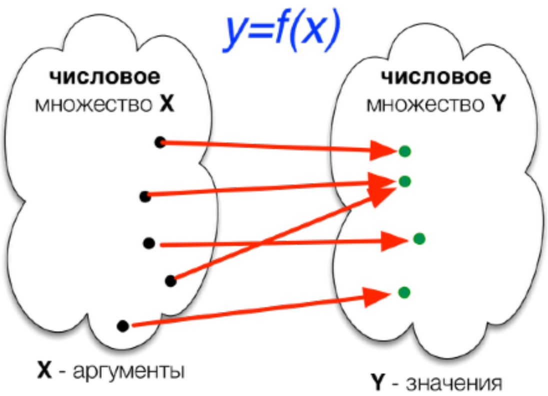
Функции

Тема большая - История получилась длинная. Собрал воедино и упорядочил всё школьное "функциональное" знание, поговорил о "тонких" местах, привел много примеров.

"- Скажите, пожалуйста, а что это за функция?
- спросила Алиса.
- Чётная периодическая, разве сама не видишь?
- ответил Кот."
(Л. Кэролл)

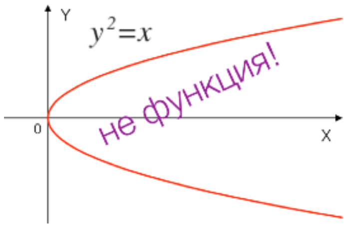


В школе мы имеем дело с ***числовыми*** функциями.

Числовая функция ***y = f(x)*** - это такое соответствие между двумя ***числовыми*** множествами X и Y, при котором **каждому** числу x ∈ X сопоставляется ***единственное*** число y ∈ Y. Переменная x называется аргументом функции ***f***.

Ключевым словом является "***единственное"***. Такое соответствие также называется ***однозначным***.

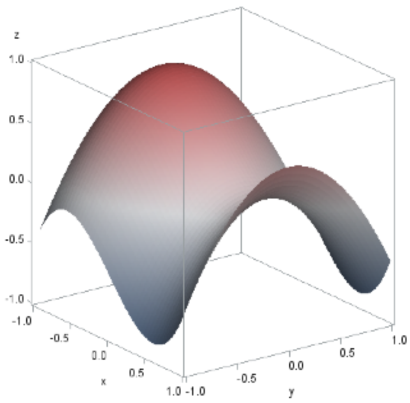
А вот примеры "не функций": в них не соблюдается однозначное соответствие - одному значению аргумента x соответствуют два значения y. А тогда что же это такое - $y^2=x$? Это называется соответствием, не являющимся функцией, и ему тоже есть графическое представление. Ну о них мы говорить больше не будем.



Однозначность соответствия логично обосновывается, исходя из следующих практических соображений. Представьте, в процессе эксперимента мы измеряем зависимость, например, температуры от давления. Меняем значения давления, смотрим на термометр и фиксируем его показания. Очевидно, что термометр в каждый конкретный момент может показывать только одно значение - отсюда однозначность. И наоборот: мы знаем некую функцию, которая связывает, например, толщину балки моста с максимальной на неё нагрузкой. Считая эту толщину, мы должны получить одно значение. Два разных значения толщины балки были бы весьма странны.

*Математика - абстрактная самостоятельная наука и **отнюдь не практика** диктует математике те или иные правила. Поэтому по секрету скажу, что неоднозначные (многозначные) соответствия в после-школьных разделах математики тоже рассматриваются как функции.*

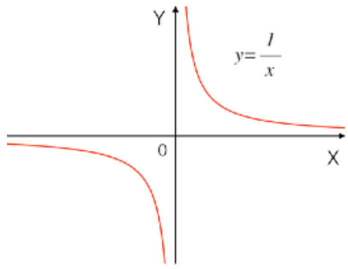
Простыми словами говоря, числовая функция - это ***некое правило***, по которому одни числа превращаются в другие.



Функциями могут быть зависимости ***не только от одного аргумента***. Вот вам графическое представление функции двух аргументов. Или: из молекулярной физики вы знаете уравнение Менделеева-Клапейрона: $pV = \frac{m}{\mu}RT$. Из него следует, что давление идеального газа есть функция аж четырех переменных: объёма, температуры, массы газа и его молярной массы.

Здесь мы будем говорить о числовых функциях (с однозначным соответствием) одного аргумента.

Для данной функции:
- множество значений, которые может принимать x, - *область определения функции (ОО)*
- множество значений, которые может принимать y, - *область значений функции (ОЗ)*



Примеры:
- функция известной нам и любимой обратно-пропорциональной зависимости $y = \frac{1}{x}$. Область определения её: все действительные числа из двух ***непрерывных*** интервалов $]-\infty; 0[$ и $]0; +\infty[$. Под непрерывностью интервала понимается, что ***любое*** действительное число из интервала принадлежит ОО функции. *В точке 0 функция не определена.* Область допустимых значений её: действительные числа из тех же двух ***непрерывных*** интервалов $]-\infty; 0[$ и $]0; +\infty[$ (то есть все действительные числа кроме 0). Ну, здесь всё более-менее понятно. Думаю, что и для других функций, изучавшихся в школе, вы легко укажите ОО и ОЗ.
- а вот хитренькая функция, которую вы не изучали в школе. Бояться её не надо - она достаточно проста. Называется она функция Дирихле D(x) и задается так:

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{если x - рациональное} \\ 0, & \text{если x - иррациональное} \end{cases}$$

  ОО её - все действительные числа (рациональные + иррациональные числа = действительные числа). А вот ОЗ - всего лишь два числа: 0 и 1.
- совсем не обязательно, чтобы ОО и ОЗ были непрерывные интервалы действительных чисел. В определении функции сказано "... соответствие между двумя ***числовыми*** множествами..." Вот пример: ***сколько ног у солдат в группе*** (предполагается, что уж у солдат-то по две ноги на каждого)? Ответом будет функция: k=2n, где n - количество солдат в группе, k - количество у них ног. ОО этой функции - множество натуральных чисел; ОЗ - множество натуральных четных чисел.

Способы задания функций

Что значит "задать" числовую функцию? Это значит полностью и однозначно объяснить правило, по которому одни числа превращаются в другие. Можно назвать четыре способа:
- аналитический (с помощью формулы)
- табличный
- графический
- описательный.

Аналитический способ - самый полный и самый мощный. Функция задается формулой. Формула может быть сколь угодно длинной и сложной. Например, такой: $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{\log_2 x}}{\sqrt[4]{\dfrac{1-e^x}{\sin 5x}}}$.

