывает силу электростатического взаимодействия зарядов как скаляр. Как быть?[1]
- закон Кулона справедлив для точечных зарядов. А как быть с не-точечными?
- откуда в формулу кулоновской силы "заскочило" число π? Обычно π возникает из геометрии.
- в Истории про Силы мы пришли к важнейшему выводу: *электрический заряд порождает электрическое поле, а уж порожденное поле воздействует на другие заряды*: заряд $\Rightarrow$ поле $\Rightarrow$ воздействие. То есть сила воздействия вторична (третична) в этой цепочке. А напряженность $\vec{E}$ является характеристикой порождённого зарядом электрического поля. Но в "школьной логике" напряженность $\vec{E}$ определяется через вторичную силу, да ещё с помощью какого-то пробного заряда. Немножко похоже на "почесать правой рукой левое ухо". Логика электродинамики требует напрямую связать напряженность $\vec{E}$ с порождающим её зарядом.

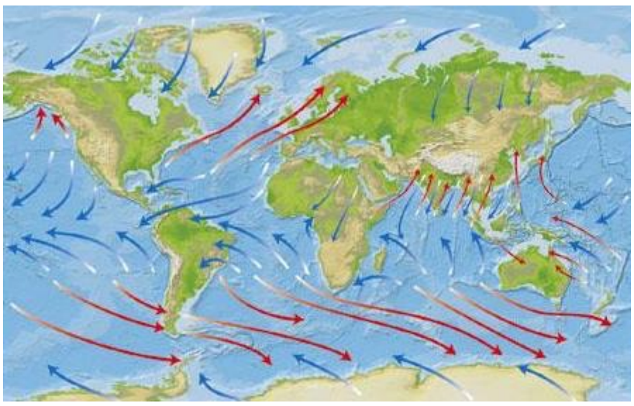
Итак, восстанавливаем ~~справедливость~~ логику электродинамики.

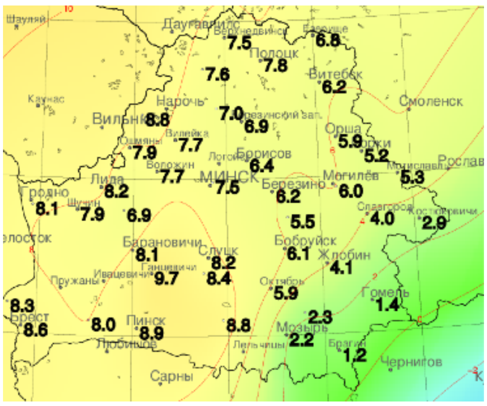
Но вначале придётся познакомиться с двумя важными понятиями: *векторное поле и поток векторного поля*. Ничего сложного в этих понятиях нет: они логичны и легко объясняются "на пальцах" и на картинках. Буду максимально доходчив.

Векторное поле

Вы, конечно, привыкли к тому, что изучаемые физические величины можно разделить на два вида: скаляры и векторы. Скаляр - это число. Температура и энергия - это скаляры. Вектор характеризуется как величиной (числом), так и направлением. Сила и скорость - это векторы.

Нам обычно недостаточно сказать: "Вот в этой точке ветер дует на северо-запад со скоростью 5 метров в секунду (или температура равна 10^{0}C)". Нам хочется взять некоторую область пространства и описать ветер (температуру) во всех её точках. Так появились карты ветров и карты температур.





Ну так это и есть примеры векторного и скалярного полей.

[1] *В Истории про Силы мы на этот вопрос ответили.*

Физическое векторное поле - это некоторая физическая векторная величина, распределённая в пространстве. Электрическое и магнитное поля - это физические векторные поля. Это с одной стороны. С другой стороны, физическое поле - это форма существования материи. Поэтому электрическое и магнитное поля - это вид материи (квантовая механика уточняет: электрическое и магнитное поля - это потоки фотонов).

Электрический заряд создает физическое векторное поле. Из курса школьной электростатики вы знаете, что поле электрического заряда полностью описывается вектором напряженности $\overrightarrow{E}$ во всех точках пространства. *Если мы можем определить величину и направление вектора напряженности $\overrightarrow{E}$ в любой точке пространства, то мы знаем об этом векторном электрическом поле всё.*

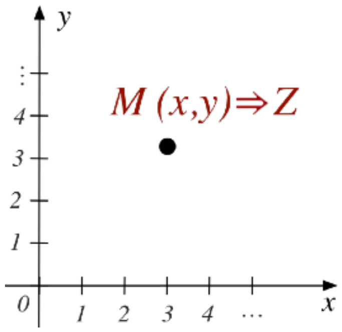
Сразу встают два вопроса: как нам векторное поле описать математически и как это векторное поле изобразить. На примере векторного электрического поля. Будем отвечать на эти вопросы по порядку.

■ Математическое описание векторного электрического поля

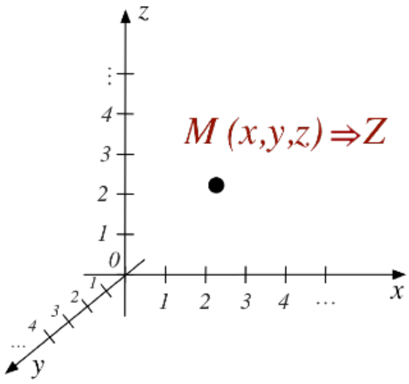
Математика всегда была (есть и будет) верной помощницей физики. Физики обнаружат в природе какое-либо новое явление и бегут к математикам: "Подскажите, братцы-математики, как нам вот ***это*** правильно математически описать?" Математики - ребята не жадные и предусмотрительные. Они обычно отвечают: "А вот для ***этого*** у нас есть готовый математический инструмент. Нате, братцы-физики, пользуйтесь."

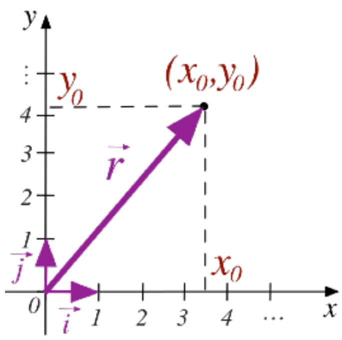
Так и в случае с *физическим векторным полем* у математиков оказалось в заднем кармане брюк *математическое векторное поле* и мощный инструмент работы с ним - *векторный анализ*.

Точное определение математического векторного поля - это отображение, которое каждой точке рассматриваемого пространства ставит в соответствие вектор с началом в этой точке.



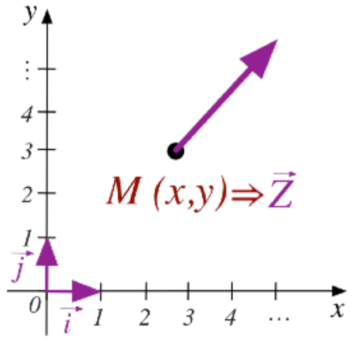
Как нам описывать скалярное поле? Скалярное поле - это поле чисел. Для двумерного скалярного поля (скалярное поле на плоскости) строим числовые оси X и Y. Каждая точка плоскости описывается двумя координатами (x, y). Если каждой точке плоскости $M(x, y)$ приписать значение скалярного параметра Z (это значение может рассчитываться по какой-либо формуле $f(x, y)$ или браться из результатов измерений), то мы получим описание скалярного поля Z. Карта температур так и строится. Для трехмерного случая всё точно также, лишь добавляется ещё одна числовая ось Z. Ну ведь просто и понятно же?



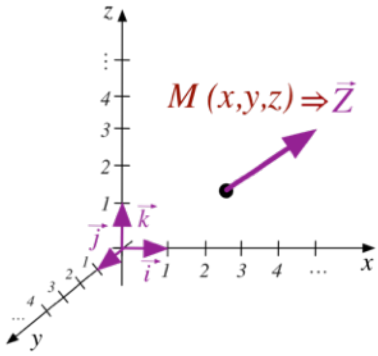


С векторным полем чуть сложней. Ведь вектор - это не только число, но и направление. В школе мы учили как задать вектор на координатной плоскости. На тех же числовых осях надо отложить по ***единичному*** вектору $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Тогда любой вектор, начинающийся в начале координат и заканчивающийся в точке (x_0, y_0), можно записать как $\vec{r} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j}$. Оси X и Y вместе с векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ образуют ***векторную плоскость*** (одни только оси X и Y образуют знакомую нам ***числовую плоскость***) - оси "отвечают" за величину

вектора, а единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - за его направление. Вот этим способом мы и воспользуемся для описания векторного поля.
Для двумерного случая (*плоского векторного поля*) каждой точке векторного пространства (с осями X и Y и единичными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$) с координатами поставим в соответствие (с помощью формулы или с помощью результатов измерений) вполне определенный вектор $\vec{Z}$. Вот и получили плоское векторное поле $\vec{Z}(x, y)$.



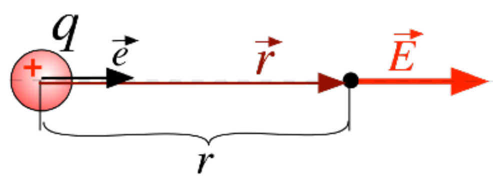
Для трехмерного случая (*пространственного векторного поля*) поступим аналогично, добавив ещё одну чиловую ось Z и единичный вектор $\vec{k}$ на ней. Тоже не очень сложно.



Хорошо. Это всё были скучноватые определения. Давайте решим хорошую задачу - математически опишем пространственное векторное поле одиночного положительного точечного заряда.

Вспоминаем из школьной электростатики:

Величина напряженности электрического поля одиночного положительного точечного заряда q в точке, находящейся от заряда на расстоянии r, равна $\left|\vec{E}\right| = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}$. С величиной понятно.



А направление вектора $\vec{E}$? Вектор $\vec{E}$ направлен по линии, соединяющей точечный заряд и рассматриваемую точку, от заряда (заряд положительный). Ага, а как бы нам эти слова превратить в математическую формулу? А вот так. Давайте от заряда по линии, соединяющей заряд и точку, построим единичный вектор $\vec{e}$. Тогда смело можем записать уже в векторной форме: $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2} \cdot \vec{e}$. А можно ещё элегантнее. Построим от заряда к точке вектор $\vec{r}$. По сути этот вектор и будет определять положение нашей рассматриваемой точки относительно заряда. А единичный вектор можно представить как вектор $\vec{r}$, деленный на свою длину: $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}$. И тогда $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}$. Или $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^3} \cdot \vec{r}$. Вот то, что нам нужно.

Переносимся в трехмерное векторное пространство. Помещаем в начало координат наш одиночный положительный точечный заряд. Рассматриваем произвольную точку с координатами (x, y, z). Тогда вектор $\vec{r}$ можно расписать вот так $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$. А его длину r - по теореме Пифагора: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Окончательно имеем: $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} \cdot (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k})$.

Эта формула и является *полным математическим описанием векторного поля напряженности одиночного точечного заряда.*

Чем эта формула хороша?

- эта формула - векторная (то есть полностью соответствует векторной природе напряженности);
- она описывает вектор напряженности $\vec{E}$ в любой точке пространства;
- ***алгебраический знак заряда*** *("+" или "-")* ***определяет направление вектора*** $\vec{E}$ ***(что тоже соответствует физическому смыслу)***;
- из этой формулы методами вышеупомянутого векторного анализа легко выводятся формулы для других характеристик электрического поля (например, для потенциала).

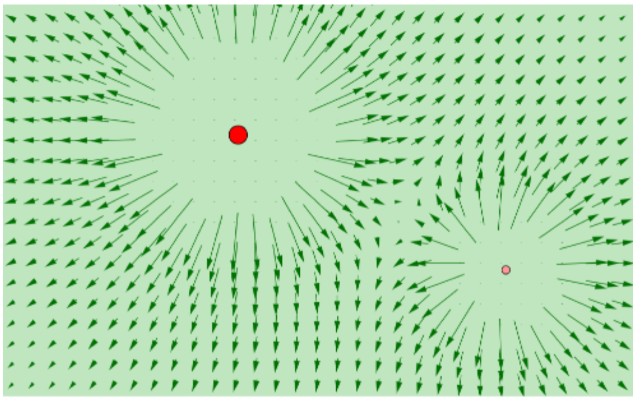
Страшно? Успокою вас: мы не будем злоупотреблять такими формулами. Я просто показал как описывается электростатическое поле во "взрослой" электродинамике (причем, простейший случай). Да и мозги мы манёк потренировали.

Теперь поговорим о более важном для нас.

Изображение векторного электрического поля

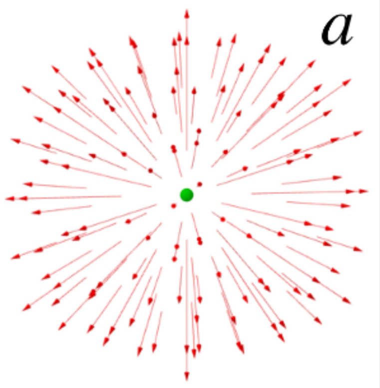
Изображение важно. Хоть оно и не обладает полнотой математического описания, оно позволяет качественно взглянуть на явление. Зрительный образ всегда плодотворно дополняет "текстовое" и "формульное" восприятие.

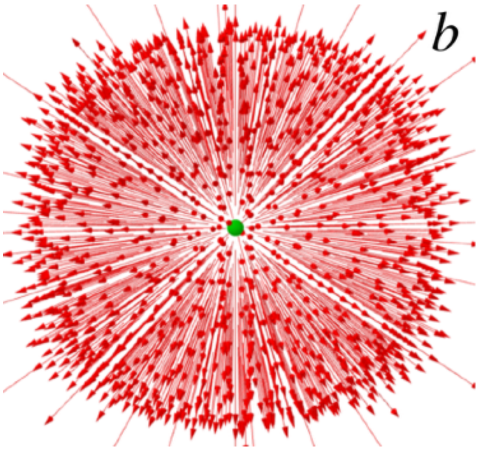
Изображаем мы на двумерной плоскости (3D модели, которые можно "покрутить" на экране монитора, конечно, хороши, но достаточно редки).



Вот изображение плоского векторного электрического поля (вектора $\vec{E}$) двух зарядов. Направление изображаемых векторов соответствует направлению векторов $\vec{E}$ поля, их длины - величине напряженности. Вектор изображает вектор - это просто. Естественно, реальное физическое электрическое поле трехмерно - оно заполняет всё пространство. Но для некоторых задач вполне достаточно и "плоского" взгляда. Вектора $\vec{E}$ ***прорисованы не для всех точек плоскости*** (иначе рисунок был бы сплошным темно-зелёным пятном).

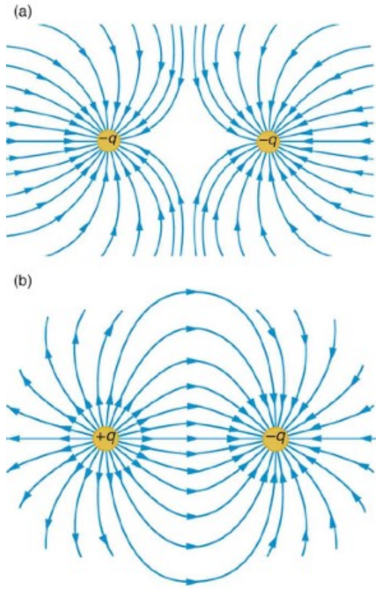
С помощью графической математической программы GeoGebra я смоделировал простейшее ***трехмерное*** векторное электрическое поле точечного положительного заряда (с помощью формулы, которую мы вывели выше). Вот два его изображения.





В случае ***b*** я "попросил" программу прорисовать вектора напряженности "погуще". Картинка ***a*** гораздо приятнее для глаза. Не всегда "густота" во благо. Мы должны понимать, что изобразить ***все*** векторы мы не сможем - их несчетное количество (их столько же, сколько точек в пространстве).

Силовые линии

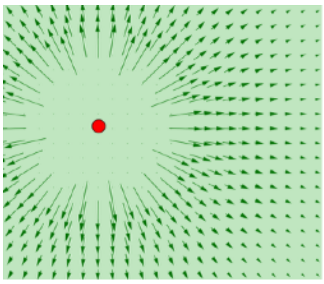


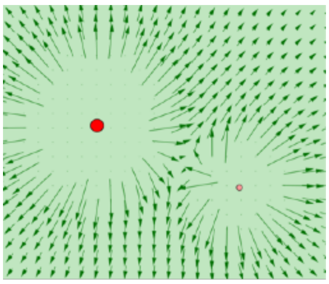
В школе вы рассматривали ещё один способ изображать векторное электрическое поле - с помощью силовых линий. *Силовой линией электрического поля называется линия, в каждой точке которой касательная совпадает с линией вектора напряженности поля.* На этих линиях указывается направление векторов напряженности. *Силовые линии начинаются на положительных зарядах (или в бесконечности) и оканчиваются на отрицательных (или в бесконечности).* Там, где эти линии "гуще" нарисованы, там величина напряженности больше.

На рисунке изображены силовые линии электрического поля двух отрицательных зарядов (a) и двух зарядов: положительного и отрицательного (b).

Важное замечание. В школе нам понятие напряженности электрического поля давали так: *Напряженность электрического поля* - физическая величина, равная отношению силы, с которой поле действует на ***положительный пробный*** заряд q_0, к величине этого заряда: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$. В связи с этим возникает недопонимание. Вот в чём оно состоит.

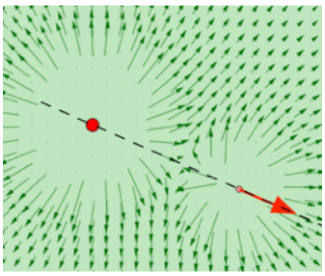
Не сильно вдумчивый ученик рассуждает так. Вот у нас есть положительный электрический заряд и порождаемое им поле - левый рисунок. Для определения вектора





$\vec{E}$ мы помещаем в это поле пробный положительный заряд. Но этот пробный заряд сам создает электрическое поле! И результирующее поле изменится относительно первоначального - правый рисунок. Так что же мы будем определять?

Очень важное утверждение *(которое зачастую забывают озвучить)*:
заряд не взаимодействует с создаваемым им полем!



Поэтому на пробный заряд будет действовать *только поле исходного положительного заряда* и кулоновская сила отталкивания (оба заряда - положительные) будет направлена по линии, соединяющей эти два заряда.

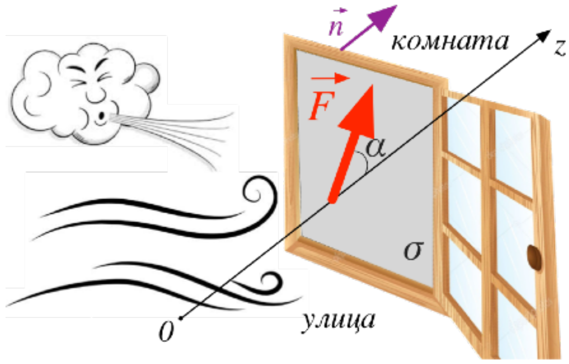
А вот если добавить третий заряд, то на него будут действовать оба положительных заряда своим результирующим полем.

Ну вот, с векторным полем разобрались.

Поток векторного поля

Кстати, с понятием потока векторного поля вы уже встречались в школьной физике, когда изучали электромагнитную индукцию. Помните формулы: $\Phi = B \cdot S \cdot cos\alpha$ и $E = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ (закон Фарадея)? Ну да не важно.

Начнём с привычного вопроса - а с чем у нас ассоциируется слово "поток"? Поток воздуха, поток жидкости. Мысленно перекроем открытое окно непрерывной σ-поверхностью. Проведем ось Z, перпендикулярную этой поверхности с направлением с улицы в комнату. Имеет ли значение сторона поверхности? Конечно. По одну сторону улица, по другую - комната. Поэтому мы будем рассматривать *ориентированную поверхность* $\bar{\sigma}$ с двумя сторонами, которые принято определять с помощью единичных векторов нормали $\vec{n}$. Для определенности выберем направление вектора нормали $\vec{n}$ в положительном направлении оси Z (вектор нормали и ось Z параллельны, поскольку оба перпендикулярны поверхности σ) - мы рассматриваем "комнатную" сторону σ-поверхности. Поскольку наша поверхность плоская, то у всех её точек будет один и тот же единичный вектор нормали $\vec{n}$.



В окно дует ветер. Рассмотрим векторное поле скоростей воздуха. Пусть в каждой точке σ-поверхности вектора скорости воздуха одинаковы и равны вектору $\vec{F}$. Этот вектор направлен под углом α к оси Z. Тогда поток - это количество воздуха , прошедшее через ориентированную поверхность σ за единицу времени. И можно записать формулу:

$\Phi = \left|\vec{F}\right| \cdot cos\alpha \cdot S_\sigma$, где Φ - поток (скаляр), S_σ - площадь поверхности σ. Причём здесь $cos\alpha$? Ну как же. $\left|\vec{F}\right| \cdot cos\alpha$ - это та составляющая вектора скорости воздуха $\vec{F}$, которая направлена по оси Z и которая залетает в комнату. Перпендикулярная составляющая вектора $\vec{F}$ в комнату не залетает и в расчетах потока не участвует.