Страшно? А зря. Формулы - это такой математический язык, который описывает все элементарные правила действий над числами. А язык этот мы с вами знаем.
С помощью математических методов мы можем полностью исследовать такую функцию: выяснить каковы ОО и ОЗ функции, найти интервалы возрастания-убывания, найти максимумы-минимумы и многое другое. Таким исследованиям посвящен огромный раздел математики - математический анализ. Если вы знаете формулу, то вы знаете про функцию всё! Более того,

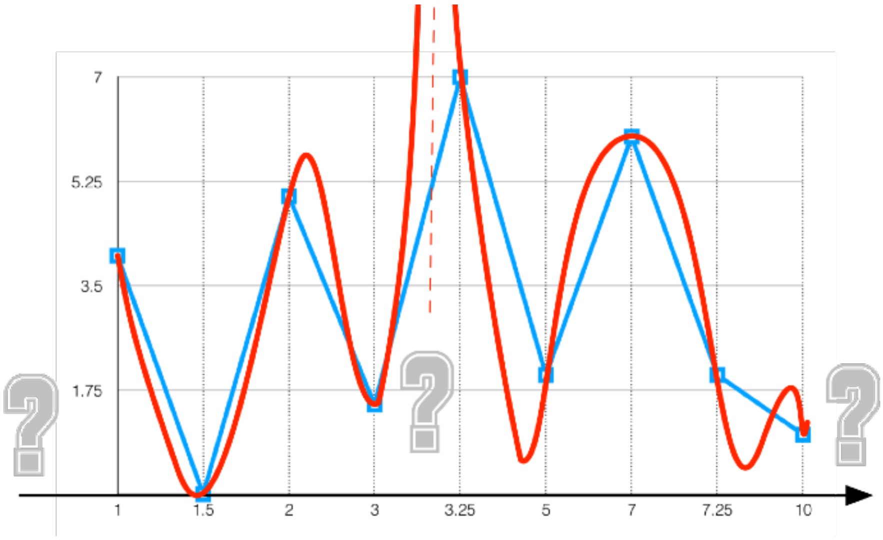
если вы знаете формулу функции, то вы можете построить её график, составить таблицы её значений.
Строго говоря, при аналитическом способе надо не только задать формулу, но и указать на каком множестве аргументов она задана.

Вот пример:
- функция $f(x) = x^2 + 1$ задана на множестве действительных чисел
- функция $g(x) = x^2 + 1$ задана на множестве натуральных чисел

Хотя формулы в обоих случаях совпадают, но мы прекрасно понимаем, что это разные функции.

Табличный способ - имеется табличка: каждому x соответствует свой y. Табличка эта может быть сколь угодно больших размеров. Мы могли проводить эксперимент и получить замеры зависимости y от x в нескольких точках. Могли проводить сложные расчеты на компьютере и он

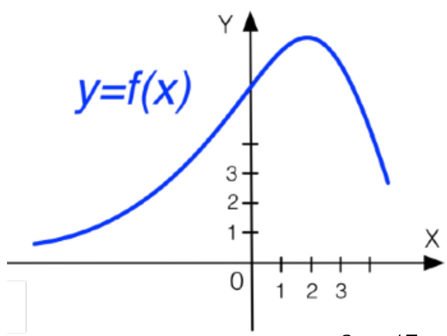
X	Y
1	4
1.5	0
2	5
3	1.5
3.25	7
5	2
7	6
7.25	2
10	1



вывел нам таблицу просчитанных значений. А может быть наша разведка свистнула эти данные у американцев. Короче, табличка эта попала в наши руки не из математики, а из внешнего реального мира. В табличке уже всё посчитано - это пожалуй единственный плюс такого способа задания функции. Ну а минусы очевидны. Вот представьте, у нас в руках табличка, описывающая некую функцию.
Максимум, что мы можем сделать с этой табличкой, так это отметить девять точек на координатной плоскости. Но шаловливая рука уже тянется соединить эти точки голубенькой ломаной линией. "Для чего соединять?" - спросите вы. "Ну как для чего? Чтоб узнать как себя ведет наша функция между иксами из таблички!" - уверенно отвечает шаловливая рука. "А если я соединю эти точки вот так красненькой линией?" - говорите вы и соединяете. "Ой! Не знаю тогда!" - промямлила шаловливая рука и покраснела. Правильно, при таком способе задания мы *ничего не знаем о том, как ведет себя функция вне заданных точек и за пределами интервала* задания. Её просто там не существует! Можно лишь предполагать что-то, но это уже не наш научный метод.

> *Хотя, если таких точек в таблице достаточно много, то в той же математике есть методы интерполяции и аппроксимации (извините за длинные непонятные слова), которые позволяют с определенной вероятностью что-то спрогнозировать. Но мы не об этом.*

Графический способ - функция представлена графиком. По осям должен быть отложен масштаб для определения числовых значений. Предполагается, что график полный и точный и мы можем для каждого x точно найти свой y.



И аналитический и графический способы полностью описывают функцию и в смысле объёма информации о функции они эквивалентны. Графический способ нагляднее, можно в любом заданном x посчитать значение y, видны области возрастания-убывания, виден максимум, можно даже численно посчитать производную в точках (тангенс угла наклона касательной). ***Но формулу из графика, увы, не вывести!*** И при графическом способе мы лишены того мощного математического аппарата анализа функции, который применим при аналитическом способе.

Описательный способ - функция описывается словесно. В принципе словесно можно описать все что угодно (ваш учебник математики написан на великом и могучем русском языке!), даже функцию $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{\log_2 x}}{\sqrt[4]{\dfrac{1-e^x}{\sin 5x}}}$, но это уже негуманно. А вот пример функции, которую иначе, как описательно не задать - формулы нет: *f(x): x - натуральные числа; y равен сумме цифр, из которых состоит значение x: x=1 → y=1; x=11 → y=2; x=34 → y=7; x=256 → y=13; и т.д.*

> *А почему это "формулы нет"? А вот почему. Помните в Истории про Числа мы говорили о разных системах счисления для представления чисел: десятичная, двоичная, шестнадцатиричная и даже римская? В разных системах счисления числа выглядят по разному ($2019_{10} = 7E3_{16}$). В этом же примере задания функции по умолчанию подразумевается десятичная система представления x. Понятно, что в шестнадцатиричной системе счисления такая функция принимала бы другие значения y. Системы счисления - это раздел информатики. Математика же представлением чисел не занимается, для математики важны величины чисел. А величины чисел от способа представления не зависят. Даже если бы мы вдруг решили отказаться от привычной десятичной системы счисления представления чисел в математике и перешли бы на шестнадцатиричную, то ни одна бы аксиома, ни одна бы теорема не изменились. Ведь не изменится же математика, если мы будем учить ее по-китайски (не дай бог)? Вот поэтому в математике и нет формул для подобных функций - ей это неинтересно.*

Определение: ***две функции называются равными***, если они имеют одинаковые области определения и при каждом значении аргумента из этой области определения принимают равные значения.

В школе изучают элементарные функции. Основные элементарные функции:

- степенная функция с любым действительным показателем (задается формулой вида $y = x^a$).
- показательная ($y = a^x$) и логарифмическая ($y = \log_a x$) функции
- тригонометрические функции: прямые ($y = sinx, \quad y = cosx, \quad y = tgx, \quad y = ctgx$) и обратные ($y = arcsinx, \quad y = arccosx, \quad y = arctgx, \quad y = arcctgx$)

Свойства основных элементарных функций подробно проходят в школе и в нашей истории мы на этом останавливаться не будем.

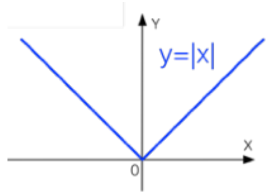
Элементарные функции - это функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью ***конечного*** числа

- арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень)
  - $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{\log_2 x}}{\sqrt[4]{\dfrac{1-e^x}{\sin 5x}}}$
- взятий функции от функции (сложная функция) - $f(x) = \log_2 sin(e^{2x} + 1)$

! Все элементарные функции задаются аналитически!!!

Отдельно укажем на три вида элементарных функций, с которыми часто приходится иметь дело в задачах. Они представляют собой результат сложений-умножений-делений над степенными функциями.

Модуль - $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



А как записать модуль одной формулой? Да запросто: $y = \sqrt{x^2}$

Не забывайте, что $|x| \geq 0$!!!

Рациональная функция - $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, n - натуральное

Дробно-рациональная функция - $y = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$, n,m - натуральное

А вот чисто из любопытства вопрос: а приведите пример не-элементарных функций.
Да пожалуйста. Вот выше упоминавшаяся функция Дирихле (её нельзя свести к комбинации основных элементарных функций); функция
$f(x) = 1 - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ (n - натуральное, $n \to \infty$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot k$ - факториал) (не выполняется условие конечности комбинаций основных элементарных функций).

Что значит *исследовать* функцию?

Ну вот, мы имеем функцию. Что дальше? Естественно, в задачах могут стоять самые разные вопросы про неё. Но есть общий набор вопросов, ответив на которые, вы функцию *исследуете*, то есть будете знать её основные свойства. А зная эти свойства, уже и на хитрые вопросы задач отвечать будет легче.

В дальнейшем будем говорить об элементарных функциях.

Исследовать функцию - это:
- найти её область определения (ОО) и область значений (ОЗ)
- найти точки пересечения с осями координат
- проверить наличие асимптот
- установить является ли функция чётной или нечетной
- установить является ли функция периодической или непериодической
- найти точки экстремума и интервалы монотонности
- установить наличие обратной функции
- построить график функции

Область определения функции

Напомню, область определения (ОО) функции y=f(x) - это множество значений, которые может принимать x. Проще говоря, *ОО - это те x, для которых можно посчитать y*.

Мы говорим о функциях, заданных аналитически. Для функций, заданных графически, ОО легко определяется по рисунку. Для функций, заданных таблично, ОО - это все x, присутствующие в таблице.

ОО функции определяется:
- правилами и законами математики
- дополнительными условиями

Пример: В задаче функция $g(x) = x^2 + 1$ задана на множестве натуральных чисел. Никакие законы математики не запрещают нам рассматривать $g(x) = x^2 + 1$ на множестве всех действительных чисел. Поэтому "задана на множестве натуральных чисел" и есть дополнительное условие. Либо составитель задачи так обозначил условие, либо какие-либо практические соображения привели к такому ограничению. Математика тут ни при чем.

Какие же правила и законы математики влияют на ОО? Так они вам давно уже известны:
- на ноль делить нельзя
- нельзя извлекать корни четных степеней из отрицательных чисел
- логарифмы: $\log_a b = c \quad \rightarrow \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$
- тангенсы: $tgx \rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{2} + \pi k$ и котангенсы: $ctgx \rightarrow x \neq \pm \pi k, \quad k \in Z$ (а если учесть, что $tgx = \dfrac{sinx}{cosx}$ и $ctgx = \dfrac{cosx}{sinx}$, то и тут деление "во всем виновато")
- арксинусы и арккосинусы: $arcsinx \rightarrow |x| \leq 1; \quad arccosx \rightarrow |x| \leq 1$

Всего-то пять запретов!

*До того, как мы определим ОО, мы **<u>не делаем никаких преобразований</u>** с уравнением функции! Преобразования могут изменить ОО функции и мы получим ошибочный результат!*

Пример: Разберем последовательность действий по определению ОО функции:

$$y = \sqrt{x^2 - 8x + 12} + \frac{2x^2}{x-3} + \frac{5}{x+1}$$

Осматриваем функцию и ищем потенциально "опасные" операции.
- первое слагаемое - квадратный корень - условие "безопасности": $x^2 - 8x + 12 \geq 0$
- второе слагаемое - деление - условие "безопасности": $x \neq 3$
- третье слагаемое - деление - условие "безопасности": $x \neq -1$

Условия должны выполняться одновременно, поэтому получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 12 \geq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

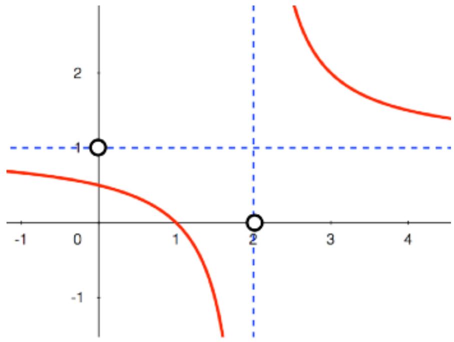
Решаем-получаем: $x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]-1, 2] \cup [6, +\infty[$