А если приглядеться к этой формуле внимательно, то её можно переписать "по-взрослому", вспомнив что такое скалярное произведение векторов: $\Phi = \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot S_\sigma$.

Посмотрим на эту формулу внимательно:

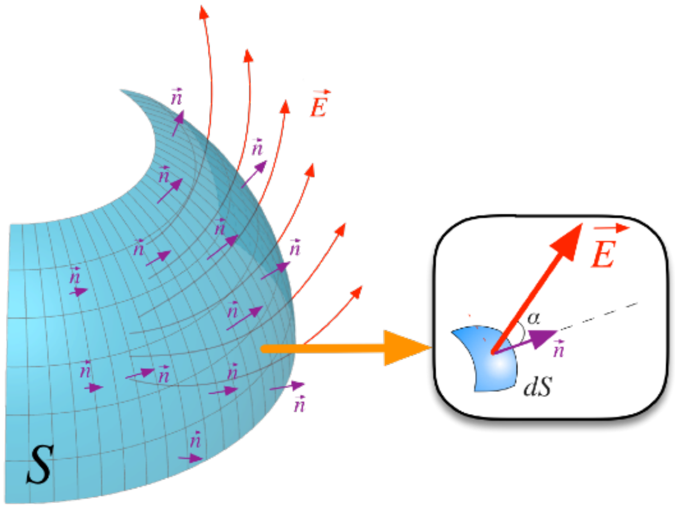
- если $\Phi > 0$, то воздух движется по направлению вектора нормали $\vec{n}$ выбранной "комнатной" стороны, то есть он поступает в комнату;
- если $\Phi < 0$, то воздух движется против направления вектора нормали $\vec{n}$ выбранной "комнатной" стороны, то есть он уходит из комнаты;
- если $\Phi = 0$, то а) либо ветра нет вообще ($\left|\vec{F}\right| = 0$); б) либо он дует в плоскости поверхности σ ($cos\alpha = 0$); в) либо приключилось состояние равновесия (сколько воздуха прошло через поверхность σ в комнату, столько же воздуха и ушло через поверхность σ из комнаты на улицу);
- когда поток будет максимальным? Когда $cos\alpha = 0$.

Что изменится, если рассмотреть "уличную" сторону σ-поверхности? Поскольку её нормальный вектор направлен в противоположную сторону, то *изменится знак потока*. Образно говоря, мы станем смотреть на ту же самую ситуацию, только с другой стороны.

Поток -> скаляр!!!

Поток векторного поля через поверхность

Давайте обобщим. Пусть у нас есть векторное поле $\left\{\vec{E}\right\}$. Как посчитать поток этого векторного поля через некоторую поверхность S? Поверхность эта не плоская, в каждой её точке имеется свой единичный вектор нормали $\vec{n}$. Поступаем так: бьём поверхность S на много-много маленьких-маленьких кусочков, каждый площадью dS. Насколько маленьких? Настолько, чтобы считать поле в пределах этого кусочка постоянным. На каждом кусочке строим свой вектор нормали $\vec{n}$. Все векторы нормалей должны быть направлены



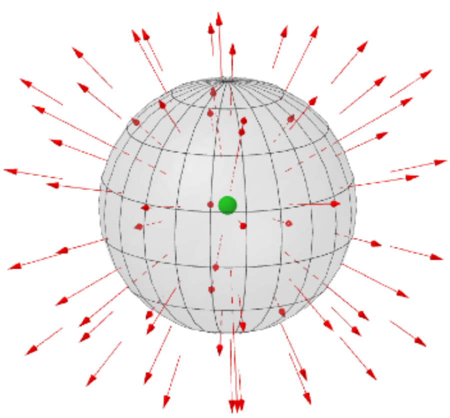
единообразно: например, с поверхности плоскости "наружу". Для каждого кусочка определяем вектор поля $\vec{E}$. Для каждого кусочка определяем элементарный поток $d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$. Посчитав все элементарные потоки, мы их просто суммируем (ведь поток - это скаляр-число, и суммировать мы его имеем право по законам сложения чисел). Получаем общий поток Φ: $\Phi = \sum d\Phi = \sum \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$. Ну теоретически это понятно. Но как практически разбивать поверхность "на много-много маленьких-маленьких кусочков"?

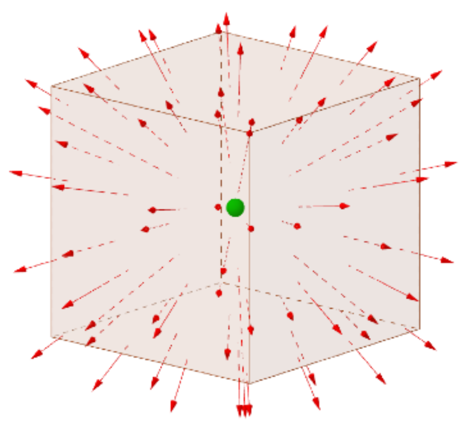
А вам ничего не напоминает описанный мною способ? Разбиваем некоторую функцию (поверхность можно рассматривать как некоторую аналитическую функцию в пространстве) на маленькие кусочки, кой-чего на этих кусочках вычисляем, а потом результаты суммируем.

Вдумчивый школьник воскликнет: "Так это же похоже на интегрирование!" Верно!

И поверхность, и векторное поле аналитически описываются векторными формулами в пространстве. А аппарат векторного анализа (о котором я упомянул выше) и позволяет подобные операции (интегрирование и дифференцирование векторных функций) выполнять. Но это всё вы будете изучать в институте.

В электродинамике очень важным является *расчет потоков векторных полей* (электрического и магнитного) *через замкнутую поверхность.*





Какую замкнутую поверхность? Например, через сферу или куб. В принципе - через любую выпуклую поверхность. В зависимости от удобства для той или иной задачи. На таких поверхностях не должно быть "дырок" (поверхности непрерывны). Замкнутая поверхность всегда делит пространство на две части: внутренняя часть поверхности и наружная.

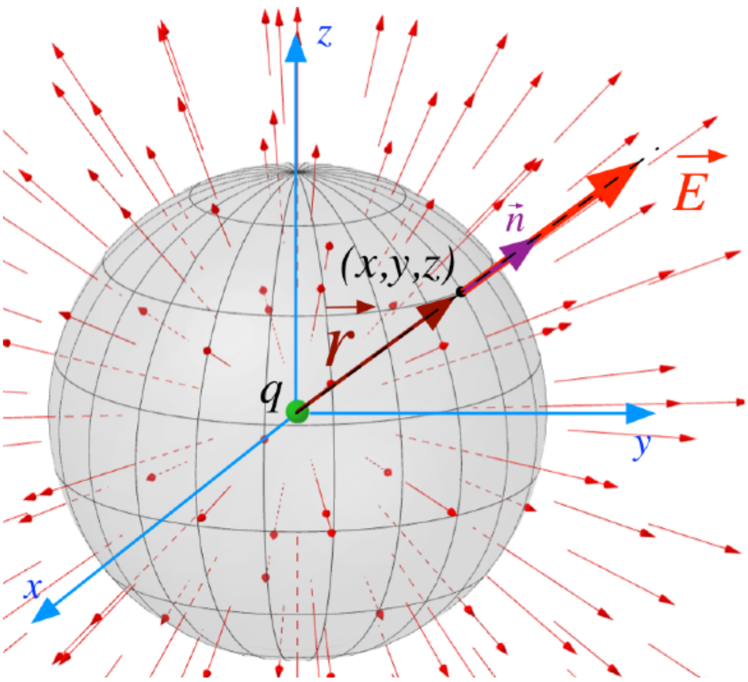
Считается поток по тем же правилам: бьём поверхность на кусочки, считаем элементарные потоки, а потом складываем. И опять же: векторы нормали должны быть направлены единообразно: например, с поверхности наружу.

И ещё нам пригодится одно важное понятие - *векторное произведение векторов*. О нём рассказывается в Приложении №1.

=============

Ну вот, коль вы дочитали до этого места и не убежали играть на компьютере в Warcraft, переходим к электростатике как таковой. Напомню то, что мы хотим сделать: мы хотим связать ***напрямую*** электрический заряд и напряженность порождаемого им электрического поля (а не как в школе - через силу и пробный заряд). И поверьте, сделав это, мы получим важные и неожиданные результаты.

Поток электростатического поля одиночного положительного заряда



Вооруженные знанием векторного поля и его потока через замкнутую поверхность, давайте посчитаем поток одиночного точечного положительного заряда q через сферическую поверхность радиуса r, центр которой совпадает с положением заряда. Подчеркну, что сфера - это ***воображаемая*** поверхность (не медная и не железная)! Для простоты будем считать, что действие у нас происходит в вакууме ($\varepsilon = 1$).

Совместим начало координат с зарядом и рассмотрим произвольную точку с координатами (x, y, z) на поверхности сферы - всё показано на рисунке.

Сфера - прекрасная фигура! Сфера центрально-симметричная фигура.

Проведем линию от заряда (от начала координат) через точку (x, y, z). На этой линии лежат: радиус-вектор $\vec{r}$ (он по этой линии и строится); вектор электростатического поля $\overrightarrow{E}$, создаваемого зарядом q (вектор $\overrightarrow{E}$ сонаправлен вектору силы, действующей на пробный заряд, помещенный в эту точку, а сила действует по линии, соединяющей заряды); единичный вектор нормали $\overrightarrow{n}$ (из геометрических соображений). Значит угол между вектором $\overrightarrow{E}$ и вектором $\overrightarrow{n}$ равен 0.

Теперь вокруг точки (x, y, z) выбираем маленький-маленький кусочек площадью dS. Такой маленький, что считаем поле в пределах этого кусочка постоянным и равным $\vec{E}$. Тогда элементарный поток равен: $d\Phi = \left|\vec{E}\right| \cdot dS$, где $\left|\vec{E}\right|$ - величина вектора $\vec{E}$.

Но мы уже вспоминали, что величина напряженности электрического поля одиночного точечного заряда q в точке, находящейся от заряда на расстоянии r, равна $\left|\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$. Тогда получаем $d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dS$. Хорошо.

А теперь сообразим, что для любой точки на поверхности сферы и для любого кусочка dS этой сферы сомножитель $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$ в последней формуле будет ***одинаков*** (и его можно вынести за скобки)! Ведь поле точечного заряда тоже центрально-симметрично!

Считаем полный поток: $\Phi = \sum d\Phi = \sum \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \sum dS$. ЗдОрово!

А что такое $\sum dS$ по всей поверхности сферы? Это площадь поверхности сферы! А чему равна площадь поверхности сферы радиуса r? Школьная стереометрия подсказывает: $S = 4\pi r^2$. В итоге: $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$[2]. Ещё раз: $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Переведём дух.

Так, а чего мы хотели-то? Ага: связать ***напрямую*** электрический заряд и напряженность порождаемого им электрического поля. Ну так вот: $\Phi = \sum \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$ или

$$\sum \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q$$

А вот это уже серьёзно! Да, пусть для простейшего случая одиночного точечного заряда, пусть мы взяли прекрасную и удобную поверхность в виде сферы, но мы по сути ***вывели первое из четырёх уравнений электродинамики Максвелла***!

Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879)

➡ О системе уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла – это система уравнений в дифференциальной или интегральной форме, описывающая любые электромагнитные поля, связь между токами и электрическими зарядами в любых средах. *Уравнения Максвелла (плюс уравнение для силы Лоренца) образуют полную систему уравнений классической электродинамики.*
Уравнения Максвелла в электродинамике – это как законы Ньютона в классической механике или как постулаты Эйнштейна в теории относительности.

Максвелл сформулировал свои уравнения, обобщив накопленные к середине 19-го века экспериментальные результаты, работы Кулона, Фарадея, Ампера. Эти уравнения отражают логику всей классической электродинамики.

---

[2] *Ну я же говорил, что π "залетело" в закон Кулона из геометрии!*

Вот кратко смысл этих четырёх уравнений:
- первое уравнение: электрический заряд порождает электрическое поле
- второе уравнение: магнитных зарядов не существует
- третье уравнение: изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле
- четвертое уравнение: электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле

Всё, что вы изучали в школьной электродинамике, отражено в уравнениях Максвелла. Но вернёмся к нашей электростатике и поговорим о первом уравнении Максвелла.

Первое уравнение Максвелла

Это уравнение называют также ***теоремой Остроградского - Гаусса***.

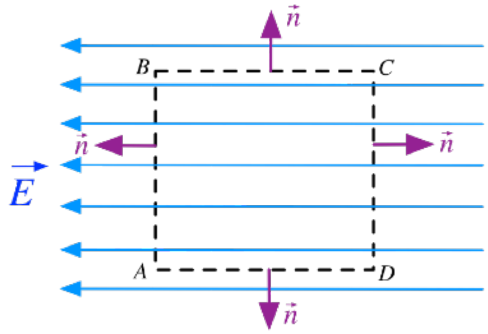
Вот это уравнение: $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q$. Сравним с тем, что мы получили выше: $\sum \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q$. Знак "$\oint_S$" (интеграл по поверхности S) как раз и означает наше суммирование - ничего страшного в этом знаке нет. *(Вектор $\vec{dS}$ трактуется как единичный вектор нормали $\vec{n}$, умноженный на площадь кусочка dS)*.

Уравнение это можно озвучить: Поток вектора напряженности электростатического поля $\vec{E}$ через ***произвольную*** замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную ε_0. *Для случая поля в вакууме*, об электростатическом поле в среде мы поговорим ниже.

Хоть это уравнение и было выведено на основании закона Кулона, но оно несёт гораздо более глубокий смысл. Поясню.
- уравнение ***напрямую связывет заряд с порождаемым им полем*** (потоком поля). Силы - вторичны. Это то, что мы хотели в самом начале нашей Истории.
- уравнение - векторное, трёхмерное.
- замкнутая поверхность, по которой мы считаем поток - произвольная. То есть - ***любая***. Мы её сами выбираем из соображений удобства для каждой задачи. Ещё раз скажу: эта поверхность - воображаемая, математическая.
- "попались" в выбранную поверхность заряды - есть ненулевой поток! Секундочку, а если в поверхность заряды "попались", но их алгебраическая сумма равна нулю? Да, тогда поток будет нулевым. Не "попались" в выбранную поверхность заряды - поток будет точно нулевым!
- ничего не сказано про заряды: точечные они или нет! Это не важно! Считай просто их алгебраическую сумму и получай величину потока.

С помощью первого уравнения Максвелла довольно просто считать электростатические поля самых разнообразных конфигураций и распределений зарядов.

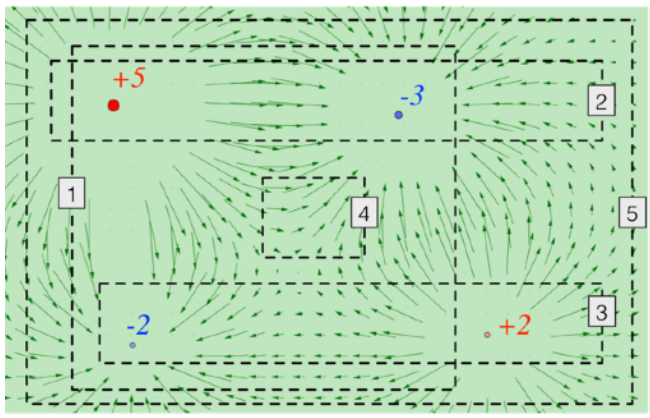
Давайте взглянем на рисунок. Будем рассматривать плоский случай - так проще рисовать картинки. Есть однородное (одинаковое по величине и направлению вектора напряженности во всех точках пространства) электростатическое поле $\overrightarrow{E}$. Выберем "двумерную поверхность" - квадрат $ABCD$ со стороной d, через которую посчитаем поток поля $\overrightarrow{E}$. Максвелл сразу же говорит, что поток этот будет равен нулю, поскольку в нашу поверхность не "попало" ни одного заряда. Но мы - ребята упёртые и всё хотим проверить сами. Как это, поле есть, а поток нулю равен?



Расставим на сторонах квадрата единообразно вектора нормалей $\overrightarrow{n}$: с внешней стороны квадрата наружу. Тогда для сторон квадрата BC и AD можно сказать, что угол между векторами нормалей и вектором $\overrightarrow{E}$ будет 90^0 и, следовательно, поток через эти стороны равен 0 ($cos 90^0 = 0$). На стороне AB угол между $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{E}$ равен 0^0 и поток равен $E \cdot d$. На стороне CD угол между $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{E}$ равен 180^0 и поток равен $-E \cdot d$. А в сумме - ноль. Как Максвелл и предупреждал. Ну что ж, проверили Максвелла.

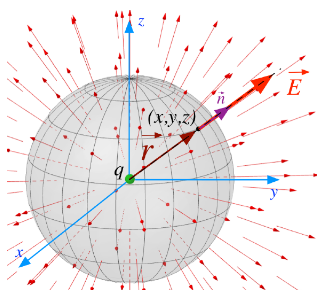
А вот такое упражнение: на картинке изображено результирующее электростатическое поле четырёх зарядов разной величины. Каков поток этого поля через "двумерные поверхности" прямоугольной формы, обозначенные цифрами:

- поверхность №1: поток равен нулю: сумма зарядов равна 0 (+5-3-2=0);
- поверхность №2: поток равен $\dfrac{+2}{\varepsilon_0}$: сумма зарядов равна +2 (+5-3=2);
- поверхность №3: поток равен нулю: сумма зарядов равна 0 (+2-2=0);
- поверхность №4: поток равен нулю: зарядов нет;
- поверхность №5: поток равен $\dfrac{+2}{\varepsilon_0}$: сумма зарядов равна +2 (+5-3-2+2=2).



Ещё раз скажу: ***поле в пространственной области поверхности может быть, а поток его через поверхность может равняться нулю!***

Хорошо. Но как нам быть вот в каком случае: представьте, что мы ничего не знаем про закон Кулона, а знаем только первое уравнение Максвелла как основу электростатики. Два вопроса: 1) как нам посчитать поле точечного заряда и 2) где в первом уравнении Максвелла кулоновские силы? Отвечаю по порядку.



Поле $\overrightarrow{E}$, исходя из первого уравнения Максвелла, рассчитывается в порядке, обратном тому, который мы использовали, когда "выводили" первое уравнение Максвелла из закона Кулона:

- из первого уравнения Максвелла имеем: $\oint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \cdot q$,

  где S - это сфера радиуса r.
- расписываем поток поля $\overrightarrow{E}$ через поверхность сферыи, пользуясь центральными симметриями сферы и поля, с лёгкостью приходим к знакомому выражению для $\overrightarrow{E}$.

Про силы. Все четыре уравнения Максвелла - ***полевые*** - они описывают поля (электрическое и магнитное), то есть то, что порождается зарядами и токами. Сила - это про то, как порождённое поле влияет на тело (другой заряд). Для сил в классической[3] электродинамике к четырём уравнениям Максвелла добавляется ещё *уравнение для обобщённой силы Лоренца*.

Обобщённая сила Лоренца - сила, с которой электромагнитное (и электрическое, и магнитное) поле действует на точечную заряженную частицу. Вот это уравнение: $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B})$ или $\overrightarrow{F} = q \cdot \overrightarrow{E} + q \cdot \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$. Первое слагаемое как раз и есть знакомая нам кулоновская сила. Ну а второе - тоже знакомая нам сила Лоренца из раздела "магнетизм". Обобщать так обобщать.

В случае одного лишь электростатического поля это уравнение выглядит до боли знакомо:
$$\overrightarrow{F} = q \cdot \overrightarrow{E}$$

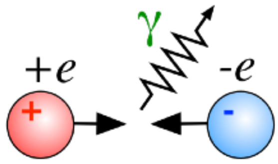
Так что же, электродинамика состоит из пяти уравнений? И всё? Нет, не всё. Есть ещё законы и принципы.

Закон сохранения электрического заряда

Для вновь прибывших: *электрический заряд - это физическая* ***скалярная*** *величина, определяющая способность тел быть источником электромагнитных полей и принимать участие в электромагнитных взаимодействиях.*

> Алгебраическая сумма зарядов электрически изолированной системы сохраняется!

Для электрически изолированной системы $\sum q_i = const$[4].



Вам знаком электрон - отрицательно заряженная элементарная частица с зарядом $-e$. У электрона есть анти-брат-близнец - позитрон - частица с точно такой же массой и прочими параметрами, но с положительным зарядом $+e$. Если рассмотреть электрически изолированную систему, в которой находятся только один электрон и один позитрон, то алгебраический суммарный заряд такой системы равен 0 ($e - e = 0$). Если электрон и позитрон столкнутся (провзаимодействуют или, как говорят, "аннигилируют"), то не останется ни электрона, ни позитрона, а вылетит в результате аннигиляции электрически нейтральная частица - фотон (его ещё называют гамма-квант). Сумма заряда всё равно останется нулевой. Это я к тому, что в электрически изолированной системе сами заряды могут исчезать и появляться, но они могут исчезать и появляться только попарно с противоположными зарядами так, чтобы ***алгебраическая сумма зарядов не изменилась***.