Область значений функции

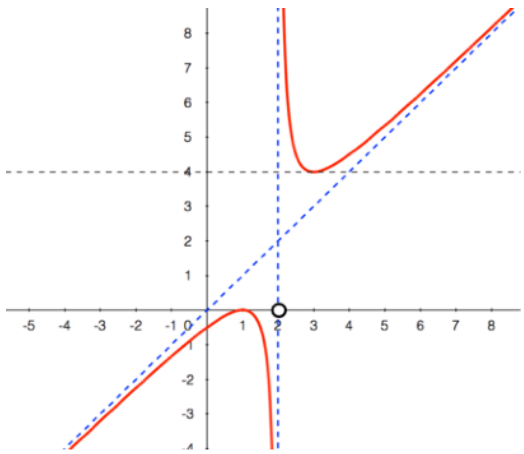
Область значений (ОЗ) функции y=f(x) - это множество значений, которые может принимать y. ОО мы определили. Теперь все x из ОО подставляем в f(x) и получаем все y. Вот и ОЗ! Ну да, а если этих x из ОО бесконечно много? Замучаемся подставлять. Ну тогда смотрим внимательно на функцию и начинаем математические шаманства. Очень помогает графическое представление функции.

Пример простенькой функции: $y = 1 + \dfrac{1}{x-2}$. Узнали? Ну да, это наша любимая гипербола, только со смещениями по осям.

Её ОО: $x \in]-\infty{,}2[\ \cup\ ]2,+\infty[$ - точка x=2 не включена потому, что при x=2 "на ноль делить нельзя". Говорят, что точка x=2 является ***точкой разрыва*** функции. На жаргонном математическом языке говорят, что точка x=2 "выколота" из ОО, что и изображается соответствующим кружочком;
её ОЗ: $y \in]-\infty{,}1[\ \cup\ ]1,+\infty[$ - точка y=1 не включена - к ней график стремится при $x \to \pm\infty$, но её не достигает.



Пример функции посложнее: $y = x + \dfrac{1}{x-2}$. Вроде бы похожа формулой на предыдущую, однако есть существенные различия.
Её ОО: $x \in]-\infty{,}2[\ \cup\ ]2,+\infty[$ - точка x=2 не включена (всё как у предыдущей). Точка x=2 является ***точкой разрыва*** функции;
её ОЗ: $y \in]-\infty{,}0]\cup[4,+\infty[$ - не включен уже целый интервал. О том как я высчитал этот интервал - чуть далее.
К этим двум функциям мы будем возвращаться.
Если функция может быть задана аналитически в виде дроби $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, то в точках, где знаменатель обращается в 0 ($g(x)=0$) возникает точка разрыва в ОО определения функции. Чтобы найти все такие точки разрыва, надо решить уравнение $g(x)=0$.



Точки пересечения с осями координат

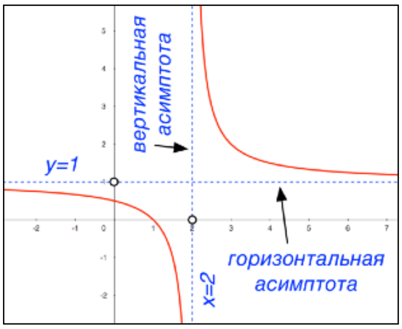
- Точка пересечения графика функции y=f(x) с осью Y (а эта точка ***ОДНА*** по условию ***однозначности*** соответствия из определения функции) - это точка с координатами *(0, f(0))*. Это и понятно - с осью Y график пересекается тогда, когда x=0. Подставляем в f(x) 0 и получаем точку пересечегия с осью Y.
- Точка пересечения графика функции y=f(x) с осью X (***а этих точек может быть несколько***) - это множество точек с координатами $(x_i, 0)$, x_i - решения уравнения *f(x)=0*. С осью X график пересекается тогда, когда y=0. Сколько действительных решений этого уравнения - столько раз график пересекается с осью X. *А найдя эти точки, можно определить интервалы, на которых функция положительна или отрицательна (надо лишь отличать случаи, когда график функции пересекает ось X и касается её)*.

Пример: Функция: $y = 1 + \dfrac{1}{x-2}$. Точка пересечения с осью Y - точка (0,0.5) - подставьте x=0 в функцию. Точка пересечения с осью X - точка (1,0) - решите уравнение $1 + \dfrac{1}{x-2} = 0$.

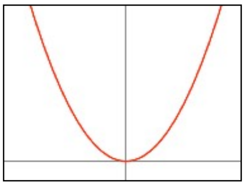
Функция: $y = x + \dfrac{1}{x-2}$. Точка пересечения с осью Y - точка (0,-0.5). Точка пересечения (касания) с осью X - точка (1,0) - решите уравнение $x + \dfrac{1}{x-2} = 0$. Решая это уравнение, мы получим: $x^2 - 2x + 1 = 0$, что подразумевает наличие двух корней и, соответственно, двух точек пересечения с осью X. Но $x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \to (x-1)^2 = 0$ и оба корня совпадают и вместо двух точек пересечения с осью X мы получаем одну точку касания.

Наличие асимптот

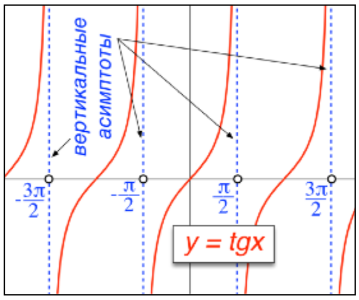
Чурики-чурики! Это что еще за зверь такой - асимптота? А можно без асимптот? Можно (*кого этот ответ устроит - срочно переходите к следующему разделу!*). **Но асимптоты - это очень простой и наглядный помощник при анализе функций и построении графиков.** Это во-первых. А во-вторых, вы с асимптотами давно знакомы. Да ну!? Ну да.



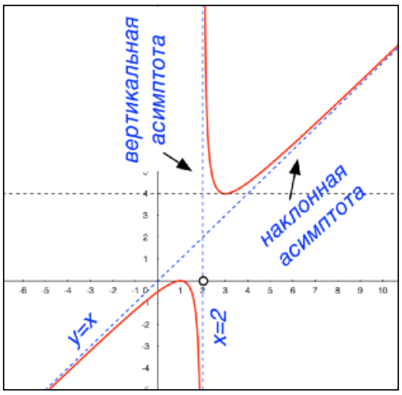
Вот наша функция: $y = 1 + \dfrac{1}{x-2}$. Это гипербола со смещениями по осям. А вот ее асимптоты: *вертикальная* (x=2) и *горизонтальная* (y=1). Ну да, такие асимптоты нам знакомы.



А вот парабола $y = x^2$. У неё *нет асимптот*.



А вот тангенс со своими *вертикальными* асимптотами (их бесконечно много). И эти асимптоты мы помним.



Вот еще одна наша функция: $y = x + \dfrac{1}{x-2}$ и её график. Здесь есть *вертикальная* асимптота и *наклонная* асимптота y=x. Уловили суть про асимптоты?

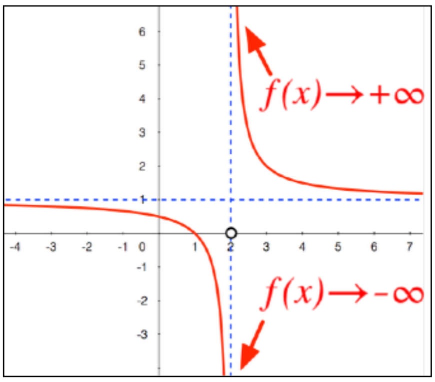
Асимптоты - это **прямые**, к которым стремится график функции (но не достигает) при определенном поведении x.

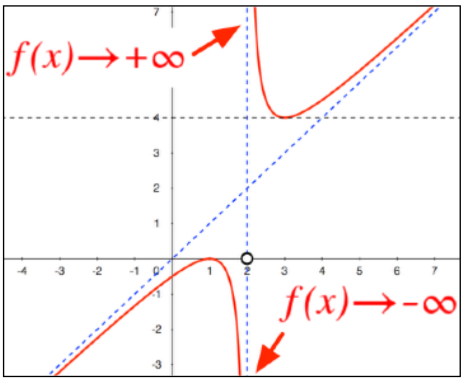
Асимптоты бывают трех видов:

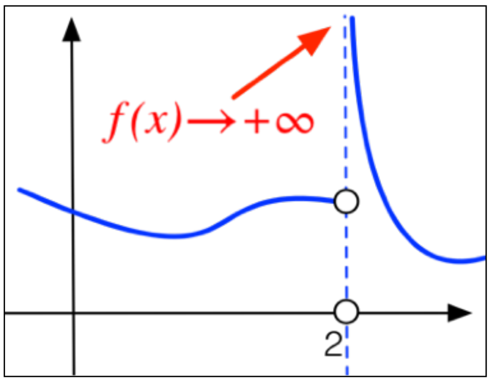
- вертикальные
- горизонтальные
- наклонные

Вертикальные асимптоты - это вертикальные линии, они возникают в **точках разрыва** функции. Еще одно необходимое условие: при $x \to x_0$ (x_0 - точка разрыва) функция хотя бы с одной стороны (можно с обеих) должна стремиться к $\pm\infty$. Тогда асимптотой будет прямая $x = x_0$ (это никакая не функция, просто так описываются вертикальные прямые в декартовых координатах).

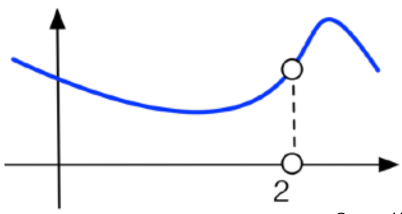
Вот примеры функций с точкой разрыва $x_0 = 2$ и **с вертикальной асимптотой** x=2. Вертикальные асимптоты есть, потому что выполняется условие: хотя бы с одной стороны функция стремится к $\pm\infty$ при $x \to 2$.



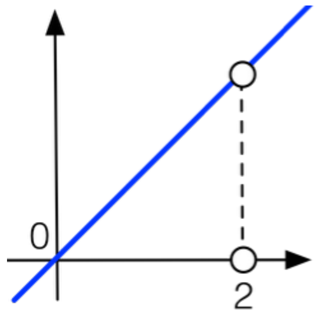




А вот примеры функций с точкой разрыва $x_0 = 2$, но без вертикальных асимптот (не выполняется условие $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to 2$).



А можете ли вы указать аналитическую формулу для функции на рисунке справа?



Да запросто: $y = \frac{(x-2)^2}{x-2} + 2$.

Ой! Почему так? Да чтоб аналитически задать точку разрыва x=2.
Ну вот такая уж функция! Этот пример еще раз подчеркивает: нельзя преобразовывать функцию до определения её ОО. Если вы до определения ОО возьмете и разделите $(x-2)^2$ на $x-2$, то в итоге получите $y = x$, а это уже функция с другой ОО - то есть другая функция.

<u>Горизонтальные асимптоты</u> - это горизонтальные линии. Они определяются так: давайте устремим x к $+\infty$ и к $-\infty$. Если найдется такое число A, к которому при этом будет стремиться функция, то прямая y=A и является горизонтальной асимптотой.

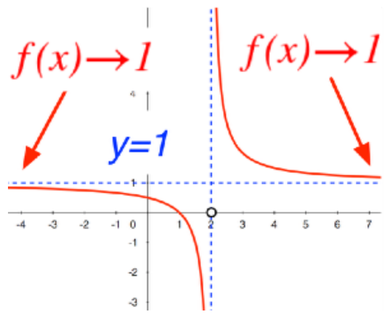
Пример: $y = \frac{3x^2 + 9x - 17}{x^2 - 2x + 36}$ - ищем горизонтальную асимптоту.

ОО должна удовлетворять условию $x^2 - 2x + 36 \neq 0$. Определив ОО, я преобразую выражение: $y = \frac{3x^2 + 9x - 17}{x^2 - 2x + 36} = 3 + \frac{15x - 125}{x^2 - 2x + 36}$ (разлагаю на слагаемые: первое слагаемое - число, второе - дробь с иксами).

При $x \to +\infty$ функция $y = 3 + \frac{15x - 125}{x^2 - 2x + 36}$ стремится к 3 (второе слагаемое стремится к 0).

При $x \to -\infty$ функция $y = 3 + \frac{15x - 125}{x^2 - 2x + 36}$ тоже стремится к 3 (второе слагаемое стремится к 0). Поэтому прямая y=3 является горизонтальной асимптотой функции.