Закон сохранения электрического заряда столь же фундаментален, что и знакомые вам законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Электрический заряд - это такая же фундаментальная характеристика материи, как и масса.

Некоторая перефразировка закона сохранения электрического заряда звучит так:
"Не существует процесса, в котором можно затратить энергию и в результате создать заряд".

---

[3] *Существует ещё и релятивистская электродинамика, как результат распространения специальной теории относительности на классическую электродинамику.*

[4] *Это справедливо даже для квантовой механики, где происходит много непривычного.*

Принцип суперпозиций

Для электростатики этот принцип звучит так: *напряженность электростатического поля, создаваемого в данной точке системой зарядов, есть векторная сумма напряженности полей отдельных зарядов.*

Принцип суперпозиций - один из самых общих законов во многих разделах физики. В механике, например, он выражается в следующих эквивалентных знакомых нам формулировках:

- результат воздействия на частицу нескольких внешних сил есть векторная сумма воздействия этих сил;
- любое сложное движение можно разделить на два и более простых;
- энергия взаимодействия всех частиц в многочастичной системе есть просто сумма энергий *парных взаимодействий* между всеми возможными парами частиц.

Принцип суперпозиций - это не фундаментальный закон природы, а следствие ***линейности фундаментальных уравнений*** той теории, где он проявляется.

Принцип "я себя не чувствую"[5]

Это настолько очевидное и тривиальное утверждение (а может быть и нет?), что оно очень редко формулируется. Но чуть про него забыли - сразу возникают непонятки (смотри выше).

> ***заряд не взаимодействует с порождённым им электрическим полем***.
> ***масса не взаимодействует с порожденным ей гравитационным полем***.

Неустойчивое равновесие

Это - не закон и не принцип. Это доказанное с помощью математических методов положение. *Равновесие зарядов в электростатическом поле неустойчиво*: никакая комбинация любого числа зарядов не способна замереть в положении устойчивого равновесия в электростатическом поле в пустом пространстве - нужны механические ограничения (нужно, чтоб кто-то заряды "пальцем держал")!!!

Скорость распространения

Скорость распространения изменений (возмущений) электростатического поля (да и всех электромагнитных полей) в пространстве равна ***скорости света***. Максвелл доказал, Эйнштейн подтвердил.

==========

Напомню: на сегодняшний день физики признают наличие в природе ***четырех видов*** взаимодействия:

- гравитационное
- электромагнитное
- слабое ядерное
- сильное ядерное (последние два относятся к микромиру)

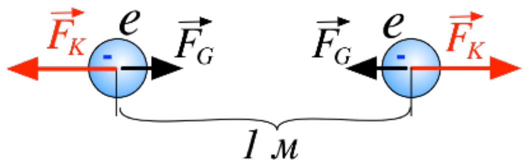
В нашем макро-мире действуют два вида взаимодействий:

- гравитационное: масса порождает гравитационное поле, которое воздействует на другие массы;
- электромагнитное: заряды (покоящиеся и движущиеся) порождают электромагнитное поле, которое воздействует на другие заряды.

---

[5] *Это весьма странно, но точного названия этого принципа я нигде не встречал.*

Кстати, вы обратили внимание на то, как похожи по форме закон Кулона $F = k \cdot \dfrac{q \cdot Q}{r^2}$ и закон всемирного тяготения $F = G\dfrac{m \cdot M}{r^2}$? Правда масса, в отличие от зарядов, может иметь только один знак - положительный. И массы "умеют" только притягиваться.



А давайте сравним кулоновскую и гравитационную силы, действующие на два электрона, разнесенные на один метр друг от друга. Заряд электрона $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг. Тогда кулоновская сила, действующая на каждый электрон (электроны будут отталкиваться из-за одинаковости знаков зарядов), равна $F_K = k \cdot e^2 = 2{,}3 \cdot 10^{-28} H$. Гравитационная сила притяжения двух электронов равна $F_G = G \cdot {m_e}^2 = 5{,}5 \cdot 10^{-71} H$. То есть кулоновская сила в $\simeq 4 \cdot 10^{43}$ раз (в *сорок миллионов триллионов триллионов триллионов раз*) (!!!) больше гравитационной. Этот факт является фундаментальным: на макро- и микро- уровне кулоновские силы (вообще - электромагнитные силы) доминируют над гравитационными; в космических масштабах - наоборот.

Гравитационное взаимодействие мы с вами рассмотрели в Истории про Гравитацию. Теперь мы рассматриваем второе (и последнее) фундаментальное взаимодействие в макро-мире - электромагнитное.

Кстати, из формы закона Кулона $F = k \cdot \dfrac{q \cdot Q}{r^2}$ возникает вопрос: а как ведут себя разные по знаку заряды, когда они сближаются на сверхмалые расстояния ($r \to 0$)? Ведь сила их притяжения стремится к бесконечности. Происходит большой "бу-бух"? На эти вопросы отвечает уже квантовая механика (аннигиляция электрона и позитрона тому примером).

Электрическое поле в среде

Ранее мы всё время делали оговорку, что рассматриваем электростатическое поле в вакууме. Так нам было проще писать уравнения.

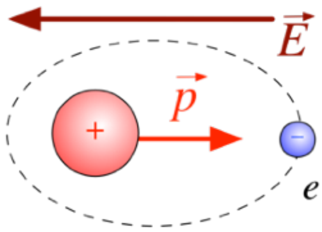
Но мы-то живём не в вакууме и хотелось бы понять - как ведёт себя электростатическое поле в среде (в воздухе, газах, жидкостях, твёрдых телах).

Ни для кого не секрет, что воздух, газы, жидкости и твёрдые тела состоят из молекул. А молекулы состоят из атомов. Молекулы и атомы без внешних воздействий электрически нейтральны. А атомы состоят из частей с электрическим зарядом: положительно заряженных ядер и отрицательных электронов. И внешнее электростатическое поле с этими заряженными частями и взаимодействует.

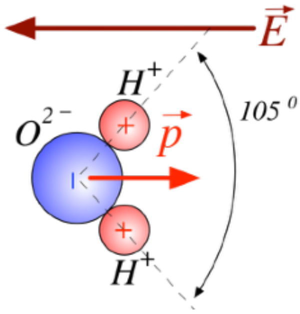
Разделим вещества на две большие группы: ***проводники*** и ***диэлектрики***.
Проводники - это вещества, в атомно-молекулярной структуре которых присутствуют свободные электроны. Это электроны, которые "оторвались" от своих атомов и свободно носятся по объёму вещества. Почему они оторвались? Оторвались они в результате теплового движения молекул вещества (колебаний атомов-молекул кристаллической решетки в твёрдых телах и столкновений-соударений атомов-молекул в жидкостях и газах). Причём оторвались не все электроны, а самые слабо-связанные с атомами. За счет свободных электронов проводники хорошо проводят электрический ток и хорошо передают тепло.

Ну а ***диэлектрики*** - это вещества, в структуре которых нет свободных электронов. Из-за этого они плохо проводят электрический ток и плохо передают тепло. Кстати, чистая вода (без примесей солей) - диэлектрик, плохо проводящий ток.

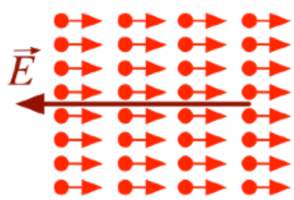
Электростатическое поле в диэлектриках



Рассмотрим молекулу простого одноатомного газа - например, гелия. При воздействии на него внешнего электростатического поля электрон на внешней орбите будет стремиться вправо (на рисунке), а положительно заряженное ядро будет стремиться влево. Нет, атом не разорвёт - это достаточно крепкая конструкция. Но это породит внутриатомное электростатическое поле с вектором напряженности $\vec{p}$ (его также называют *вектором поляризации*), направленным в противоположную сторону вектору $\vec{E}$. И из электрически нейтрального атом превратится в ***электрический диполь***.



Рассмотрим молекулу воды. Из-за своего пространственного строения молекула воды уже представляет собой ***электрический диполь***. Но из-за *хаотичной ориентации* векторов $\vec{p}$ молекул воды суммарное внутреннее электростатическое поле объёма воды равно нулю. Когда же появляется внешнее электростатическое поле $\vec{E}$, то вектора $\vec{p}$ всех молекул воды ориентируются так, как показано на рисунке.



В обоих случаях я описал процесс ***поляризации диэлектрика*** под действием внешнего электростатического поля - то есть порождение встречного внутреннего электростатического поля. В результате чего результирующее электростатическое поле в диэлектрике ***уменьшается***.

В среде электростатическое поле ослабляется!

Вот тут-то мы и вспоминаем про диэлектрическую проницаемость ε - физический коэффициент, показывающий во сколько раз электростатическое поле в среде меньше, чем это же поле в вакууме: $\varepsilon = \dfrac{E_0}{E_{cp}}$ $(\varepsilon \geq 1)$. Величина ε - табличная, является характеристикой вещества. Вот табличка для некоторых веществ.

Вещество	ε
Сегнетовая соль	6000
Стекло	5-16
Вода	81
Водяной пар	1,0126
Воздух	1,00057

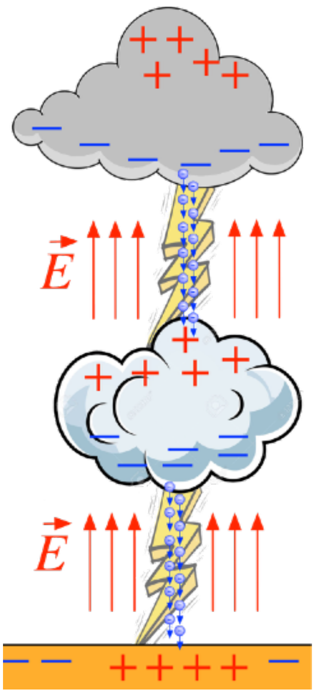
Для среды можно записать знакомые формулы вот так: Закон Кулона: $F = \dfrac{1}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{q \cdot Q}{r^2}$; величина электростатического поля точечного заряда: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^2}$. Да это вы и сами знаете. Я просто рассказал о поляризации и физике уменьшения поля в среде.

Вдумчивый ученик тянет руку: "А если внешнее электростатическое поле достаточно велико, то может ли оно оторвать электроны от атомов?"

Да, может. И это явление называется ***пробоем диэлектрика***: электростатическое поле отрывает электроны от атомов и увлекает их. Те, в свою очередь, сталкиваясь с другими атомами, выбивают из них новые электроны. Процесс нарастает лавинообразно. Возникает канал (***шнур пробоя***), по которому движется поток электронов.

Самой яркой иллюстрацией диэлектрического пробоя является *молния*.

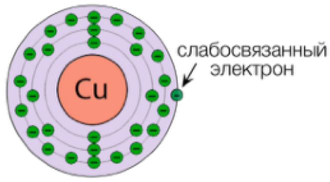
Грозовое облако - это огромное количество пара, часть которого сконденсирована в виде мельчайших капелек или льдинок. Эти льдинки находятся в постоянном движении, вызванном восходящими потоками теплого воздуха от нагретой поверхности земли. Мелкие льдинки легче, чем крупные, увлекаются восходящими потоками воздуха. Поэтому "шустрые" мелкие льдинки, двигаясь в верхнюю часть облака, все время сталкиваются с крупными. Каждое такое столкновение приводит к электризации. При этом крупные льдинки заряжаются отрицательно, а мелкие - положительно.



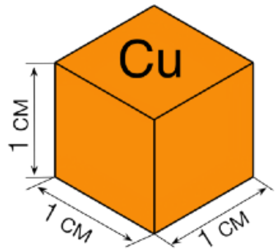
Электрическое поле тучи имеет огромную напряженность - около миллиона В/м. Когда большие противоположно заряженные области подходят достаточно близко друг к другу, происходит электрический пробой воздуха - молниевый разряд. Пробойный разряд происходит также между тучей и поверхностью земли. Напряженность поля для электрического пробоя воздуха $\simeq 4 \times 10^6$ В/м.
Во время этого разряда выделяется огромная энергия - до миллиарда Дж. Температура канала достигает 10 000 К, что и рождает яркий свет, который мы наблюдаем при разряде молнии.

Электростатическое поле в проводниках

Чем отличаются проводники от диэлектриков? Правильно, наличием свободных электронов. Вот они-то и определяют поведение проводников в электростатическом поле.



Лучшим проводником электрического тока считается серебро. Медь - на втором месте. Мы используем медные провода потому, что медь много дешевле серебра. Хорошая электропроводность (а также теплопроводность) меди объясняется структурой её атома. На внешней орбите атома меди (так называемой s-орбитали) "болтается" один слабо-притягиваемый к ядру электрон. Вот способность его легко отрываться от атома и объясняет хорошую электропроводность.



Заряд электрона $\simeq -1{,}6 \times 10^{-19}$ Кл. Количество атомов в 1 куб. м меди: $\simeq 8 \times 10^{29}$. На каждый атом меди приходится один электрон проводимости ("оторвавшийся" электрон). Следовательно в 1 сантиметровом кубике $\simeq 8 \times 10^{23}$ свободных электронов с общим зарядом $\simeq -1{,}3 \times 10^{5}$ Кл.

Много это или мало? Это очень-очень много.

Вот иллюстрация: Два заряда (один положительный, другой отрицательный) по $1{,}3 \times 10^{5}$ Кл каждый, расположенные в вакууме на расстоянии 1 метр, притягивались бы друг к другу с силой $\simeq 1{,}5 \times 10^{20}$ Н. С такой же бы силой притягивался к Земле (на поверхности Земли) груз массой ***15 миллионов миллиардов тонн** ($\simeq 15 \times 10^{15}$)*!!!

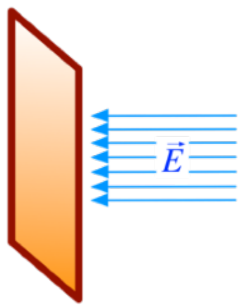
Справочно: масса земной атмосферы - ***5 миллионов миллиардов тонн** ($\simeq 5 \times 10^{15}$)*
масса горы Эверест - ***восемьсот миллиардов тонн** ($\simeq 8 \times 10^{11}$)*

Заряд всей Земли оценивается в -4×10^{5} Кл (Земля не является электрически нейтральной).

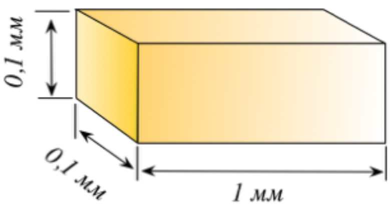
ой!

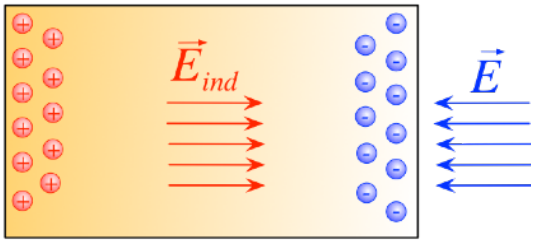
Эти огромные цифры - лишь отражение знаменитой эйнштейновской формулы: $E = m \cdot c^2$. Если применить эту формулу к 1-сантиметровому кубику меди, то мы получим $8 \cdot 10^{15}$ Джоулей (***8 миллионов миллиардов***). Это полная энергия связи: атомов в молекулярной решетке, электронов и ядер атомов, протонов и нейтронов в ядрах атомов, энергия связи кварков, образующих нейтроны и протоны, и т.д. Вот откуда такие цифры. Поэтому не стоит удивляться миллионам миллиардов миллиардов свободных электронов в сантиметровом кубике меди.

Электростатическая индукция



Продолжаем разговор об электростатическом поле в проводниках. Поместим во внешнее однородное электростатическое поле $\vec{E}$ медный лист толщиной 1 мм как показано на рисунке. Умозрительно вырежем из этого листа маленький параллелепипед и рассмотрим поведение электронов в нём. Положительно заряженные (поскольку один свободный электрон "сбежал") атомы меди "стоят" на своих местах в кристаллической решетке. До помещения во внешнее поле свободные электроны внутри этого параллелепипеда носились по всему его объёму и в целом заряд параллелепипеда равнялся нулю.





Но вот появилось внешнее электростатическое поле $\vec{E}$. Что происходит? Правильно, свободные электроны под действием этого поля устремились к правой стенке параллелепипеда. А положительно заряженные атомы меди продолжают стоять на месте. То есть происходит разделение зарядов: на правой стенке параллелепипеда возникает избыток отрицательного заряда (электронов), а в левой части параллелепипеда возникает избыток положительного заряда. А это значит что? Это значит, что возникает внутреннее электростатическое поле, направленное в сторону, противоположную внешнему. А каково оно по величине? А оно точно такое же по величине, что и внешнее. Ну посудите сами: до тех пор, пока внутреннее и внешние поля не сравняются, на электроны будет действовать сила, заставляющая их перемещаться. Сравнялись поля - возникло равновесие:

$$\vec{E}_{ind} = \vec{E}.$$

А это значит, что *внутри проводника напряженность электростатическоя поля равна нулю!!!*

Внутри проводника поле равно нулю!!!

Явлением ***электростатической индукции*** называют процесс возникновения собственного электростатического поля у проводника при помещении его во внешнее электрическое поле. Оно обусловлено перераспределением зарядов внутри проводника.

Замечания по нашему параллелепипеду.

- Положительно заряженные атомы меди "стоят" на своих местах в кристаллической решетке и никакое внешнее электростатическое поле физически их не перемещает к левой стенке. Просто на картинке я изобразил ***избыток положительного заряда*** у левой стенки за счет того, что все электроны "убежали" к правой стенке.
- Вырвать электроны за пределы проводника ***обычное*** электростатическое поле не может - электроны обладают энергией связи с кристаллической решеткой проводника. Сверхбольшие внешние поля это сделать могу, но мы сейчас о них не говорим.
- Да, электроны устремились к правой стенке под действием внешнего электростатического поля. Но электроны не высыпали всем гуртом на правую поверхность параллелепипеда. Ведь электроны друг от друга отталкиваются. Электроны образовали электронное облако у правой стенки. И каждый электрон в этом облаке находится в состоянии равновесия: электростатическая сила со стороны внешнего поля компенсируется суммарной электростатической силой отталкивания со стороны других электронов.

Заметьте, мы ничего ещё не сказали о величине напряженности внешнего электростатического поля $\vec{E}$. А давайте (каким бы оно ни было в начале) увеличим его в два раза. А давайте! Что произойдёт? А вот что. На электроны со стороны внешнего поля станет действовать в два раза бОльшая сила, электронное облако у левой стенки станет плотнее и внутреннее поле увеличится тоже в два раза для обеспечения равновесия. И опять результирующее поле в проводике станет равным нулю!

Давайте оценим, до какой величины внутреннее электростатическое поле проводника может противостоять внешнему.

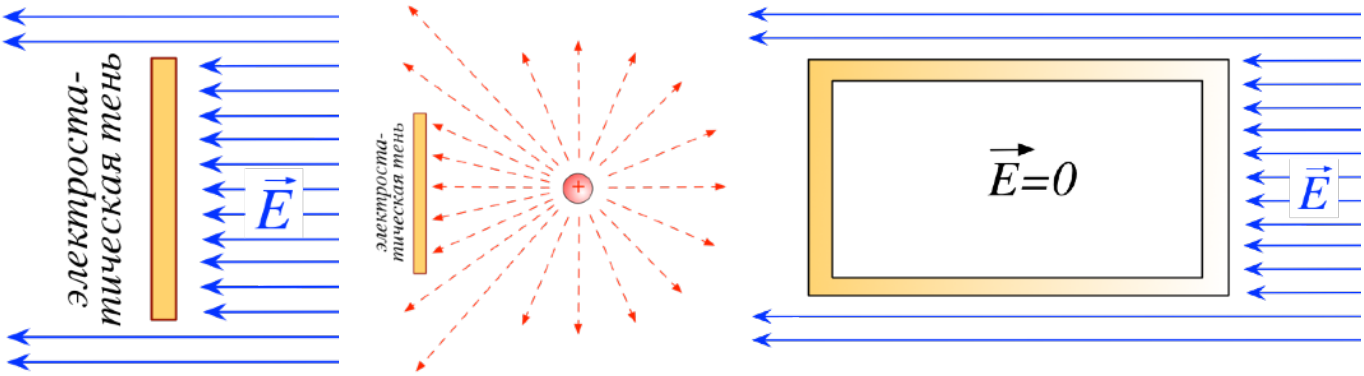
Объём нашего параллелепипеда 10^{-11} м³ (а площадь правой и левой стенок равна 10^{-8} м²). Значит в нём $\simeq 8 \times 10^{18}$ атомов меди и свободных электронов. Суммарный заряд атомов меди $\simeq 1{,}28$ Кл, а электронов - $\simeq -1{,}28$ Кл. Если предположить (чисто условно, для оценки), что все электроны "вылезли" на правую поверхность, а весь положительный заряд сконцентрирован на левой стенке, то ***плотность заряда*** на стенках равна по величине $\sigma \simeq 1{,}28 \times 10^{8}$ Кл/м².