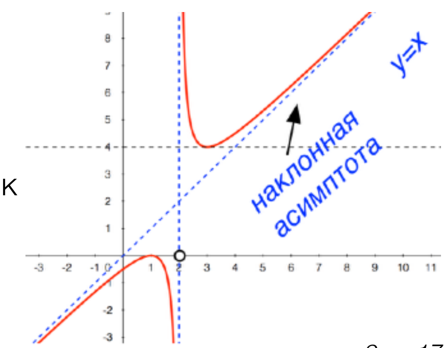
> Если функция задана дробно-рациональной формулой (как в последнем примере) и степени числителя и знаменателя равны $y = \frac{ax^n + bx^{n-1} + .. + cx + d}{mx^n + nx^{n-1} + .. + px + q}$, то горизонтальная асимптота такой функции существует и представляется как $y = \frac{a}{m}$.



А вот наша старая знакомая: $y = 1 + \frac{1}{x-2}$. Её горизонтальная асимптота y=1.

<u>Наклонные асимптоты</u> - это прямые $y = Kx + B$ к которым стремится функция при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Опишем метод нахождения наклонных асимптот для функций дробно-рационального вида, у которых **степень числителя на единицу больше степени знаменателя**:
$y = \frac{ax^{n+1} + bx^n + cx^{n-1} + .. + dx + e}{mx^n + nx^{n-1} + .. + px + q}$. Алгебраически преобразуем исходное выражение функции в вид: $y = Kx + B + \frac{Zx^{n-1} + .. + Wx + V}{mx^n + nx^{n-1} + .. + px + q}$ (такое преобразование существует!). При этом $K = \frac{a}{m}$. Тогда прямая $y = Kx + B$ будет наклонной асимптотой функции.



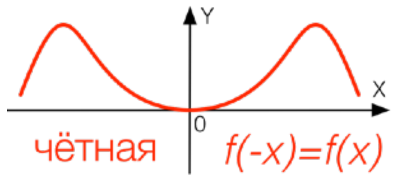
Наша функция: $y = x + \frac{1}{x-2}$. При $x \to +\infty$ функция стремится к $y = x$. При $x \to -\infty$ функция тоже стремится к $y = x$. Поэтому $y = x$ - наклонная асимптота нашей функции.

Я привел здесь способы отыскания горизонтальных и наклонных асимптот только для дробно-рациональных функций определенной степени. Изучив в институте математический анализ, вы сможете находить такие асимптоты для любых сложных функций.

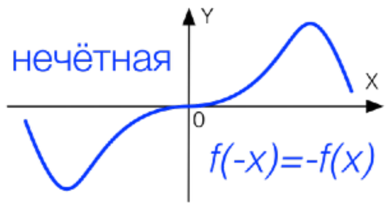
Ну вот, с асимптотами разобрались! Правда, здОрово!

Понимающий читатель увидит, как я старательно избегал понятие предела, который в школе нынче проходят ровно 5 минут (хотя проходят и производную, ну не чудо ли?). Тема предела слишком объёмна, чтобы включать её в нашу историю. Но и без него получилось достаточно полно.

Проверка на чётность - нечетность



Функция называется чётной, если на всей её области определения выполняется условие: $f(-x) = f(x)$. ***График чётной функции симметричен относительно оси Y.***



Функция называется нечётной, если на всей её области определения выполняется условие: $f(-x) = -f(x)$. ***График нечётной функции центрально симметричен относительно начала координат.***

Если функция чётная или нечётная, то ***достаточно построить одну ветвь*** такой функции (для x>0, например), а затем применить соответствующую симметрию. Это вдвое сократит работу.

Ну а уж если функция и не чётная, и не нечётная - извольте строить её всю.

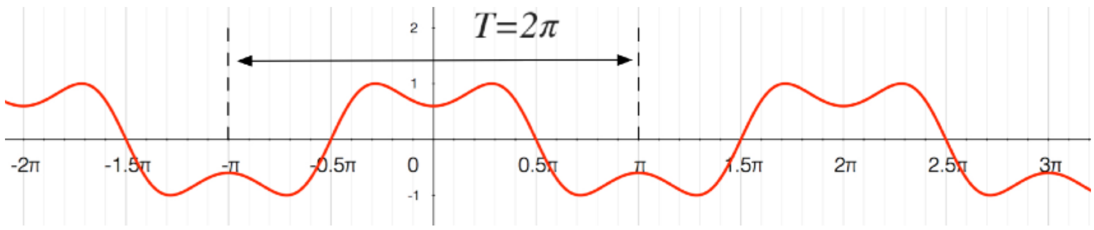
Проверка на периодичность

Функция *f(x)* называется периодической с периодом *T*, если для любых ***x, x+T, x-T*** из ОО выполняется: $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$.

Если функция периодическая, то ***достаточно построить один период*** такой функции, а остальные периоды повторить.

Свойства периодических функций:

- если число T является периодом функции y=f(x), то и число -T также является периодом этой функции;
- если числа T_1 и T_2 являются периодами функции y=f(x) и $T_1+T_2 \neq 0$, то и число T_1+T_2 также является периодом функции y=f(x);
- если число T является периодом функции y=f(x), то и любое число вида nT, где $n \in Z$ и $n \neq 0$ также является периодом этой функции;



- если число T является периодом функции y=f(x), то число T/k является периодом функции y=f(kx+b) (где k≠0);
- если число T является периодом функции y=f(x) и функции y=g(x), то сумма, разность, произведение и частное этих функций являются периодическими функциями с тем же периодом T;
- **если** функция y=f(x), периодическая, то и сложная функция y=g(f(x)) тоже периодическая с тем же периодом.

*Из элементарных функций периодическими являются тригонометрические. (Формально функция **y=a**, где a - число, тоже периодическая. Периодом у неё является любое число.)*

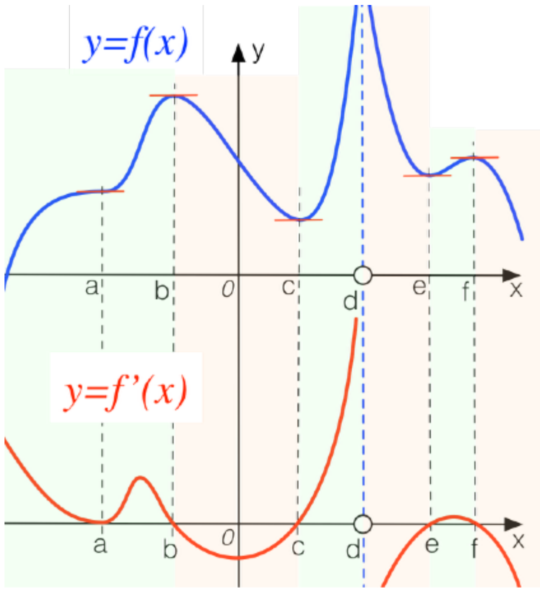
Пример: Функция $y = sin\left(\frac{5}{2}cosx\right)$ периодическая с периодом $T = 2\pi$, как и *cosx*.

Проверка на точки экстремума и интервалы монотонности

Коль мы заговорили об экстремумах и о монотонности функций, то придётся вспомнить что такое производная. Вспомнили? Здесь я не буду об этом говорить - это большая самостоятельная тема.

Итак, рассматриваем элементарную функцию $y = f(x)$.

Общий случай. У функции $y = f(x)$ ОО $]-\infty, d[\,\cup\,]d, +\infty[$. Точка d - *точка разрыва* и в ОО не входит. На всей ОО $y = f(x)$ - гладкая, то есть в каждой точке ОО у $y = f(x)$ есть производная. Под графиком функции $y = f(x)$ показан график функции $y = f'(x)$ - её производной. ОО $y = f'(x)$ - та же самая, что и у $y = f(x)$.



Достаточные признаки монотонности функции:
- если $f'(x) \geq 0$ в каждой точке интервала (a,b), то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале;
- если $f'(x) \leq 0$ в каждой точке интервала (a,b), то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале.

Пользуясь этими признаками, определяем интервалы монотонности нашей функции:
- интервалы возрастания: $]-\infty, b[,]c, d[,]e, f[$
- интервалы убывания: $]b, c[,]d, e[,]f, +\infty[$

Необходимое условие экстремума

Если x_0 - точка экстремума функции $y = f(x)$ и производная $f'(x)$ существует в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

Если в точке экстремум и в точке есть производная, то она равна 0.

Достаточное условие экстремума (главный способ определения экстремума)

- если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 - точка максимума;
- если производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Здесь ничего не сказано о производной в точке x_0 (*её даже может и не быть!*)

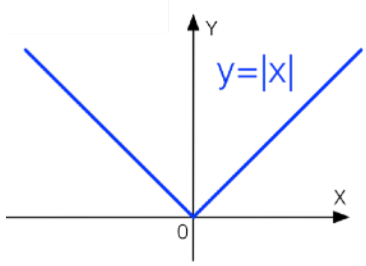
Пользуясь ***достаточным условием***, определяем экстремумы нашей функции:

- точка a - ***не экстремум***: производная равна 0, но она не меняет знак при переходе через неё (это точка перегиба);
- точка b - максимум: производная в b = 0 и она меняет знак с + на -;
- точка c - минимум: производная в c = 0 и она меняет знак с - на +;
- точка e - минимум: производная в e = 0 и она меняет знак с - на +;
- точка f - максимум: производная в f = 0 и она меняет знак с + на -.

Мы рассмотрели общий случай, когда производная "хорошо себя ведет": она существует на всей ОО функции.

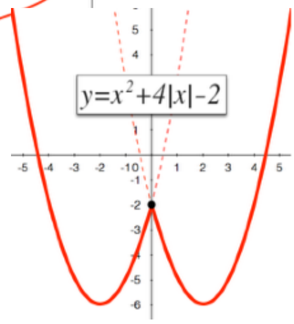
А вот примеры, когда производная "плохо себя ведет":

1. Функция модуля $y = |x|$: её ОО - $]-\infty, +\infty[$. Её производная равна -1 на интервале $]-\infty, 0[$ и равна 1 на интервале $]0, +\infty[$. **В точке 0 производной нет**. Но пользуясь **достаточным условием**, можем говорить о том, что у функции модуля в точке 0 - минимум.



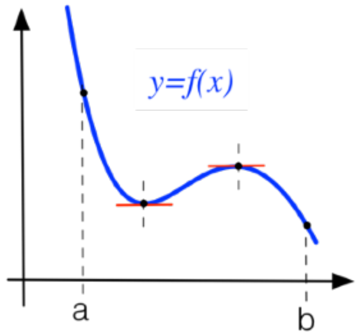
2. Функция $y = x^{\frac{1}{3}}$: её ОО - $]-\infty, +\infty[$. Её производная положительна и определена везде, кроме точки 0 (в 0 производная "улетает в плюс бесконечность"). В точке 0 производной нет. Но пользуясь ***достаточным условием***, можем говорить о том, что у функции $y = x^{\frac{1}{3}}$ в точке 0 экстремума нет - производная не меняет знак.

3. А вот еще пример функции с модулем: $y = x^2 + 4|x| - 2$. Всё, казалось бы, хорошо и понятно: функция - составная из двух парабол, её ОО - $]-\infty, +\infty[$. Но вот закавыка - в точке 0 у функции нет производной. А нам уже и не страшно! Пользуясь ***достаточным условием***, можем говорить о том, что у функции в точке 0 - максимум: производная меняет знак.



В некоторых задачах просят найти наибольшее или наименьшее значение функции на интервале [a,b]. Интервал этот (или, как минимум, часть его) лежит внутри ОО функции. Алгоритм такой:

- находим значения f(a) и f(b);
- находим экстремумы внутри интервала;
- выбираем наименьшее/наибольшее из найденных значений.



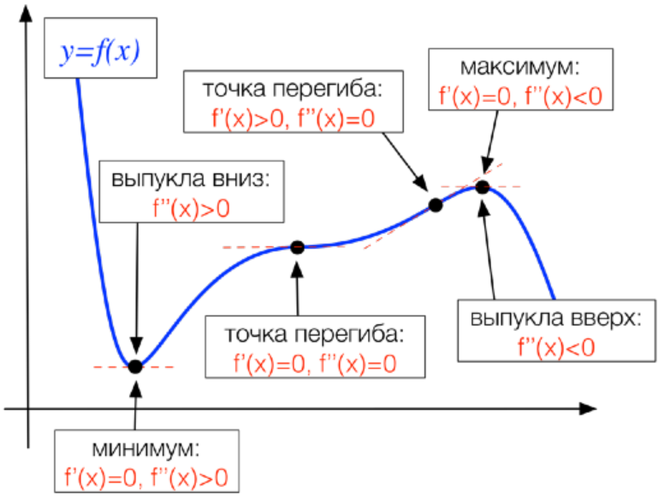
В некоторых задачах при анализе функций требуется определить точки перегиба и интервалы выпуклости функции. Выпуклость и точки перегиба связаны со второй производной функции.