Тогда по известной формуле (вы её наверняка помните): $E_{ind_{max}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ получаем

$E_{ind_{max}} = 14 \times 10^{18}$ В/м. Хорошо, давайте понизим нашу оценку в 1000 раз за счёт грубоватых допущений о распределении всех зарядов на стенках параллелепипеда. Но всё равно получим $E_{ind_{max}} = 14 \times 10^{15}$ В/м - величину запредельно большую, физически достижимую, быть может, лишь при взрыве нейтронных звёзд.

Из этого - вывод: *у проводников "хватает силёнок" (хватает свободных электронов) противостоять любым внешним электростатическим (а забегая вперёд, скажу - и всем электромагнитным) полям*.

Явление электростатической индукции в проводниках приводит к эффекту экранирования от электростатического поля. Вот примеры на рисунках.



Это явление используют для защиты электро-радио-приборов от вредного воздействия внешних электромагнитных полей. Защищаемый прибор помещают внутрь металлических заземлённых корпусов и сеток.

То есть: от электромагнитного поля возможно "спрятаться" - экранироваться. А от гравитационного (второго собрата по макро-взаимодействиям) - нет!

============

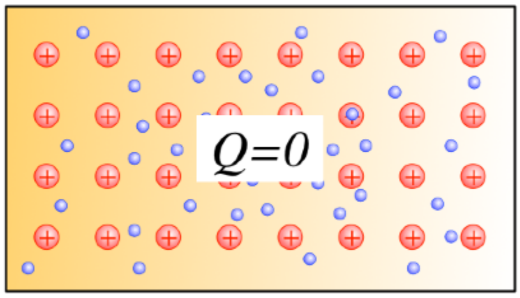
Электростатическое поле неточечных зарядов

Какого вида электростатические поля мы рассматривали до сих пор? По сути - двух видов: поле точечного заряда и однородное поле.

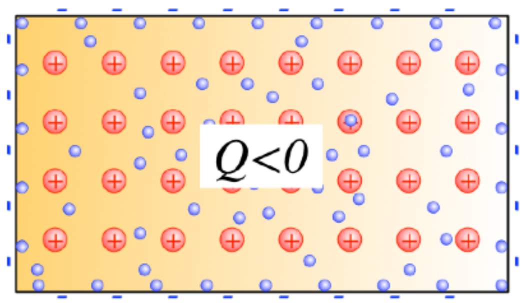
С полем точечного заряда всё понятно: оно создаётся точечными зарядами, оно центрально-симметрично, формулу для вектора его напряженности мы знаем. Понятие точечного заряда схоже по смыслу с понятием материальной точки в механике: объект, размерами которого в ***условиях данной задачи*** можно пренебречь. Физически такими объектами являются электроны, протоны, прочие заряженные частицы, "маленькие" шарики, капли.

Однородное поле - это удобная абстракция: ***что-то*** создало такое равномерное поле (и мы в рамках решаемой задачи не интересуемся ***что*** это такое) и мы им "пользуемся". Аналогией однородному электростатическому полю может служить однородное поле тяжести у поверхности Земли.

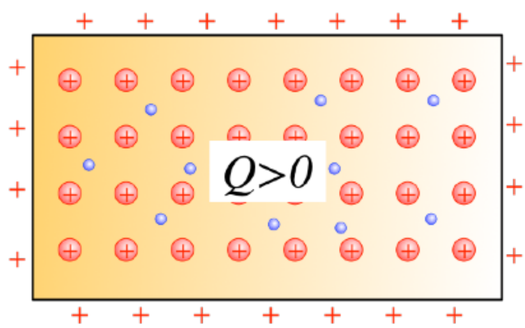
А какие электростатические поля создают заряженные неточечные физические тела? "Неточечные" - значит имеющие пространственные размеры. Перед тем, как об этом говорить, подумаем: что такое процесс электрического заряжания тела и как он протекает.



Давайте вспомним наш маленький медный параллелепипед. ***Никакого внешнего поля нет***. Положительно заряженные атомы меди "стоят" себе в узлах кристаллической решётки. Свободные электроны носятся по всему объёму параллелепипеда. Суммарный заряд параллелепипеда равен нулю. Всё симметричненько и равномерненько.



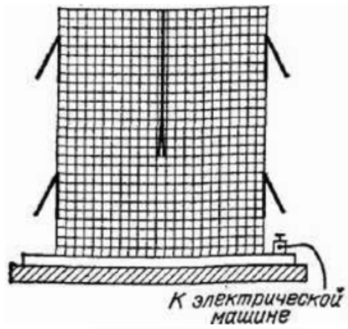
Но вот решили мы этот параллелепипед зарядить отрицательно. Что значит зарядить отрицательно? Это значит "насыпать" в параллелепипед порцию дополнительных электронов - другого пути нет. Как это сделать технически? Ну, например, коснуться параллелепипеда сильно отрицательно заряженным другим проводником. Электроны с другого проводника перетекут в параллелепипед, а мы этот другой проводник уберём. В числах и формулах мы этот процесс обсудим, когда будем говорить об электрической ёмкости тел. Итак, в нашем параллелепипеде появилось дополнительное число электронов общим зарядом $-Q$. Как они распределятся по параллелепипеду? Детальный анализ утверждает следующее: свои собственные "старые" электроны параллелепипеда будут заняты прежним делом: носиться по всему объёму и компенсировать своим отрицательным зарядом положительный заряд атомов меди. А вот "новые" электроны распределятся по поверхности параллелепипеда. Ведь электроны отталкиваются и норовят быть как можно дальше друг от друга. А как им стать как можно дальше друг от друга? Правильно, распределившись по поверхности параллелепипеда.



Но мы ещё подумали и решили зарядить наш параллелепипед положительно (из нейтрального состояния, когда $Q = 0$). Что значит зарядить положительно? Это значит "отобрать" у параллелепипеда порцию своих "родных" электронов - только так. Как это сделать? Да почти так же: коснуться параллелепипеда сильно положительно заряженным другим проводником. Часть "родных" электронов "убежит" на другой проводник и мы этот другой проводник уберём. Итак, в нашем параллелепипеде - избыток положительного заряда. Как он распределится? Да аналогично - на поверхности параллелепипеда.

Я так подробно об этом говорю, чтобы сформулировать: *избыточный заряд (положительный или отрицательный) распределяется по поверхности заряженного тела (проводника или диэлектрика).*

Прекрасной иллюстрацией этого факта является изобретенная в 1836 году английским физиком Майклом Фарадеем так называемая "клетка Фарадея": цилиндр из хорошо проводящей металлической сетки. Сетка эта заряжалась от электрической машины. При этом бумажные листочки на внешней поверхности цилиндра отклонялись в сторону, что свидетельствовало о наличии заряда на ней. Листочки на внутренней поверхности цилиндра не отклонялись - заряда там не было.



Клетка Фарадея

Ну а коли мы говорим о заряженных телах, имеющих пространственные размеры, то для нас важна не только величина заряда Q на этих телах, но и величина ***поверхностной плотности заряда*** $\sigma = \dfrac{Q}{S}$ [Кл/м²], где S - площадь (внешней) поверхности заряженного проводника.

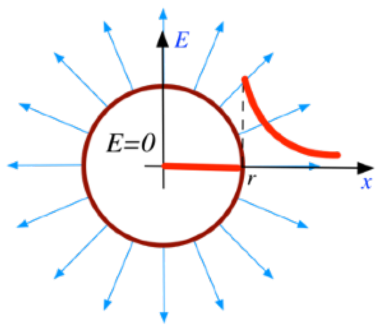
Тела в примерах заряжены положительно для определенности. При отрицательном заряде все направления силовых линий меняются на противоположные.

Электростатические поля некоторых тел

Рассмотрим электростатические поля некоторых тел. ***Никаких внешних полей нет***. Всё рассматривается происходящим в вакууме ($\varepsilon = 1$). Я приведу результаты вычисления напряженности полей. Все они достаточно легко получаются из теоремы Остроградского - Гаусса. В институте вы этим займётесь. Заметьте, что все тела, о которых будем говорить, обладают разными видами симметрий.

Поле полой заряженной сферы радиуса r

Пусть эта сфера заряжена положительным (для определённости) зарядом q. Тогда электростатическое поле ***вне сферы*** (и на её поверхности) равно: $E = \dfrac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{x^2}$, где $x \quad (x \geq r)$ - расстояние от центра сферы. А вот ***внутри сферы поля нет*** $(E = 0)$!!!



То есть вне сферы поле такое же, как и от точечного заряда q, помещенного в центр сферы. Сфера обладает центральной симметрией и порождаемое ей поле обладает такой же центральной симметрией. Внутри сферы поля нет ***не из-за электростатической индукции*** (она тут вообще не при чём)! Чуть ниже я к этому вернусь.

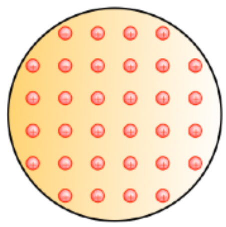
Поле однородно заряженного шара радиуса r

Однородно заряженный шар - всё внутреннее пространство шара равномерно (с одной и той же объёмной плотностью) заряжено.

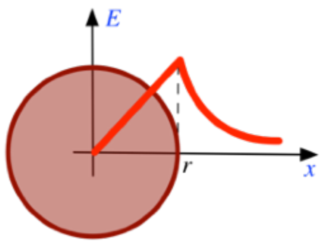
"Э-э-э, дядя," - скажет мне вдумчивый ученик. "Не далее как страницу назад вы объясняли нам, что весь заряд, которым заряжено тело, "высыпает" на его поверхности. А тут "однородно заряженный по объёму шар". Нестыковочка, однако."

Секундочку.

Давайте уточним. И концентрацией заряда на поверхности, и явлением электростатической индукции проводники обязаны наличию свободных электронов. Их много. Очень много (триллионы триллионов). И пока они в проводнике есть, всё будет происходить так, как я рассказывал.



А давайте себе представим (чисто гипотетически) медный шар, из которго *удалили все электроны*. Как это сделать технически я, честно говоря, и не представляю. Помимо того, что такой шар будет обладать очень большим зарядом (выше мы прикидывали порядки цифр) и притягиваться (отталкиваться) со страшной силой к другим зарядам, весь его положительный заряд будет равномерно распределен по объёму (положительно заряженные атомы меди остаются в узлах кристаллической решетки, а электронов - увы - нет). Так и давайте считать однородно заряженный шар - экзотикой. Чисто для упражнения мозгов.

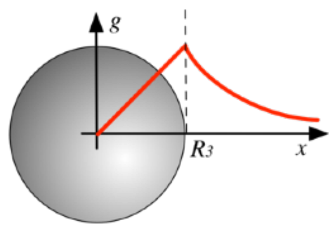


Так вот, электростатическое поле однородно заряженного шара радиуса r с общим зарядом q будет выражаться так:

внутри шара: $x < r$: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r^3} \cdot x$ - поле ***растет линейно***;

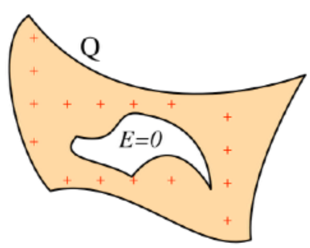
вне шара: $x \geq r$: $E = \dfrac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{x^2}$ - поле такое же, как и от точечного заряда q, помещенного в центр шара. Поле такого шара обладает центральной симметрией.

Стоп-стоп-стоп! А вам это ничего не напоминает? Правильно, вдумчивый ученик. Напоминает. Помните, в Истории про Гравитацию мы решали задачу: "*Определите величину ускорения свободного падения в шахте на глубине h от поверхности Земли*."



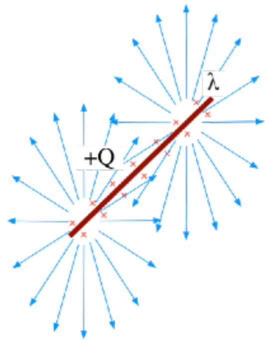
И пришли к двум выводам: 1) внутри материальной сферы её собственное гравитационное поле отсутствует; 2) зависимость величины g от расстояния от центра Земли изображена на графике.

Ой, как похоже! И похоже это вот по какой причине: и в Законе Кулона и в Законе Всемирного Тяготения сила обратно пропорциональна квадрату расстояния ($\sim \dfrac{1}{x^2}$). И чисто математически это приводит к полученным выводам.



Скажу больше: ***электростатического поля нет внутри любой полости заряженного тела!***

Поле заряженной нити

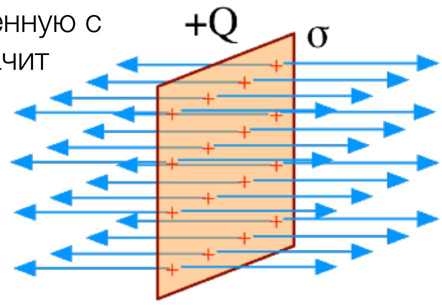


Представим себе бесконечно длинную прямую нить, заряженную с линейной плотностью λ [Кл/м].

Электростатическое поле: $E = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\lambda}{x}$, где x - расстояние до нити.

Нить обладает осевой симметрией и порождаемое ей поле обладает такой же осевой симметрией.

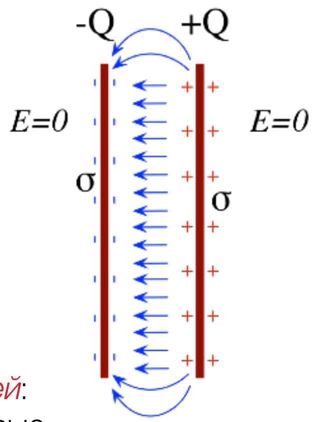
Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости



Представим себе бесконечную плоскость, равномерно заряженную с плотностью заряда σ. Плоскость заряжена положительно, значит все положительные заряды будут находиться на её поверхности - то есть с обеих сторон плоскости.

Электростатическое поле такой плоскости: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ - поле симметрично и ***равномерно***!!!

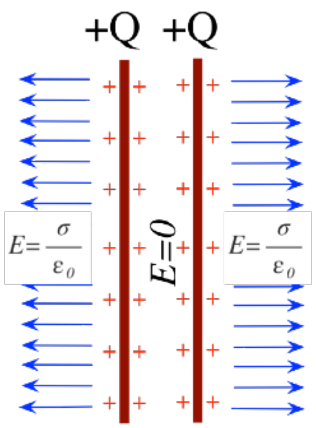
Поле двух равномерно заряженных плоскостей



Представим две параллельные равномерно заряженные с плотностью σ плоскости: одна заряжена положительно, другая - отрицательно.

Электростатического поля вне этих плоскостей нет!!!

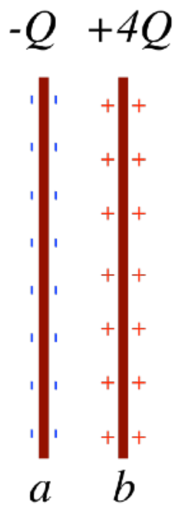
Электростатическое поле между этими плоскостями: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ - поле равномерно. Результирующее поле является *суперпозицией двух полей*: каждого поля отдельной пластины. По краям пластин возникают краевые эффекты - поле становится неравномерным, силовые линии изгибаются. В задачах обычно полагают, что расстояние между пластинами (плоскостями) много меньше их линейных размеров и краевые эффекты не учитывают. Эта конструкция и эта формула нам пригодятся, когда мы будем говорить о конденсаторах.



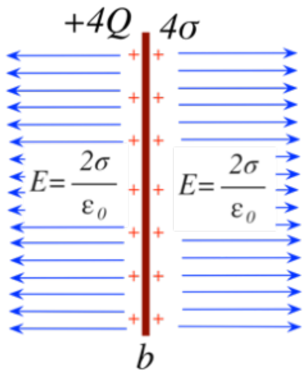
А как будет выглядеть поле двух параллельных равномерно заряженных плоскостей с плотностью σ и зарядом одного знака? Рассматриваем каждую из пластин отдельно и равнодействующее поле определяем из принципа суперпозиций. Вот результат на рисунке. Чаще в задачах встречаются разноименно заряженные плоскости.

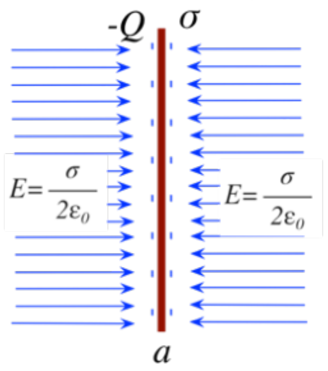
А что-то мы совсем не решали ещё задачек. Давайте восполним пробел.

Задача: Опишите поле в области двух одинаковых параллельных пластин (расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров): одна заряжена зарядом $-Q$ (плотность заряда σ), а другая - зарядом $+4Q$.



Решение: Ничего сложного. Если левая пластина (a) с зарядом $-Q$ имеет поверхностную плотность заряда σ, то правая пластина (b) с зарядом $+4Q$ имеет плотность заряда 4σ (пластины одинаковые). Рассмотрим каждую пластину со своим электростатическим полем отдельно - на рисунке слева эти поля разрисованы и расписаны величины напряженности полей.





Результирующее поле найдём из принципа суперпозиций как векторную сумму полей отдельных пластин.

Величина поля между пластинами равна:

$E = \dfrac{2\sigma}{\varepsilon_0} + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{5\sigma}{2\varepsilon_0}$ (направлено влево).

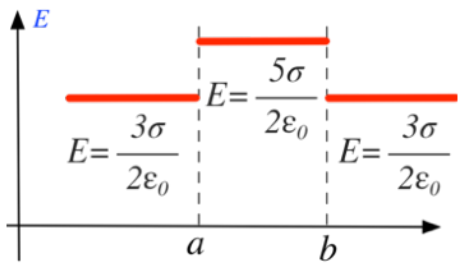
Поле слева от пластины a равно: $E = \dfrac{2\sigma}{\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$

(направлено влево).

Поле справа от пластины b равно: $E = \dfrac{2\sigma}{\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$

(направлено вправо).

Вот результат на графике:

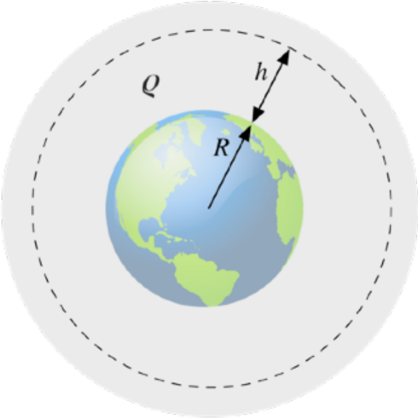


Мы по сути рассмотрели электростатические поля двух видов: поле точечного заряда и поле бесконечной заряженной плоскости.

- Поле точечного заряда полностью описывается законом Кулона. Это поле центрально-симметрично. Изменение вектора напряженности (и других характеристик поля) происходит одинаково по всем направлениям - это поле ***изотропно***. Для этого поля можно выделить две характерные точки: "точка ноль" - точка, в которой находится сам заряд, и "точка бесконечность" - удалённая на бесконечное расстояние точка, в которой поле уже не действует. Аналогом электростатического поля точечного заряда можно считать гравитационное поле Земли (или планеты), описываемое законом всемирного тяготения.
- Поле бесконечной заряженной плоскости - равномерно, то есть одинаково во всех точках - нет ни выделенных направлений, ни выделенных точек. Аналогом можно считать равномерное поле силы тяжести у поверхности Земли.

И точечный заряд, и бесконечная плоскость являются физическими идеальными объектами. Реальные объекты всегда имеют конечные размеры. Просто в условиях конкретных задач реальные объекты можно приближенно считать идеальными.

Задача: Напряженность электрического поля у поверхности Земли равна $E_0 = -130$ В/м (знак минус показывает, что вектор напряженности направлен к центру Земли). На высоте h=0,5 км она равна $E_1 = -50$ В/м. Вычислить объёмную плотность ϱ электрических зарядов в атмосфере, считая, что она до высоты h постоянна.



Решение: Земля сама по себе обладает зарядом и создаёт электростатическое поле. Земля окружена слоем атмосферы с объёмной плотностью заряда ϱ. У поверхности Земли поле создаётся только зарядом Земли (поскольку точка на поверхности Земли находится ***внутри сферы*** атмосферного заряда ⇒ поле атмосферного заряда равно нулю): $E_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}$, где Q, R - заряд и радиус Земли. На высоте h поле создаётся зарядом Земли и зарядом слоя атмосферы толщины h (заряд более высоких слоев атмосферы не влияет, поскольку эти высокие слои - внешние).

$E_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{(R+h)^2} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{(R+h)^2}$, где q - заряд слоя атмосферы толщины h. Из геометрии $q = \varrho \cdot \dfrac{4}{3}\pi\left[(R+H)^3 - R^3\right]$. Откуда:

$$E_1 = E_0\frac{R^2}{(R+h)^2} + \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\cdot h\cdot(1 + \frac{R}{R+h} + \frac{R^2}{(R+h)^2}).$$

Получаем $\varrho \approx +1{,}4\cdot 10^{-12}$ Кл/м³ (*обратите внимание на знак*).

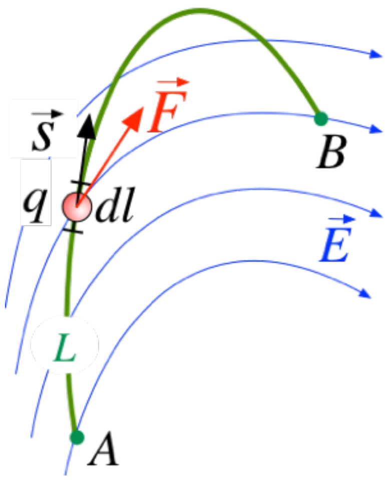
Итак, мы рассмотрели важные вопросы. Подведём промежуточные итоги:

- вся электродинамика описывается: четырьмя уравнениями Максвелла; уравнением обобщенной силы Лоренца; законами и принципами;
- электростатическое поле - это векторное поле, описываемое первым уравнением Максвелла;
- математическим образом электростатического поля является математическое векторное поле, а инструментом описания и анализа его - математический векторный анализ;
- напряженность электростатического поля $\vec{E}$ - *силовая* характеристика;
- электростатическое поле в среде ведёт себя по-разному - зависит от среды;
- принцип суперпозиций - мощный метод анализа и синтеза полей;
- ищите симметрию в задаче - она сильно помогает.

================

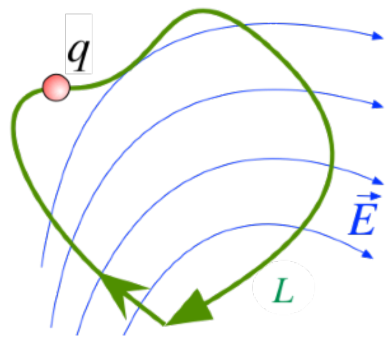
Работа в электростатическом поле

Коли на заряд в электростатическом поле со стороны поля действует кулоновская сила, то эта сила заряд может перемещать, а значит - совершать работу. А там, где работа, там и энергия. Поговорим об *энергетических характеристиках электростатического поля*.



Пусть у нас имеется положительный заряд q в электростатическом поле $\vec{E}$. Пусть заряд наш под действием электростатического поля перемещается по некоторой кривой L из точки A в точку B. Как можно посчитать работу, которую при этом совершает электростатическое (неоднородное) поле? Достаточно просто. Бьём кривую L на множество маленьких кусочков dl, таких маленьких, что в пределах этих кусочков кулоновская сила, действующая на наш заряд, постоянна (мы примерно так же поступали, когда считали поток векторного поля через произвольную поверхность). Теперь считаем элементарную работу на кусочке dl в виде $dA = F \cdot dl \cdot cos\alpha$, где α - угол между вектором кулоновской силы и вектором перемещения заряда. Всё как обычно. А посчитав все элементарные работы по кривой L, мы можем их сложить и получить полную работу электростатического поля по кривой L между точками A и B. Математически "по-взрослому" это записывается как $A_{AB} = \int_L \vec{F} \cdot \vec{dl}$, где знак интеграла "$\int_L$" как раз и означает суммирование элементарных работ по всей кривой L. Так, как это изображено на картинке, при перемещении положительного заряда из точки A в точку B электростатическое поле совершит положительную работу - косинус α везде положителен. Хорошо. А давайте теперь переместим наш заряд ***по той же самой кривой L в обратном направлении*** - между точками B и A. Да, нам наверняка придётся при этом как-то дополнительно механически действовать на заряд - ведь электростатическое поле будет противиться такому направлению перемещения. Но нам сейчас не важна работа, которую совершают "дополнительные механические силы", - нам важно посчитать работу, которую при таком перемещении совершит электростатическое поле. Опять бьём кривую L на кусочки dl и опять так же считаем элементарные работы. Численно элементарные работы на каждом кусочке dl будут совпадать с ранее посчитанными, но вот знак у них будет отрицательный - косинус угла между вектором кулоновской силы и вектором перемещения заряда будет отрицательным. Поэтому и полная работа электростатического поля по кривой L между точками B и A будет отрицательной и равной $A_{BA} = -A_{AB}$. А значит полная работа электростатического поля при перемещении заряда по кривой L по маршруту *A-B-A* равна нулю!

Более того,



Работа сил электростатического поля по ***любому замкнутому контуру равна нулю***!

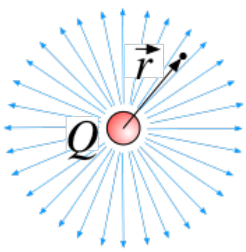
А вот последнее утверждение приводит нас к обсуждавшимся ранее важным энергетическим соображениям[6]. Повторю их, но уже в приложении к электростатическому полю.

- силы электростатического поля (кулоновские силы) - ***консервативны***. Их работа определяется только начальным и конечным положением заряда и не зависит от траектории его движения в поле.
- для электростатического поля можно ввести понятие потенциальной энергии. Работа сил электростатического поля происходит за счет изменения его потенциальной энергии.

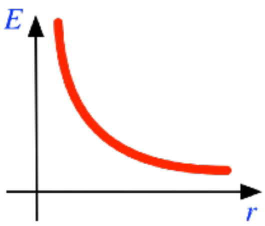
Потенциал электростатического поля

Как нам в школе объясняли понятие "потенциал электростатического поля"? Во как: "потенциал электростатического поля - это скалярная энергетическая характеристика электростатического поля, характеризующая потенциальную энергию, которой обладает единичный положительный пробный заряд, помещённый в данную точку поля".

Ладно, "скалярная энергетическая характеристика" - это понятно: энергия - это скаляр. Но "... потенциал ... характеристика ... характеризующая потенциальную энергию" - пощадите детские мозги от ваших кривых определений, товарищи составители школьной программы. И опять этот "единичный положительный пробный заряд"! Единичный - это, я полагаю, 1 Кулон. А знаете, какой величины заряд приходит на Землю, когда в неё ударяет средняя по силе молния? 10-20 Кл. Так что пробный заряд в 1 Кл это очень много и надо очень напрячься, чтобы его получить. Короче, "школьное" определение потенциала кривовато и совершенно неприменимо на практике.



Но мы-то с вами уже "взрослые мальчики" и хотим пройти логичным путём по дорогам электростатики. Вот и пойдём. Рассмотрим электростатическое поле одиночного положительного точечного заряда Q. Привычная нам модель центрально-симметричного электростатического поля. Как определить напряженность E в точке, удалённой на расстояние r от заряда?



Правильно: $E = k \cdot \dfrac{Q}{r^2} \quad (k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0})$. Куда направлен вектор $\vec{E}$ мы прекрасно понимаем - по радиусу от заряда. Знакомая вам зависимость - на картинке. Ничего нового я пока не сказал. А вот теперь скажу.

Потенциал вводится как ***математическая связка*** с напряженностью электростатического поля: $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$. И эта формула справедлива для ***всех*** электростатических полей. $\dfrac{d\varphi}{dr}$ - производная, выражает *скорость приращения потенциала в данном направлении*.

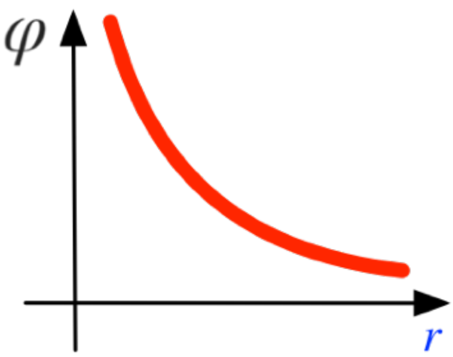
[6] *Смотри Истории про Гравитацию, Законы Сохранения и Термодинамику.*

Вот в таком способе задания потенциала электростатического поля есть своя глубокая логика:

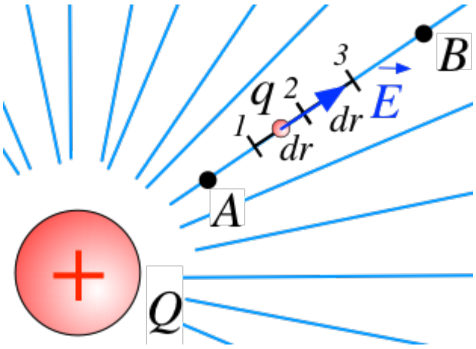
- мы умеем представлять электростатическое поле как векторное математическое поле и умеем описывать его на языке векторного анализа;
- первое уравнение Максвелла вводит напряженность $\overrightarrow{E}$ как основную характеристику электростатического поля;
- напряженность $\overrightarrow{E}$ - силовая характеристика электростатического поля;
- коли нам потребовалась энергетическая характеристика электростатического поля (а она потребовалась, поскольку обнаружился консервативный характер кулоновских сил), то логичней всего привязать эту энергетическую характеристику к основной - напряженности $\overrightarrow{E}$;
- такой способ задания потенциала - исключительно практичный: коль с помощью первого уравнения Максвелла мы можем рассчитывать все электростатические поля, то определение потенциала - дело чисто математическое. И не надо таскать с собой в кармане "положительный пробный заряд в 1 кулон".

Вдумчивый ученик: "А зачем минус в определении?" Секундочку, чуть позже.

Так, а коли мы такие логичные, то неплохо было бы напрямую выразить величину потенциала. Для поля одиночного положительного точечного заряда Q из $E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$ и $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ имеем: $-\frac{d\varphi}{dr} = k \cdot \frac{Q}{r^2}$, откуда $\varphi = k \cdot \frac{Q}{r} + C$ (просто проинтегрировали по r). Константа C выскочила в результате интегрирования. Но у неё есть свой физический смысл. Подставим в последнюю формулу $r = \infty$ и получим $\varphi(\infty) = C$. То есть C - это потенциал электростатического поля в бесконечности. Ну а бесконечность на то и бесконечность, чтобы считать, что там нет никаких полей. Поэтому полагают, что $C = 0$. Вот теперь понятно зачем минус в связке потенциала с напряженностью: он компенсирует минус, возникающий в результате интегрирования по r. *Но у минуса есть ещё более важный смысл* - об этом чуть позже. В итоге: $\varphi = k \cdot \frac{Q}{r}$. График зависимости потенциала поля ***одиночного положительного точечного*** заряда Q от расстояния до заряда - на рисунке - обычная гипербола (у напряженности - квадратичная гипербола).



Потенциал измеряется в *вольтах* [В]. Сейчас я вам покажу в чём достоинство применения потенциалов. Вернёмся к электростатическому полю одиночного положительного точечного заряда Q. Перед нами стоит задача переместить положительный заряд q из точки А в точку В и посчитать работу, совершенную при этом электростатическим полем. Опять, как и раньше, бьём весь путь от А до В на маленькие кусочки длиной dr, внутри которых поле считаем постоянным. Рассмотрим такой маленький кусочек dr между точками 1 и 2. По определению потенциала для этого кусочка можно записать: $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ (E - напряженность поля внутри кусочка). А теперь перепишем это уравнение вот так: $E \cdot dr = -d\varphi$. Но $d\varphi$ - это приращение потенциала между точками 2 и 1, то есть $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.



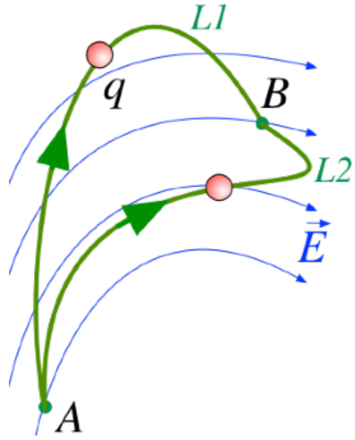
Важно помнить: Приращения ***всегда*** *считается по принципу "стало" - "было". Мы двигались из точки 1 в точку 2, поэтому* $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Тогда: $E \cdot dr = -(\varphi_2 - \varphi_1)$. Умножим обе части этого уравнения на величину нашего перемещаемого заряда q: $q \cdot E \cdot dr = -q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$. Но $q \cdot E$ - это кулоновская сила, действовавшая на наш заряд q, пока его "перетаскивали" из точки 1 в точку 2. Но эта кулоновская сила, помноженная на расстояние dr, *и есть работа электростатического поля* при переносе заряда из точки 1 в точку 2! Поэтому $A_{12} = -q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$. Пока без чудес.

Точно так же мы посчитаем работу электростатического поля при переносе заряда из точки 2 в точку 3: $A_{23} = -q \cdot (\varphi_3 - \varphi_2)$. А полная работа при переносе заряда из точки 1 в точку 3 чему равна? Правильно: $A_{13} = A_{12} + A_{23}$. А теперь подставим и получим: $A_{13} = -q \cdot (\varphi_3 - \varphi_1)$. Ой! Куда-то делся потенциал φ_2! Вот чудеса! Получается, что работа A_{13} от него не зависит? Правильно! Более того, если мы последовательно посчитаем все элементарные работы на пути от точки А до точки В, то получим: $A_{AB} = -q \cdot (\varphi_B - \varphi_A)$. Работа зависит только лишь от потенциалов начальной и конечной точек!

А вот теперь вернёмся к знаку минус в определении потенциала. В рассмотренном нами примере при переносе заряда q из точки А в точку В электростатическое поле совершило положительную работу - вектора перемещения и кулоновской силы совпадали по направлению. А скажите, где потенциал больше - в точке А или в точке В? Ну, судя по формуле $\varphi = k \cdot \dfrac{Q}{r}$ и по графику потенциала $\varphi_B < \varphi_A$ и $\varphi_B - \varphi_A < 0$. Поэтому минус и приводит формулу в соответствие: электростатическое поле одиночного положительного точечного заряда совершает положительную работу, перемещая положительный заряд q в сторону уменьшения потенциала.

И уже окончательно можно обобщить *для всех видов* электростатических полей: $A_{AB} = -q \cdot (\varphi_B - \varphi_A)$ и не зависит от пути, по которому заряд перемещался в поле. Мы, по сути, несложными выкладками подтвердили консервативный характер кулоновских сил.



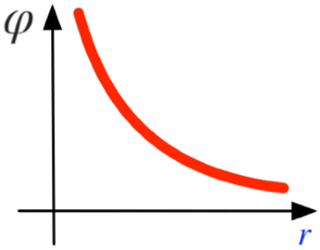
Поэтому вычисление работы электростатического поля при перемещении заряда сводится к определению разности потенциалов в конечной и начальной точках. А это гораздо проще, чем считать $A_{AB} = \displaystyle\int_L \vec{F} \cdot \vec{dl}$.

Важные замечания:

- ещё раз скажу: формула $A_{AB} = -q \cdot (\varphi_B - \varphi_A)$ справедлива ***для всех видов электростатических полей*** (а не только электростатического поля одиночного положительного точечного заряда, которое мы использовали для примера ввиду его простоты и понятности);
- изменение знаков зарядов (как создающего поле, так и перемещаемого) формул не меняют, ***алгебраические значения зарядов***, подставляемые в формулы, сами определят знак результата;
- вектор напряженности направлен в сторону уменьшения потенциала;
- электрическое поле существует, если существует разность потенциалов;

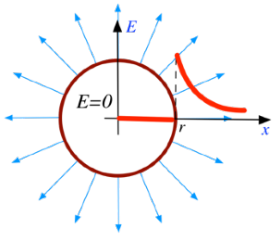
- для расчета работ и энергий важен не сам потенциал, а ***разность потенциалов*** в двух точках (или в двух состояниях системы). Сам потенциал - величина относительная (помните константу C?). *Разность потенциалов - величина абсолютная и не зависит от выбора нуля потенциала!!!*
- принцип суперпозиции полей распространяется и на потенциалы: потенциал электростатического поля в данной точке равен ***алгебраической сумме*** потенциалов присутствующих в этой точке полей (*нулевой потенциал всех присутствующих полей должен быть общим!!!*): $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n$

Потенциалы полей некоторых тел

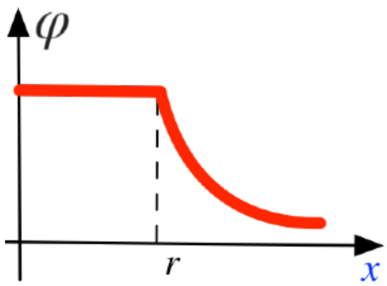


С потенциалом электростатического поля ***точечного положительного заряда*** мы подробно разобрались выше.

Напомню: $\varphi = k \cdot \dfrac{Q}{r}$. За ноль потенциала принимается потенциал в бесконечно удалённой точке.

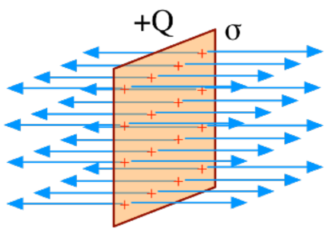


Потенциал поля ***полой заряженной сферы*** радиуса r. Мы помним, что внутри сферы напряженность поля равна нулю. А снаружи сферы напряженность такая же, как и у поля точечного заряда. Поэтому потенциал будет выглядеть так:

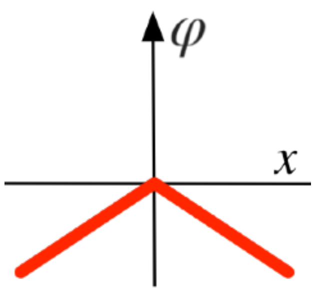


$$\begin{cases} \varphi = k \cdot \dfrac{Q}{r} = const, & x \leq r \\ \varphi = k \cdot \dfrac{Q}{x}, & x > r \end{cases}.$$

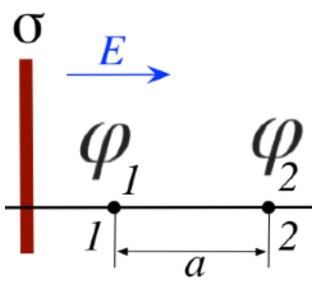
За ноль потенциала принимается потенциал в бесконечно удалённой точке.



Потенциал поля ***бесконечной равномерно заряженной плоскости*** с плотностью σ. Как мы помним, такая плоскость создаёт однородное симметричное поле с напряженностью $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Какую точку принять за точку с нулевым потенциалом? Да любую (выделенных нет)! Примем за ноль потенциала точку, лежащую на плоскости. Тогда потенциал будет выглядеть так: $\begin{cases} \varphi = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}x, & x \geq 0 \\ \varphi = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}x, & x < 0 \end{cases}$. На графике:

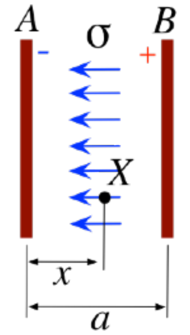


А вот если мы захотим посчитать разность потенциалов двух точек, отстоящих друг от друга на расстоянии a (причем не важно на каком расстоянии они находятся от плоскости - поле ведь однородно!), то

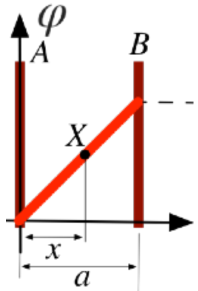


получим формулу: $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\sigma \cdot a}{2\varepsilon_0}$ (надо помнить, что $\varphi_1 > \varphi_2$, поскольку потенциал уменьшается в направлении вектора напряженности).

Разность потенциалов между ***двумя параллельными равномерно разноименно заряженными плоскостями*** с плотностью σ. *Поля вне этих плоскостей нет!!! Поле между плоскостями:* $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. *Вектор напряженности направлен от плоскости с положительным зарядом к плоскости с отрицательным зарядом.*



Перед тем, как считать потенциалы, надо договориться, что мы принимаем за нулевой потенциал. В таких конструкциях за ноль обычно принимают потенциал отрицательно заряженной плоскости (пластины): $\varphi_A = 0$. Очевидно, что потенциал положительно заряженной плоскости (а также любой точки между плоскостями) будет больше φ_A (потенциал уменьшается в направлении вектора напряженности).



Тогда потенциал плоскости B будет $\varphi_B = \dfrac{\sigma \cdot a}{\varepsilon_0}$ (a - расстояние между плоскостями), а потенциал любой точки между пластинами, отстоящей от пластины A на расстоянии x: $\varphi_X = \dfrac{\sigma \cdot x}{\varepsilon_0}$.

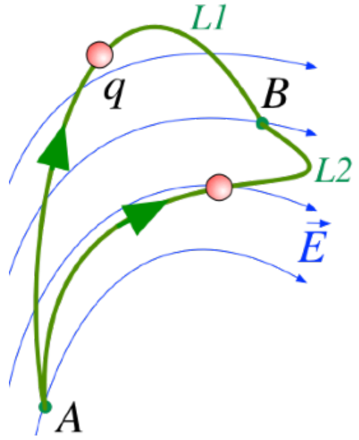
Потенциал электростатического поля и потенциальная энергия заряда

Мы обсуждали ранее, что потенциальная энергия присутствует в любой системе, где может быть совершена работа, которая до сих пор не совершена. К электростатическому полю это относится в полной мере. Мы также помним, что потенциальная энергия - это ***энергия положения*** тела (заряда, массы) относительно источника поля. Потенциальная энергия зависит от выбора системы координат (от выбора нуля потенциальной энергии). Но ведь когда мы вычисляли потенциал поля точечного заряда, мы тоже получили после интегрирования значение потенциала с точностью до константы ($\varphi = k \cdot \dfrac{Q}{r} + C$).

Исходя из этого, потенциал электростатического поля и потенциальную энергию заряда в электростатическом поле связывают определением:

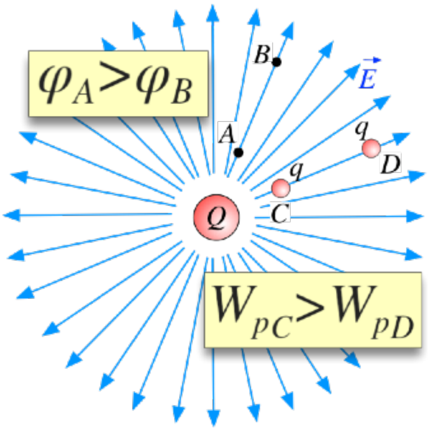
> ***Потенциал электростатического поля*** - это скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии заряда в поле к этому заряду: $\varphi = \dfrac{W_n}{q}$.
>
> Потенциал - это скалярная энергетическая характеристика *ПОЛЯ!!!*. *Ни от какого заряда q он не зависит.* А потенциальная энергия заряда в поле - это энергетическая характеристика *ЗАРЯДА!!!* в поле и от q она зависит.

Тогда потенциальную энергию заряда в поле можно выразить как $W_n = \varphi \cdot q$. И эта энергия трактуется как работа внешних сил по переносу заряда q из бесконечности (тем самым мы задаем ноль потенциальной энергии - в бесконечности) в данную точку поля.



Формулу для работы можно записать так:

$$A_{AB} = -(W_{pB} - W_{pA}) = -q \cdot (\varphi_B - \varphi_A)$$

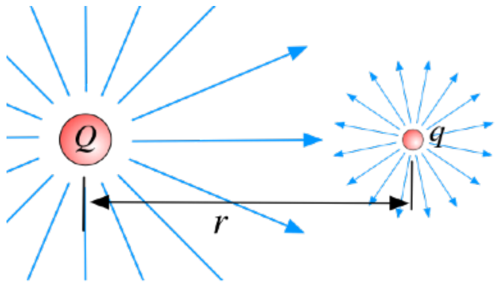


На картинке я попытался изобразить:

- соотношение между потенциалами в разных точках поля точечного заряда Q как энергетическими характеристиками ***самого поля***;
- соотношение между потенциальными энергиями заряда q, помещенного в разные точки поля точечного заряда Q, как энергетическими характеристиками ***заряда*** q.

Мы рассмотрели систему "электрическое поле - заряд" и определили потенциальную энергию этого заряда (q) в этом поле. В такой системе заряд Q, создавший поле, не участвует. Он создал поле и на этом его функция закончена. Когда мы рассматриваем систему "поле-заряд", мы не задаёмся вопросом какой заряд это поле породил - положительный или отрицательный, точечный или нет. Нам дано поле в виде вектора напряженности и закона его изменения.

Но в физике можно рассматривать любые системы в зависимости от решаемой задачи.



А давайте рассмотрим систему "заряд - заряд": мы помещаем на расстоянии r друг от друга два положительных заряда Q и q. В такой системе заряд Q создает свое поле и им воздействует на заряд q, а заряд q создает свое поле и им воздействует на заряд Q. Чем система "заряд - заряд" отличается от предыдущей системы "электрическое поле - заряд"? Правильно, тем, что мы включили оба заряда в систему и будем рассматривать в ней взаимодействие ***обоих зарядов***.

Поясню на аналогии с силой тяжести. Когда мы говорим, что потенциальная энергия камня массы m в поле тяжести Земли у её поверхности равна mgh, где h - высота положения камня над поверхностью, то мы рассматриваем систему "гравитационное поле Земли - камень". Когда мы говорим, что не только Земля своим гравитационным полем воздействует на камень, но и камень своим гравитационным полем (пусть даже очень маленьким) воздействует на Землю, то мы уже рассматриваем систему "Земля - камень".

Вернемся к нашей системе "заряд - заряд". Мы поместили эти заряды на расстоянии r друг от друга и удерживаем их. Если мы их отпустим, то они разлетятся (оба положительны и отталкиваются). Значит, удерживая их, мы запасаем в системе "заряд - заряд" *потенциальную энергию взаимодействия двух зарядов*. Как её посчитать?

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов: $W_p = k \cdot \dfrac{q \cdot Q}{r}$

Если мы отпустим эти заряды, то они начнут разлетаться и их потенциальная энергия взаимодействия начнёт переходить в механическую кинетическую энергию. А мы можем посчитать скорость, которую будут иметь эти заряды в бесконечности (когда перестанут влиять друг на друга своими электростатическими полями)? Конечно можем, мы ведь уже опытные физики! Пусть m и M - массы зарядов q и Q. Из закона сохранения энергии вытекает: $k \cdot \dfrac{q \cdot Q}{r} = \dfrac{M \cdot V^2}{2} + \dfrac{m \cdot v^2}{2}$ - потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов перешла в их кинетическую энергию в бесконечности (v, V - скорости зарядов в

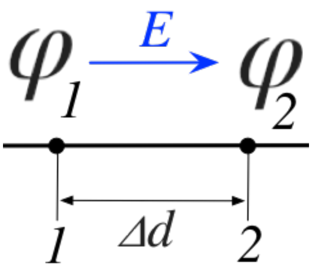
бесконечности). А из закона сохранения импульса получим связку для скоростей:
$0 = M \cdot V + m \cdot v$.

Вернемся к формуле потенциальной энергии взаимодействия двух зарядов: $W_p = k \cdot \frac{q \cdot Q}{r}$.
Если знаки зарядов одинаковы, то потенциальная энергия положительна и наоборот.
Если бы мы попытались решить аналогичную задачку для разноименно заряженных зарядов, то у нас бы ничего не получилось: заряды бы стали притягиваться, сближаться и при $r \to 0$ у нас появились бы в расчётах бесконечности. При $r \to 0$ классическая электродинамика уже не работает - надо пользоваться методами квантовой механики (помните пример про аннигиляцию электрона и позитрона?).

> Потенциальную энергию взаимодействия любых заряженных тел системы можно посчитать. Потенциальную энергию любого заряженного тела в поле можно посчитать.
> Почувствовали разницу между "потенциальной энергией заряженного тела в поле" и "потенциальной энергией взаимодействия заряженных тел"? Разница в том, какую систему мы рассматриваем: "поле-заряд" или "заряд-заряд".

Важные замечания:
- ещё раз: потенциал - это скалярная энергетическая характеристика ***ПОЛЯ!!!***
- потенциал относителен (его величина зависит от выбора нуля потенциала); разность потенциалов - абсолютна и ***не зависит*** от выбора нуля;
- если в задачах электростатики приходится рассматривать именно потенциал, то за точку отсчета нуля потенциала принимают:
    - потенциал бесконечно удаленной точки поля - для систем зарядов, поле которых убывает обратно пропорционально расстоянию (квадрату расстояния) - пример: поле одиночного заряда;
    - потенциал отрицательно заряженной плоскости (пластины конденсатора) - для систем с однородным полем;
    - потенциал Земли - для систем с заземлением.
- потенциальная энергия заряда в поле - энергетическая характеристика *ЗАРЯДА* в поле;
- положительный заряд в поле стремится переместиться из точки с более высоким потенциалом в точку с более низким потенциалом, а отрицательный - наоборот.

Напряжение электростатического поля



Вспомним недавно разобранную ситуацию: во внешнем электростатическом поле $\vec{E}$ заряд q переносится из точки 1 в точку 2. Работа сил поля считается как $A_{12} = -q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = -q \cdot \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ - разность потенциалов поля, считающаяся по принципу "стало" - "было".

Вводится новая величина - напряжение: $U_{12} = -\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ *[Вольт]*. И тогда работа будет считаться как $A_{12} = q \cdot U_{12}$.

Никакого нового физического смысла напряжение (по сравнению с разностью потенциалов) не несёт, просто оно позволяет избавиться от минуса в формуле работы. Ну хоть за это ему спасибо! Просто запомните, что *когда мы движемся из точки 1 в точку 2* $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. Соответственно, $U_{12} = -U_{21}$.

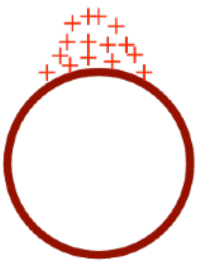
Понятие напряжения очень хорошо "прижилось" в электростатике и прочих "электрических" разделах физики. Так что уважайте его!

А если вернуться еще на два шага назад и вспомнить формулу $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$, то получим

$E = \dfrac{U}{\Delta d} \quad (d \to 0)$ в общем случае.

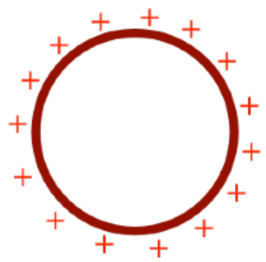
- А для однородного электростатического поля так и вообще просто: $U = E \cdot \Delta d$.

Эта формула очень важна в задачах с однородными полями!



Эквипотенциальные поверхности

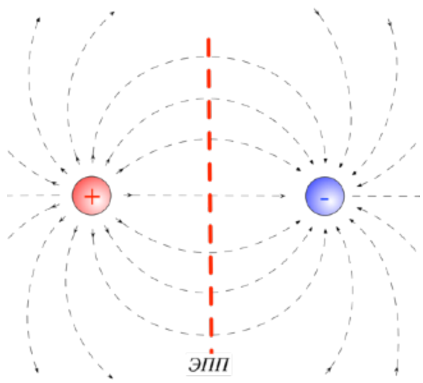
Давайте себе представим полую медную сферу с нулевым зарядом. На "макушку" этой сферы "насыпем" кучку положительных зарядов. Что произойдёт? Ну как "что"? Заряды положительные, друг от друга



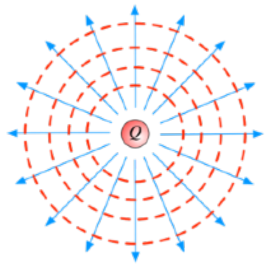
отталкиваются. Потолкаются-потолкаются и в итоге равномерно расположатся на внешней поверхности сферы (мы уже обсуждали это: избыточный заряд располагается на внешней поверхности проводника). Это верно, но хотелось бы уточнить слово "равномерно". Попробуем. Потолкавшись, заряды займут равновесное положение: для каждого заряда суммарная внешняя сила станет равной нулю. А коли для каждого заряда суммарная внешняя сила равна нулю, то и суммарное внешнее поле тоже равно нулю! Но из $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$ следует, что $d\varphi = 0$. То есть потенциал поверхности всей нашей сферы будет одинаков (кстати, он будет одинаков и внутри сферы - мы это обсуждали)! Вот что значит "равномерно". И это при внимательном рассмотрении понятно: если бы на поверхности сферы были хотя бы две точки с разными потенциалами суммарного электростатического поля, то это поле "постаралось" бы перетащить положительные заряды в точку с наименьшим потенциалом. Но этого не происходит - заряды "успокоились" и находятся в равновесии.

Поверхности с равными потенциалами называются эквипотенциальными поверхностями - ЭПП.

Такой эквипотенциальной поверхностью является поверхность нашей сферы. Более того, поверхность любого проводника эквипотенциальна. Но ЭПП может быть и воображаемая поверхность, на которой все точки имеют равный потенциал. Примером тому является поле положительного и отрицательного зарядов. Плоскость, располагающаяся посередине между зарядами, является эквипотенциальной - посчитайте потенциалы результирующего поля на этой плоскости и убедитесь, что они равны.



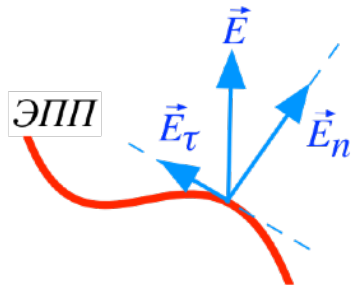
А ЭПП поля точечного заряда являются концентрические сферы.



Нахождение и использование ЭПП может быть очень элегантным и полезным подспорьем при рассмотрении систем зарядов.

ЭПП обладает двумя замечательными свойствами:

- работа при перемещении заряда вдоль ЭПП не совершается (ну да, коль $d\varphi = 0$, то и $A = 0$);
- вектор напряженности поля $\vec{E}$ перпендикулярен к ЭПП в каждой её точке.

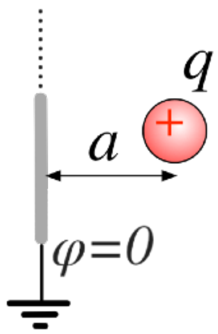


Последнее утверждение надо пояснить. Представим некоторую ЭПП. Разложим вектор напряженности поля $\vec{E}$ в некоторой точке на нормальную (перпендикулярную к ЭПП) и тангенциальную (по касательной плоскости к ЭПП) составляющие. Если тангенциальная составляющая $E_\tau \neq 0$, то и $d\varphi \neq 0$ в этом направлении и поле будет стараться совершить работу. Но это не так по условию. Значит $E_\tau = 0$ и вектор напряженности поля $\vec{E}$ перпендикулярен к ЭПП.

И ещё одно важное соображение надо сформулировать. К нему мы пришли, когда насыпали на "макушку" сферы кучку положительных зарядов.

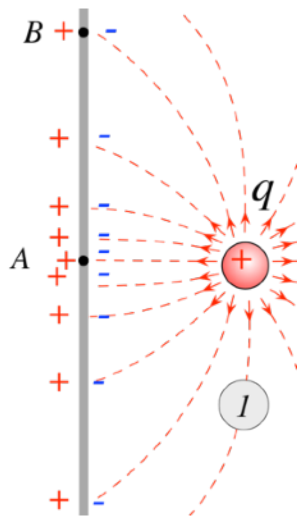
> При контакте заряженных проводников переход зарядов между ними происходит до тех пор, пока их (проводников) потенциалы не станут равными.

Давайте порешаем задачки, а то что-то мы много говорим о теории.



Задача[7]: Найдите силу, с которой заземленная проводящая плоскость действует на положительный точечный заряд q, находящийся от нее на расстоянии *a*.

Решение: Хорошая задачка - есть о чём порассуждать "физически". Здесь речь идет об электростатическом взаимодействии точечного заряда q *с плоскостью*. Плоскость - это не точечный заряд. Как же нам поможет закон Кулона?

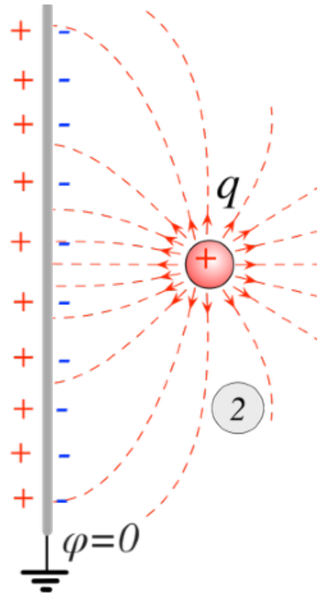


Начнем с обязательной фразы: заряд q создает электростатическое поле. Это поле можно представить радиально расходящимися силовыми линиями и величина напряженности этого поля на расстоянии r от заряда определяется как $E = k \cdot \dfrac{q}{r^2}$. Плоскость - проводящая. Значит в ней есть много свободных электронов, хаотично "болтающихся" внутри объёма плоскости при отсутствии внешнего электрического поля. Давайте рассмотрим случай, когда плоскость не заземлена, и к ней поднесли положительный точечный заряд q (рис. 1). Поле заряда будет действовать на свободные электроны плоскости. Поскольку заряд q положительный, а заряд электронов отрицательный, то электроны будут притягиваться к заряду q. Эти электроны сосредоточатся на правой поверхности

[7] *Эту задачку мы решали в Истории про Силы. Но она хороша по смыслу и не грех повторить.*

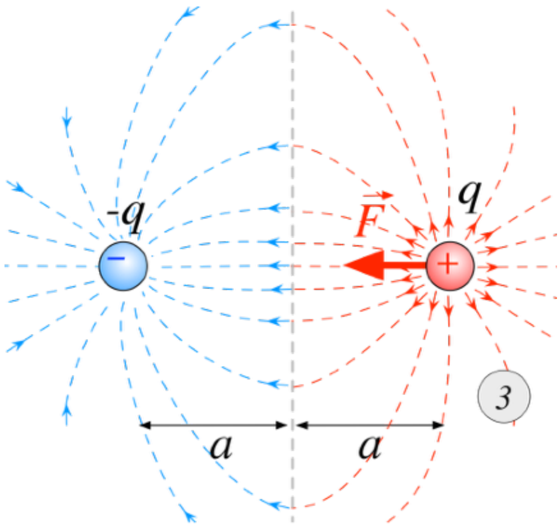
плоскости (совсем вылететь из объёма плоскости им не даёт электростатическое притяжение к положительно заряженным ионам кристаллической решетки). А поскольку расстояние от заряда q до точки А плоскости - меньше, чем расстояние до любой другой точки, то и сила притяжения в точке А будет максимальной. Электроны будут стремиться к точке А, но силы электростатического отталкивания между электронами будут их уравновешивать. То есть концентрация электронов в точке А будет больше, чем концентрация электронов в точке В. Поскольку все электроны плоскости будут стремиться к правой поверхности плоскости, то на левой поверхности возникнет избыток положительного заряда. То есть внутри плоскости возникнет неоднородное (поскольку неоднородна концентрация зарядов) электростатическое поле. Это - ***электростатическая индукция***. Результирующее электростатическое поле (от наложения поля точечного заряда q и поля плоскости) и изображено на рис. 1. Да, очень похоже, что заряд q будет притягиваться к плоскости, но ничего сказать о величине этой силы притяжения мы не можем (закон Кулона нам не помощник - он про точечные заряды). Это я всё говорю милые очевидности, которые всем должны быть понятны.

А теперь заземлим плоскость. Что значит заземлить плоскость? Это значит электрически подключить её к гигантскому проводнику по имени Земля. Электрический заряд Земли в целом равен нулю. Но в Земле есть огромное количество свободных электронов. По проводку заземления электроны могут перемещаться: как с плоскости на Землю, так и наоборот. После заземления электроны между плоскостью и Землей перераспределятся так, что потенциалы поверхностей Земли и плоскости выравняются (электроны - свободные, любое неравенство потенциалов ведет к их перераспределению вплоть до выравнивания потенциалов). То есть поверхность плоскости превратится в ***эквипотенциальную*** поверхность, электроны на правой поверхности плоскости распределятся равномерно, поле внутри плоскости станет однородным.



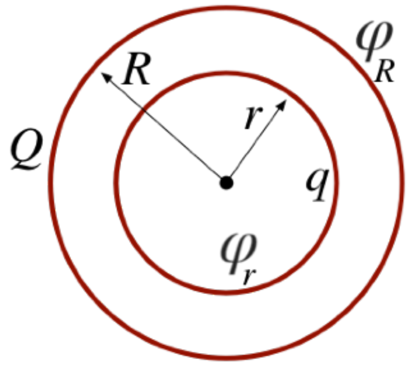
Изменится и результирующее электростатическое поле (от наложения поля точечного заряда q и поля плоскости) и станет таким, как показано на рис. 2: линии напряженности этого поля станут перпендикулярны правой эквипотенциальной поверхности плоскости в точке вхождения этих линий в плоскость (свойство эквипотенциальных поверхностей).

А вот теперь - очень хитрый ход, который позволит решить задачу. Давайте рассмотрим поле двух зарядов: q и $-q$, расположенных друг от друга на расстоянии $2a$ (никакой проводящей заземленной плоскости нет) (рис. 3). Из соображений симметрии можно сделать любопытный вывод: картина электростатического поля, в котором находится наш заряд q, будет в этом случае точно такая, как и в случае с наличием проводящей заземленной плоскости (рис. 2). А следовательно и силы, действующие на заряд q будут одинаковы.
А уж посчитать силу, действующую на точечный заряд q со стороны точечного заряда $-q$ мы можем легко по закону Кулона: $F = k\dfrac{q^2}{4a^2}$.



То есть мы заменили систему "точечный заряд q - плоскость" на систему "точечный заряд q - точечный заряд $-q$" и обосновали эквивалентность такой замены.

- В этом и состоит *метод зеркального изображения зарядов*: поиск эквивалентного зеркального (фиктивного) заряда (системы зарядов), упрощающего расчет электростатических полей.



Задача - расчет потенциалов сфер. Сфера радиуса r, которой сообщен заряд q, окружена концентрической тонкостенной проводящей сферической оболочкой радиуса R, заряд которой равен Q. Определите потенциалы сфер φ_r (внутренней) и φ_R (внешней).

Решение.
А) Потенциал на поверхности внутренней сферы φ_r складывается из двух потенциалов: внешней сферы φ_1 и собственно внутренней сферы φ_2 (принцип суперпозиций).
Потенциал **внешней** сферы φ_1 в каждой точке ее **внутреннего** объема одинаков и равен потенциалу на ее поверхности: $\varphi_1 = k\dfrac{Q}{R}$

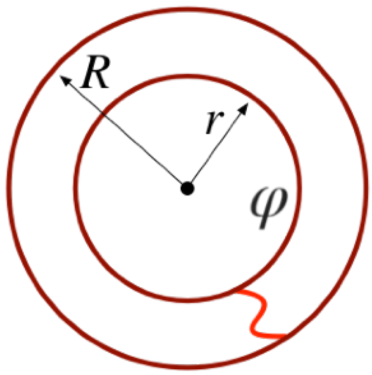
Потенциал **внутренней** сферы φ_2 определяется известным соотношением: $\varphi_2 = k\dfrac{q}{r}$

Общий потенциал на поверхности внутренней сферы равен: $\varphi_r = \varphi_1 + \varphi_2 = k\cdot\left(\dfrac{Q}{R} + \dfrac{q}{r}\right)$

Б) Потенциал на поверхности внешней сферы также складывается из двух потенциалов: внутренней сферы φ_1' и собственно внешней сферы φ_2'.
Потенциал **внутренней** сферы φ_1' на расстоянии R от ее центра определяется известным соотношением: $\varphi_1' = k\dfrac{q}{R}$.

Потенциал **внешней** сферы φ_2' на ее поверхности: $\varphi_2' = k\dfrac{Q}{R}$

Тогда общий потенциал на поверхности **внешней** сферы равен: $\varphi_R = \varphi_1' + \varphi_2' = k\dfrac{(Q+q)}{R}$



Задача - потенциалы, перетекание зарядов. Металлический шар радиуса r, заряженный до потенциала φ, окружают тонкой сферической проводящей оболочкой радиуса R. Определите потенциал шара φ_1 после того, как он будет соединен проводником с оболочкой. Первоначальный заряд оболочки равен нулю, центры оболочки и шара совпадают.

Решение: До соединения проводником заряд шара был $q = \dfrac{\varphi\cdot r}{k}$

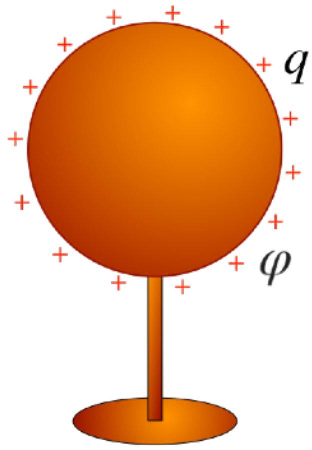
После соединения часть заряда с шара перетекло на оболочку. Ток прекратился в тот момент, когда потенциал шара стал равен потенциалу оболочки. Удобнее поэтому искать не потенциал шара, а равный ему потенциал внешней оболочки. В соответствии с результатами предыдущей задачи этот потенциал определяется выражением: $\varphi_1 = k\dfrac{q_1+q_2}{R}$, где q_1 и q_2 — заряды шара и оболочки после соединения их проводником. По закону сохранения заряда $q = q_1 + q_2$. После несложных преобразований получаем: $\varphi_1 = \varphi\dfrac{r}{R}$.

Электрическая ёмкость уединённого проводника

Нам уже не раз приходилось заряжать проводник зарядами и рассматривать поле, которое в результате порождается. Но ещё мы не пытались ответить на довольно очевидный вопрос: а до какого заряда можно зарядить вот этот конкретный проводник? Сколько "зарядиков" на нём может разместиться? Это напоминает мне вопрос, которым я мучился в детстве. Вот представьте, на столе стоит сахарница с сахарным песком. У вас в руках чайная ложечка. Вы её чуток облизываете и засовываете в сахарницу (пока мама не видит). Вопрос: сколько сахарных песчинок прилипнет к ложечке? От чего это количество зависит? Ну, во-первых, от площади поверхности ложечки (понятно, что к здоровой суповой прилипнет больше песчинок, но её и облизывать тяжелее). Во-вторых, от того, насколько "густо" вы её облизали. И ещё я заметил вот что: на ложечке с острым носиком на этом самом носике налипает меньше сахаринок, чем на её ровной поверхности. От геометрии, короче. Так вот, электрическая ёмкость - примерно об этом, только о зарядах вместо сахаринок.

Когда мы говорим об электрической ёмкости, то мы говорим о проводниках, имеющих ненулевые геометрические размеры. Не о точечных зарядах.

Давайте рассмотрим *уединенную* медную сферу. "Уединенную" в том смысле, что вокруг этой сферы нет никаких внешних электростатических (да и других электромагнитных) полей. Они могут помешать нам в нашем умозрительном опыте. Стоит себе такая сфера на изолирующей подставочке где-то посередине Вселенной и в начальном состоянии не несет на себе никакого заряда. Договоримся, что за ноль потенциала принимаем потенциал в бесконечности от нашей сферы: $\varphi_\infty = 0$. Поскольку сфера в исходном состоянии не несет заряда, то и её потенциал равен нулю.



А теперь, как и в предыдущем опыте, давайте насыпем на "макушку" нашей сферы кучку положительных зарядов величиной q. Как и ранее, заряды распределятся по внешней поверхности сферы равномерно. Поверхность сферы станет эквипотенциальной с потенциалом φ. Ничего нового. А если заряд удвоить, то как изменится потенциал сферы? Чуть подумав, можно утверждать, что потенциал тоже удвоится. Ну действительно, сферу с зарядом $2q$ можно рассматривать как две сферы с зарядом q (и потенциалом φ), расположенные в одной точке пространства. А по принципу суперпозиций потенциалы можно складывать, поэтому суммарный потенциал будет 2φ. То есть ***заряд и потенциал пропорциональны***. А что за коэффициент пропорциональности у этой зависимости? Вот, мы подошли к сути вопроса.

Электрической ёмкостью *(далее будем просто говорить "ёмкость")* *УЕДИНЁННОГО* проводника называют величину: $C = \dfrac{q}{\varphi} \quad (\varphi_\infty = 0).$

Емкость измеряется в *фарадах [Ф]: 1Ф=1 Кл/1 В.*

Емкость уединенного проводника связывает заряд проводника и его потенциал (является тем самым коэффициентом пропорциональности, о котором мы говорили выше). Емкость зависит от геометрии проводника и от диэлектрической проницаемости среды, в которую он помещён (от материала проводника не зависит). Емкость не зависит ни от заряда, ни от потенциала. Емкость - это свойство проводника.

Чем больше ёмкость проводника, тем меньше меняется потенциал при изменении заряда.

Легко посчитать (так легко, что я даже намекать не буду как - сами разберитесь), что для проводящей сферы радиуса r в вакууме ёмкость выражается как $C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot r$.

Легко сообразить, что в случае проводящего шара ёмкость будет считаться так же.

Емкость Земли равна 700 мкФ (микрофарад). Уединенная сфера ёмкостью 1 Ф должна иметь радиус в 13 радиусов Солнца. 1 фарада - это большая ёмкость.

Математика позволяет посчитать емкость уединённых проводников любой формы. Но школьные задачи оперируют только с уединёнными проводящими сферами и шарами. Поэтому на них и остановимся.

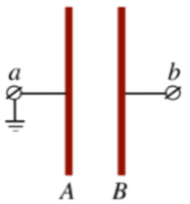
> *Но понятие ёмкости уединенного проводника не отвечает на вопрос "каков максимальный заряд можно разместить на уединённом проводнике?" Понятие ёмкости не про это. Классическая электродинамика вообще не ограничивает величину максимального заряда. Ограничения возникают из квантовой механики. Ограничения могут возникать из-за электростатического пробоя (о нём мы говорили выше) среды, в которую помещен уединённый проводник. Так что вопрос "сколько сахаринок прилипнет к облизанной ложке?" остаётся открытым.*

Если проводник не уединен, то потенциал, который он приобретает при сообщении ему заряда, зависит от его формы и присутствия других проводников. Это происходит из-за явления электростатической индукции.

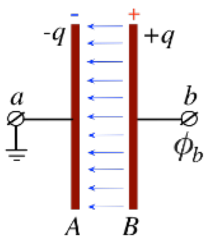
Конденсаторы

По мере продвижения исследований зарядов возникла задача их накапливать и сохранять. Так возникла идея конденсатора. Конденсаторы нашли настолько широкое применение, что в современных электрических и электронных системах без них не обойтись.

Конденсатор - это несколько проводников, служащих для накопления заряда. Конденсатор обычно имеет две пластины (обкладки). Форма пластин может быть различной: плоской, сферической, цилиндрической.



Давайте рассмотрим простейший плоский конденсатор. Две одинаковые параллельные проводящие пластины. Между ними - вакуум (для определённости). Расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров (это важно). Заземлим пластину A - физически соединим её с Землей: $\varphi_a = 0$. В начальном состоянии на пластинах нет заряда. Потенциал пластины B тоже равен нулю.

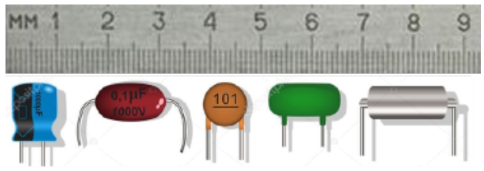


Давайте на правую пластину B поместим заряд $+q$ (зарядим конденсатор). Что произойдёт? Мы готовы ответить на этот вопрос - эти темы мы обсуждали. Благодаря явлению электростатической индукции на пластине A появится заряд $-q$ (заряд $+q$ с пластины A уйдет в Землю). В пространстве между пластинами установится ***однородное*** электростатическое поле (вот где важна оговорка, что расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров). Снаружи пластин поля не будет. Более того, ***пластины будут защищать (экранировать) свое внутреннее поле от воздействия внешних полей*** (это мы обсуждали). Потенциал точки b станет равным φ_b. Теперь пластину A отсоединим от

Земли. Всё, заряды $+q$ на пластине B и $-q$ на пластине A надёжно "заперты" в конденсаторе. Конденсатор готов к работе. Если конденсатор надо разрядить (вернуть в исходное состояние), то достаточно проводочком соединить точки a и b.

"Ну и чем такой способ хранения заряда лучше, чем просто заряженная сфера?" - спросите вы. Отвечаю. Во-первых, сфера с зарядом подвержена воздействию внешних электромагнитных полей, что приводит к сложностям в использовании помещенного на неё заряда. На конденсатор внешние поля не влияют. Во-вторых (и это главное), сфера ёмкостью 1Ф имеет гигантский размер (см. выше). Автомобильный конденсатор ёмкостью 1Ф весит 1,5 кг и имеет максимальный линейный размер 20 см.

Пример размеров современных конденсаторов для электрических схем:



Это всё здОрово, но где же про ёмкость, где формулы? Сейчас, к этому и подходим.

Если, как и в предыдущем опыте, заряжать наш плоский конденсатор зарядами $+2q$, $+3q$ и т.д., то мы обнаружим, что потенциал φ_b возрастёт в такое же количество раз. То есть, как и в случае уединённой сферы, ***заряд и потенциал (напряжение) пропорциональны***. И тогда:

Электрическая ёмкость конденсатора (любого): $C = \dfrac{q}{\Delta\varphi} = \dfrac{q}{\varphi_b - \varphi_a} = \dfrac{q}{U_{ba}}$

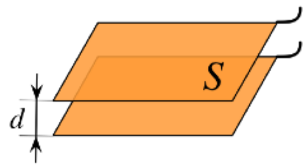
Когда говорят, что заряд конденсатора равен q, то подразумевают, что одна пластина (обкладка) имеет заряд $+q$, а другая $-q$. Часто между обкладками конденсатора помещают диэлектрик с коэффициентом диэлектрической проницаемости ε. Это увеличивает ёмкость конденсатора. Емкость конденсатора зависит от его геометрии и от ε диэлектрика. Емкость не зависит ни от заряда, ни от потенциала (напряжения). Емкость - это свойство конденсатора.

Предыдущую формулу можно переписать в виде: $q = C \cdot \Delta\varphi$.

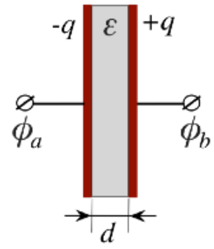
Чем больше ёмкость конденсатора, тем меньше меняется напряжение на нём при изменении заряда.

В электрических цепях задача конденсатора - накапливать на короткое время заряд (увеличивать напряжение на нём) и отдавать этот заряд в цепь. Работа конденсатора сводится к циклам "заряд - разряд". Поскольку любой проводник обладает ёмкостью (то есть способностью накапливать заряд) то в электрических и электронных схемах появляется понятие ***паразитной ёмкости*** - заряд накапливается там, где он не нужен, и начинает влиять на работу схемы. У схемотехников есть свои методы борьбы с паразитными емкостями.

Из известных вам электростатических формул можно легко вывести формулу ёмкости плоского конденсатора:

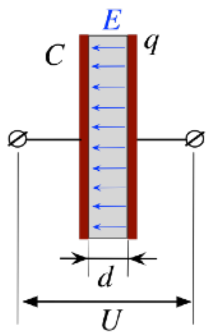


Ёмкость плоского конденсатора: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot S}{d}$, где



ε - диэлектрическая проницаемость диэлектрика между пластинами, S - площадь пластин, d - расстояние между пластинами. Как видите: одна геометрия и ε.

Существуют формулы для расчета ёмкости цилиндрического, сферического и прочих видов конденсаторов. В школьных задачах чаще всего имеем дело с плоским конденсатором.



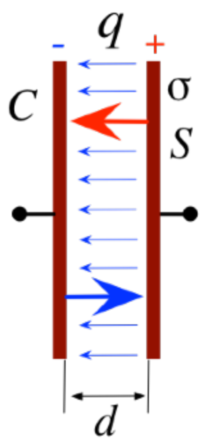
Ещё пара полезных формул *про плоский конденсатор*.

$$q = C \cdot U,$$

$$U = E \cdot d$$

(d - расстояние между пластинами, E - напряженность поля внутри конденсатора)

Вопрос от вдумчивого ученика: "А коли конденсатор - это две противоположно заряженные пластины, то, наверное, они должны притягиваться друг к другу? А можно оценить силу притяжения пластин конденсатора?"



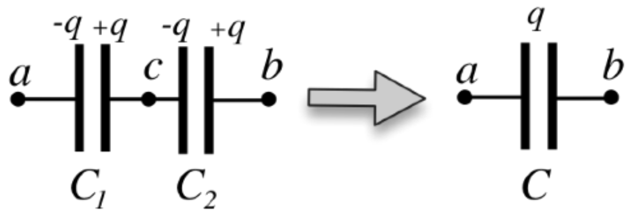
Хороший вопрос. Да, конечно, пластины конденсатора притягиваются друг к другу. Для плоского конденсатора эти силы притяжения легко расчитываются по известным вам формулам. Сила притяжения одной пластины к другой считается так: $F = \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon \cdot S}$, где S - площадь пластин.

Соединение конденсаторов

Разобрались с тем, что происходит у конденсатора внутри, теперь поговорим о *схемотехнике*. То есть о том, что будет, если несколько конденсаторов соединить. А соединить их можно по-разному. Будем рассматривать каждый конденсатор как единое целое с единственной характеристикой - ёмкостью. Как устроен конденсатор внутри (плоский ли он, цилиндрический, какой в нём диэлектрик и пр.) - нам безразлично. Ёмкость полностью определяет поведение любого конденсатора в цепях.

Последовательное соединение конденсаторов

Соединим два конденсатора ёмкостью C_1 и C_2 каждый ***последовательно*** (один за другим). Естественно, возникает вопрос: а нельзя ли рассматривать получившуюся ***батарею конденсаторов*** как один эквивалентный конденсатор? И если да, то какова его ёмкость?



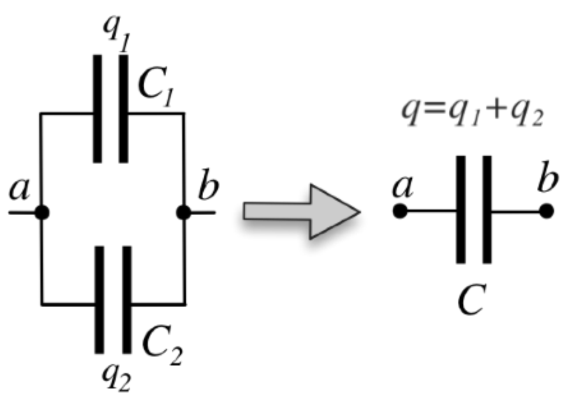
Отвечаю: можно рассматривать два последовательно соединённых конденсатора как один.

А насчет ёмкости эквивалентного конденсатора давайте порассуждаем.

Напряжение на эквивалентном конденсаторе будет U_{ab}. Но оно складывается из напряжений U_{ac} и U_{cb} (это же понятно, если рассмотреть потенциалы точек a, b, c и выразить соответствующие напряжения). Тогда можно записать: $U_{ab} = U_{ac} + U_{cb}$. Теперь поговорим о зарядах. Если мы будем заряжать батарею из наших двух конденсаторов, то физически мы будем заряжать только внешние пластины обоих конденсаторов. На внутренних пластинах заряд появится в результате электростатической индукции (так, как это показано на рисунке). В результате заряда батареи на каждом конденсаторе будет одинаковый заряд q. Значит мы можем говорить, что и на эквивалентном конденсаторе будет заряд q.

Тогда для эквивалентного конденсатора можно записать: $U_{ab} = \dfrac{q}{C}$, а для каждого отдельного конденсатора: $U_{ac} = \dfrac{q}{C_1}$ и $U_{cb} = \dfrac{q}{C_2}$. Подставляя эти выражения в формулу с напряжениями, получим: $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$. Это и есть формула для определения общей ёмкости двух последовательно соединённых конденсаторов. Если же таких последовательно соединённых конденсаторов n, то формула будет выглядеть симметрично: $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \ldots + \dfrac{1}{C_n}$

Параллельное соединение конденсаторов



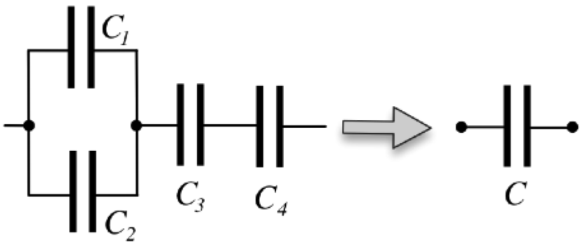
Соединим два конденсатора ёмкостью C_1 и C_2 каждый ***параллельно*** (как на рисунке) и зададимся аналогичным вопросом: какова ёмкость эквивалентного конденсатора?

Напряжения как на каждом из конденсаторов, так и на эквивалентном одинаковы: равны U_{ab}. А вот заряды на каждом конденсаторе будут разными (внешние пластины каждого из них будут заряжаться независимо) и заряд на эквивалентном конденсаторе будет равен сумме этих зарядов:

$q = q_1 + q_2$. Для зарядов на всех конденсаторах можно записать: $q_1 = U_{ab} \cdot C_1$, $q_2 = U_{ab} \cdot C_2$ и $q = U_{ab} \cdot C$. Подставляя эти выражения в формулу с зарядами, получим: $C = C_1 + C_2$ - формула для определения общей ёмкости двух параллельно соединённых конденсаторов. Если же таких параллельно соединённых конденсаторов n, то формула будет выглядеть симметрично: $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$.

Последовательно-параллельное (смешанное) соединение конденсаторов

Последовательно-параллельным соединением конденсаторов называют соединение, имеющее участки, как с параллельным, так и с последовательным соединением. Например такое, как на рисунке (но придумать можно, сами понимаете, сколь угодно сложные схемы). Её тоже хотелось бы превратить в какой-нибудь эквивалентный конденсатор. Как



быть? Да очень просто: превращаем в эквивалентные все последовательные куски схемы по формуле, затем - все получившиеся параллельные в эквивалент по формуле. До тех пор, пока не получим один эквивалентный конденсатор. Тут даже творчества никакого не надо - всё просто.

Для самопроверки: эквивалентная ёмкость схемы на рисунке равна $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}$

Энергия электрического поля

В части наших предыдущих рассуждений мы рассматривали системы "поле-заряд". Нам было дано поле (законом изменения вектора напряженности $\vec{E}$). Нам даже было не нужно задумываться какой заряд или группа зарядов его породила. И нам был дан заряд q, который в это поле помещали. И мы рассматривали взаимодействие поля и заряда q.

В других рассуждениях мы рассматривали системы "заряд-заряд". Мы описывали поля, которые каждый из этих зарядов порождал и рассматривали взаимодействие каждого из зарядов с чужими полями.

Мы уже говорили, что электростатическое поле - поле потенциальное. Над зарядом, помещённым в поле, поле совершает работу. Если не совершает (мы заряд "придерживаем пальцем"), то запасает в заряде потенциальную энергию, которая впоследствии может перейти в работу (когда мы "палец уберём").

Какие энергетические характеристики электростатического поля и заряда мы уже рассмотрели?

Потенциал - энергетическая характеристика *ПОЛЯ* в данной точке пространства. Потенциал вводится как $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$ - как математическая функция от напряженности. Сам потенциал относителен (определяется с точностью до константы). Разность потенциалов между двумя точками пространства абсолютна и именно она определяет какова величина работы, которую совершает поле по перемещению заряда: $A = -q \cdot \Delta\varphi$ (тут мы рассуждаем в системе "поле-заряд").

Потенциальная энергия заряда в поле - $W_p = \varphi \cdot q$ - энергетическая характеристика *ЗАРЯДА*. Здесь мы опять рассуждаем в системе "поле-заряд". Потенциальная энергия заряда также определяется с точностью до константы (надо указать её ноль). И эта энергия трактуется как работа внешних сил по переносу заряда q из бесконечности (тем самым мы задаем ноль потенциальной энергии - в бесконечности) в данную точку поля.

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов - $W_p = k \cdot \dfrac{q \cdot Q}{r}$ - здесь мы рассуждали уже в системе "заряд-заряд".

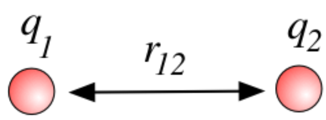
"Хорошо", - скажет вдумчивый ученик, "это всё понятно. Но вот какая непонятка. Представьте поле точечного положительного заряда Q. Сколько бы мы ни подкидывали ему положительных зарядов, поле будет их отталкивать (то есть совершать работу). А можно ли оценить полную энергию поля точечного заряда в целом? Ведь если судить об энергии как о способности совершать работу, то поле, не уставая отталкивать сколь угодно большое количество зарядов и совершая при этом сколь угодно большую работу, обладает бесконечной энергией! Я прав?"

Отвечаю. Хороший вопрос. Ну, во-первых, когда вы говорите, что "подкидываете" в поле положительного заряда Q другие положительные заряды, то это подразумевает, что вы совершаете положительную работу по сближению положительных зарядов, а следовательно, вы заряжаете систему "поле-заряд" дополнительной энергией, которая тратится впоследствии на их отталкивание. Тут энергетический баланс соблюдается и говорить о бесконечной энергии поля точечного заряда на основании этих соображений не приходится. Ведь вас же не смущает то, что пружина "не устаёт отталкивать" грузы, которые вы на неё кладёте.

Во-вторых, говоря о полной энергии поля точечного заряда, вы коснулись тонкого вопроса (возможно даже того не подозревая). Когда в начале 20-го века попытались посчитать полную энергию электростатического поля электрона (электрон - не точечный заряд, хотя и очень маленький. При этом заряд электрона - минимальный из возможных зарядов) методами классической электродинамики, то в расчетах стали появляться бесконечно большие величины. И стало очевидно, что классическая электродинамика с этой задачей не справляется. Наступала эра квантовой механики. Она-то и решила задачу. Но об этом - не здесь.

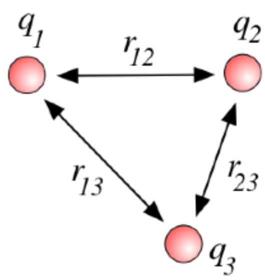
То есть мы не можем в рамках классической электродинамики говорить о полной энергии поля точечного заряда (даже заряда электрона). Тогда о каких же энергиях мы можем говорить? *Мы можем говорить об энергии системы зарядов.* А понятие "система зарядов" можно трактовать достаточно широко.

Энергия системы двух зарядов



$W_p = k \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}$ - потенциальная энергия взаимного расположения двух зарядов. Эту энергию можно трактовать как работу внешних сил при перемещении этих двух зарядов из бесконечности в данные точки пространства. Произнося "из бесконечности", мы задаем уровень отсчета потенциальной энергии (в бесконечности она равна 0) и снимаем неопределенность величины W_n.

Энергия системы трех зарядов



$W_p = k \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} + k \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + k \cdot \dfrac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}}$ - потенциальная энергия взаимного расположения трёх зарядов. По аналогии с предыдущим эту энергию можно трактовать как работу внешних сил при перемещении этих трех зарядов из бесконечности в данные точки пространства.

Энергия системы n зарядов

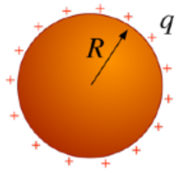
Предыдущую формулу можно распространить и на систему произвольного количества зарядов (я не буду её приводить в общем виде - она достаточно громоздка). И точно также эту энергию можно трактовать как работу внешних сил при перемещении всех этих зарядов из бесконечности в данные точки пространства.

> *Заметьте, мы нигде не употребляли выражение "энергия поля", а говорили "энергия системы зарядов". Поле - внутри системы зарядов.*

> И становится понятным почему у нас не получается рассмотреть энергию одного точечного заряда q. Ведь если представить заряд q как два заряда $q/2$ (как минимум) и трактовать энергию заряда q как работу внешних сил при перемещении двух зарядов $q/2$ из бесконечности в данную точку (одну и ту же точку) пространства, то "попрут" бесконечности - ведь силы взаимодействия зарядов при $r \to 0$ стремятся к бесконечности. Точно так же становится понятным почему не получается рассмотреть энергию одного электрона: электрон на меньшие заряды не бьётся.

А коли так, то *любое заряженное **пространственное** тело мы можем рассматривать как систему зарядов и говорить об энергии заряженного тела*.

Энергия заряженной сферы



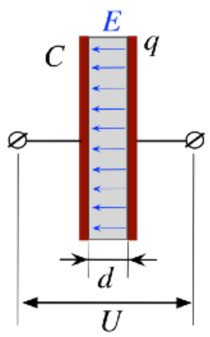
В качестве иллюстрации этого тезиса рассмотрим сферу радиуса R, заряженную зарядом q. Если рассматривать энергию сферы как работу внешних сил по переносу из бесконечности бесконечно малых зарядов (общей величиной q) на поверхность сферы, то получим вполне вразумительную формулу: $W_p = k \cdot \dfrac{q^2}{2R}$ (вывод её не привожу).

Энергия заряженного тела

Если пользоваться подобным методом, то с помощью математики можно рассчитать энергию любого пространственного заряженного тела.

■ Энергия заряженного конденсатора

Вполне логично рассматривать и заряженный конденсатор как систему зарядов.



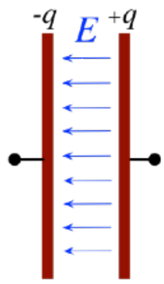
Чем отличается конденсатор от произвольной системы зарядов?
- электростатическое поле конденсатора локализовано между его пластинами, внешнего поля нет (в отличие от произвольной системы зарядов, где поле бесконечно в пространстве). В плоском конденсаторе это поле считаем однородным;
- заряды пластин равны $+q$ и $-q$;
- мы понимаем процесс заряда конденсатора.

Очевидно, что заряженный конденсатор обладает энергией: если его пластины замкнуть проводочком (разрядить конденсатор), то по проводочку пойдет ток и проводочек нагреется. Электрическая энергия конденсатора перейдёт в тепловую.

Энергию заряженного конденсатора можно трактовать двумя эквивалентными способами:
- как работу внешних сил по разделению зарядов (на $+q$ и $-q$) на пластинах при заряде конденсатора;
- как работу электростатического поля конденсатора при сближении (вплоть до контакта) пластин.

Для заряженного конденсатора любой формы справедливы следующие формулы для его энергии: $W_p = \dfrac{q \cdot U}{2} = \dfrac{C \cdot U^2}{2} = \dfrac{q^2}{2C}$

Поскольку электростатическое поле заряженного конденсатора локализовано в пространстве между его пластин, то можно говорить о том, что *энергия заряженного конденсатора - это энергия его электростатического поля*.



Плоский заряженный конденсатор - удобный повод порассуждать на важную тему: "А где же сосредоточена энергия и что является носителем энергии - заряды или поле?" Удобный по двум причинам: 1) поле плоского заряженного конденсатора конечно и умещается в его объёме и 2) формулы для плоского конденсатора просты.

Давайте вспомним пару формул для плоского конденсатора: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot S}{d}$ - его ёмкость через его геометрию и $U = E \cdot d$ - связь напряжения на конденсаторе с напряженностью поля в нём.

Подставим эти величины в формулу энергии конденсатора $W_p = \dfrac{C \cdot U^2}{2}$ и получим $W_p = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot S \cdot d$. Но $S \cdot d$ - это объём внутреннего пространства конденсатора V.

Поэтому $W_p = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot V$. Разделим обе части на V: $w = \dfrac{W_p}{V} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2}{2}$. Мы получили величину $w = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2}{2}$, называемую *объёмной плотностью энергии электрического поля* (энергия всего поля делим на объём, который оно занимает). Чем эта формула хороша? В ней нет никакой геометрии конденсатора: только плотность энергии (w), поле (E) и среда (ε).

Вид этой формулы позволяет предположить, что *электрическая энергия заключена не во взаимодействующих зарядах, а в их электрическом поле (E), заполняющем пространство*. В рамках электростатики, изучающей постоянные во времени поля неподвижных зарядов, это предположение проверить экспериментально или обосновать теоретически невозможно. Постоянные поля и породившие их заряды не могут существовать отдельно друг от друга. Изучение переменных электрических и магнитных полей (электродинамики в полном объёме) позволяет удостовериться в правильности такой интерпретации формулы.

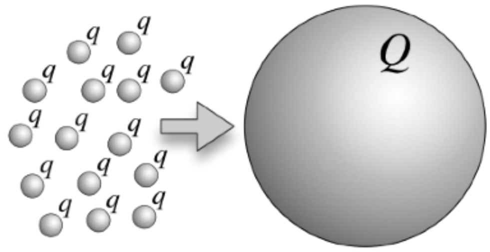
Ну и как все эти "энергетические" знания применять? - спросите вы. Да как обычно в энергетических задачах:

- если рассматриваемая в задаче система изолирована (нет прихода-расхода энергии из/во внешнего мира), то работает закон сохранения энергии: суммарная энергия системы (включая все виды энергии: механическую, электрическую, тепловую и т.д.) в исходном состоянии равна суммарной энергии системы в конечном состоянии;
- если система не изолирована, то по разности суммарных энергий системы в исходном и конечном состояниях мы можем судить о приходах-расходах энергии из/во внешнего мира (работа внешних сил, потери на переход энергии в тепловую и т.п.)

==================

Ну а теперь - задачи!

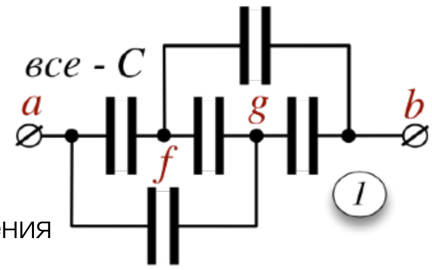
Задача - Энергия электрического поля N сферических капелек сливается в одну каплю. Радиус каждой капли r, заряд q (все заряды одного знака). Какая энергия расходуется на преодоление электрических сил отталкивания при соединении капелек?



Решение: При соединении капелек в одну внешние силы совершают работу по преодолению сил отталкивания - то есть увеличивают энергию результирующей капли. Искомая энергия (работа внешних сил) равна разности суммарной энергии отдельных N капелек (капля рассматривается как заряженная сфера с зарядом q) и энергии результирующей капли (тоже рассматриваемой как заряженная сфера). Энергия каждой капельки W_0: $W_0 = \dfrac{q^2}{2C_0}$; $\quad C_0 = \dfrac{r}{k} \rightarrow W_0 = k\dfrac{q^2}{2r}$, где C_0 - ёмкость каждой капельки как ёмкость заряженной сферы. При слиянии капелек: 1) объём результирующей капли суммируется из объёмов исходных капелек; 2) заряд результирующей капли суммируется из зарядов исходных капелек. Считаем радиус результирующей капли:

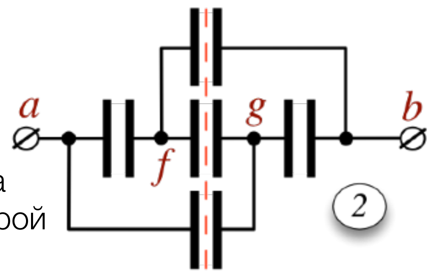
$N \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot R^3; \quad R = r \cdot \sqrt[3]{N}$. Заряд результирующей капли $Q = N \cdot q$. Тогда энергия результирующей капли: $W_2 = k\dfrac{(N \cdot q)^2}{2R} = k\dfrac{N^2 \cdot q^2}{2 \cdot r \cdot \sqrt[3]{N}}$. Искомая энергия (работа внешних сил), расходуемая на преодоление электрических сил отталкивания при соединении капелек: $W = W_2 - N \cdot W_0 = k\dfrac{N^2 \cdot q^2}{2r \cdot \sqrt[3]{N}} - k\dfrac{N \cdot q^2}{2r} = k\dfrac{N \cdot q^2}{2r}\left(\dfrac{N}{\sqrt[3]{N}} - 1\right)$

Задача - Схемы соединения конденсаторов Найдите емкость системы конденсаторов (емкость между точками a и b) - рисунок 1.

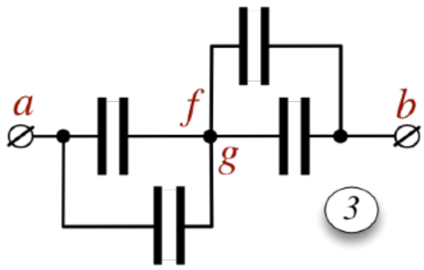


> Точки с одинаковым потенциалом всегда есть в схемах, обладающих осью симметрии относительно точек подключения источника питания.

Решение: С учетом этого замечания рассмотрим схему включения конденсаторов вот так.



Эта схема очевидно обладает осью симметрии - рисунок 2. Из симметрии следует, что потенциалы точек f и g равны. Поэтому их можно соединить, выбросив конденсатор, включенный между этими точками (на нем заряда нет). И тогда схема превратится в эквивалентную (рисунок 3), емкость которой легко подсчитать.



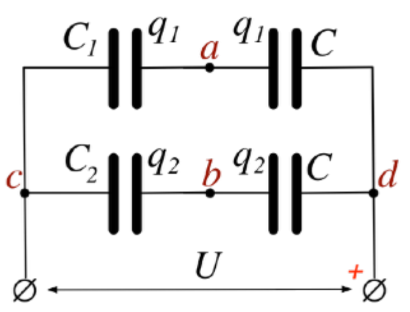
> Точки с одинаковыми потенциалами можно соединять и разъединять - поведение зарядов не изменится! Это обстоятельство вытекает из того, что работа электрических сил над зарядами не зависит от формы пути.

Она равна $C_x = \dfrac{1}{\frac{1}{2C} + \frac{1}{2C}} = C$.

Задача - Соединения конденсаторов Найти разность потенциалов между точками a и b.

Решение: *Конденсаторы C и C_1 соединены последовательно - на них будет одинаковый заряд q_1, конденсаторы C и C_2 соединены последовательно - на них будет одинаковый заряд q_2.*

Искомая разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b$. Расписываем потенциалы точек схемы:



Ветка $d - a - c$: $\begin{cases} \varphi_d - \varphi_a = \dfrac{q_1}{C} \\ \varphi_a - \varphi_c = \dfrac{q_1}{C_1} \end{cases}$

Вычитаем из 1-го 2-е и выражаем φ_a:

$$\varphi_a = \frac{1}{2}\left[\varphi_d + \varphi_c - q_1 \cdot \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_1}\right)\right]$$

Ветка $d - b - c$: $\begin{cases} \varphi_d - \varphi_b = \dfrac{q_2}{C} \\ \varphi_b - \varphi_c = \dfrac{q_2}{C_2} \end{cases}$

Вычитаем из 1-го 2-е и выражаем φ_b: $\varphi_b = \dfrac{1}{2}\left[\varphi_d + \varphi_c - q_2 \cdot \left(\dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{C_2}\right)\right]$.

Откуда $\varphi_a - \varphi_b = \dfrac{1}{2}\left[q_2 \cdot \dfrac{C_2 - C}{C \cdot C_2} - q_1 \cdot \dfrac{C_1 - C}{C \cdot C_1}\right]$.

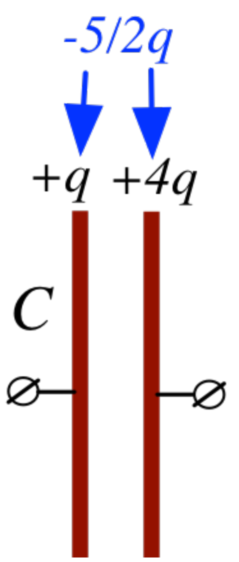
В ветке $d - a - c$ конденсаторы соединены последовательно: $q_1 = U \cdot \dfrac{C \cdot C_1}{C + C_1}$.

В ветке $d - b - c$ конденсаторы соединены последовательно: $q_2 = U \cdot \dfrac{C \cdot C_2}{C + C_2}$.

Окончательно получаем: $\varphi_a - \varphi_b = \dfrac{1}{2}U\left[\dfrac{C_2 - C}{C + C_2} - \dfrac{C_1 - C}{C + C_1}\right]$.

Ничего сложного: аккуратно расписываем потенциалы точек схемы и решаем алгебру.

Задача - Плоский конденсатор На одной из пластин плоского конденсатора ёмкости C находится заряд $+q$, а на другой $+4q$. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.

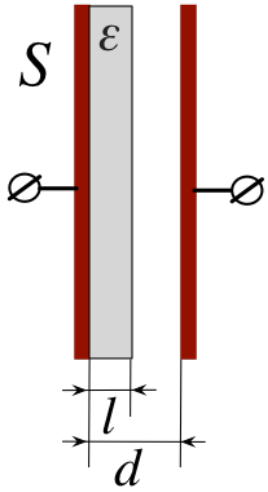


Решение: Используем простой и элегантный метод решения - *метод виртуальных зарядов*. Его идея: добавляем в систему пару зарядов, которые сами по себе компенсируют друг друга. Но добавленные к разным элементам системы, делают систему гораздо проще для понимания.

Добавим на каждую пластину заряд $-\dfrac{5}{2}q$ (полусумма зарядов пластин, взятая с обратным знаком). Тогда конденсатор окажется "нормально" заряженным с зарядами пластин $\pm\dfrac{3}{2}q$ и разность потенциалов между пластинами будет равна $\dfrac{3}{2}q \cdot C$. Но поля одинаковых зарядов $-\dfrac{5}{2}q$ пластин внутри конденсатора компенсируют друг друга. Следовательно, добавленные нами заряды не изменили поле между пластинами, а значит, и разность потенциалов на конденсаторе.

Поэтому ответ: $\dfrac{3}{2}q \cdot C$.

Задача - Плоский конденсатор В плоском воздушном конденсаторе (площадь пластин S, расстояние между пластинами d) к одной из пластин вплотную придвинута пластина диэлектрика с коэффициентом диэлектрической проницаемости ε толщиной l. Определите ёмкость получившегося конденсатора.



Решение: *Сначала, как всегда - порассуждаем*. Поверхность диэлектрика является эквипотенциальной поверхностью, поскольку линии напряженности перпендикулярны ей. Можно представить себе, что поверхность диэлектрика покрыта тонким слоем металла. Этот слой не нарушает эквипотенциальности поверхности диэлектрика и не изменит её потенциал. Таким образом, разность потенциалов между пластинами конденсатора, а следовательно, и ёмкость останутся такими же, как и до металлизации поверхности диэлектрика. Это означает, что получившийся конденсатор можно рассматривать как два последовательно соединённых конденсатора. Ёмкость конденсатора с диэлектриком равна $\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon \cdot S}{l}$, ёмкость воздушного конденсатора равна $\dfrac{\varepsilon_0 \cdot S}{d-l}$. Общая ёмкость получившегося конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon \cdot S}{l + \varepsilon \cdot (d-l)}$

======================

Ну вот, мы и закончили рассмотрение всех вопросов школьной (ну, почти) Электростатики. Наша следующая История - про Магнетизм.