Условия выпуклости или вогнутости функции на интервале

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $[a, b]$ и имеет ***непрерывную, не равную нулю*** вторую производную $f''(x)$ в точке x_0 из этого интервала:

- если $f''(x) > 0$ всюду на интервале $[a, b]$, то функция имеет **вогнутость** на этом интервале (иначе говорят - выпукла вниз);
- если $f''(x) < 0$ всюду на интервале $[a, b]$, то функция имеет **выпуклость** на этом интервале (иначе говорят - выпукла вверх)

Достаточное условие точки перегиба: если а) в точке x_0 существует первая производная, б) вторая производная при переходе через точку x_0 ***меняет свой знак*** и то x_0 - **точка перегиба.**
А если вторая производная в точке x_0 существует и x_0 - точка перегиба - то $f''(x_0) = 0$.

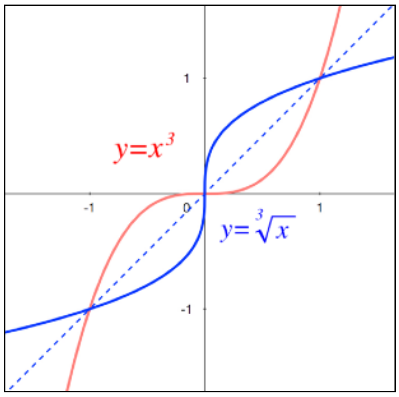


Наличие обратной функции

Для чего они нужны - обратные функции? Это вызвано необходимостью решать уравнения $y = f(x)$ относительно x. Решения как раз и записываются через обратные функции: $x = f^{-1}(y)$. Например: имеем $y = x^3$. Выражаем x через y: $x = \sqrt[3]{y}$. Говорят: функция $y = \sqrt[3]{x}$ является обратной к функции $y = x^3$. И наоборот: функция $y = x^3$ является обратной к функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Пусть мы имеем функцию $y = f(x)$. Её ОО - $\{x\}$, её ОЗ - $\{y\}$.
Для элементарных функций справедливо следующее: если функция $y = f(x)$ строго монотонна (либо строго возрастает, либо строго убывает) на всей своей ОО, то у неё существует обратная функция (обозначается как $x = f^{-1}(y)$).

Областью определения обратной функции является множество $\{y\}$, а областью значений - множество $\{x\}$ (они меняются местами).
Графики взаимно обратных функций в одной и той же координатной плоскости симметричны относительно прямой $y=x$.



Построение графика функции

Ну вот, теперь мы про функцию знаем почти всё. Пора строить её график.

Никто нам не запретит построить график по точкам. Взять сто миллионов значений x, посчитать сто миллионов значений y, нанести сто миллионов точек на координатную плоскость и плавно-плавно (несмотря на старческое дрожание рук) соединить эти точки кривулей. Потом присесть, слегка передохнуть. Но нам говорят: "Сто миллионов точек маловато будет. Надо триста миллиардов!" И мы снова в деле лет эдак на пятьсот! Смешно. А для чего мы тогда долго и упорно анализировали функцию, определяли асимптоты, экстремумы и прочие характеристики функции?! А для того, чтобы не строить сто миллионов точек.

Вы должны понимать, что идеальный график построить вообще невозможно: даже у компьютера всегда есть погрешность вычисления, у принтеров и плоттеров есть погрешность представления. Даже идеальную функцию $y = x$ нарисовать не удастся: линейка не идеально прямая, карандаш "гуляет" в пальцах и т.п. Да и для чего он нужен-то - идеальный график?

А что же тогда мы строим? А мы строим *образ идеального графика*, отражающий ***все характеристики функции***. Не беда, если построенная нами точка "уползёт" чуток от идеального положения (если, конечно, этот "чуток" не противоречит характеристикам функции). А беда, если мы "проморгали" максимум функции или устремили её в бесконечность вместо нуля.

Что обязательно должно присутствовать на графике:
- ось X должна отражать всю ОО функции: на оси X должны присутствовать все точки разрыва; все интервалы, исключаемые из ОО;

- все нули функции (точки пересечения с осью X);
- точка пересечения с осью Y;
- все асимптоты должны быть указаны; должно быть отражено поведение графика по отношению к асимптотам;
- если функция чётная-нечётная - должны отображаться обе симметричные части графика;
- если функция периодическая - надо изобразить как минимум два её периода;
- все экстремумы и все интервалы монотонности;
- все точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости;
- пояснительные надписи.

Короче - все результаты исследования функции.

Еще до начала построения графика надо оценить его размер и выбрать соответствующие масштабы по осям координатной сетки. Этот масштаб надо обозначить по осям: указать 0 и 1 (или 1000, или 0,000001, или π, ...)

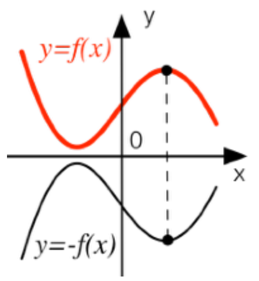
Напомню-ка я вам некоторые базовые приемы геометрического преобразования графиков *(линейные преобразования).*

Пусть дан график функции (ГФ) $y = f(x)$ и числа a,b > 0 и k,m > 1 (для определенности)

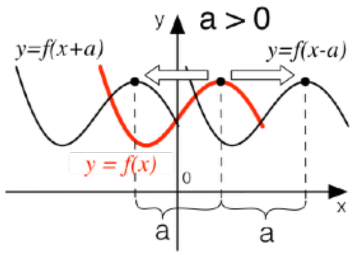
ГФ $y = mf\left(kx + a\right) + b$ (четыре преобразования сразу) получится из ГФ $y = f(x)$ так:

1) сжатие в k раз по оси X
2) сдвиг влево по оси X на a
3) растяжение по оси Y в m раз
4) сдвиг вверх по оси Y на b.

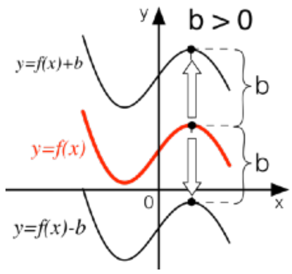
ГФ $y = -f(x)$ симметричен относительно оси X



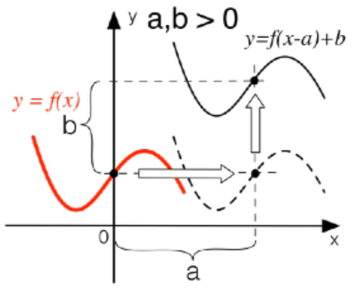
ГФ $y = f(x - a)$ сдвинут вправо по X на a
ГФ $y = f(x + a)$ сдвинут влево по X на a



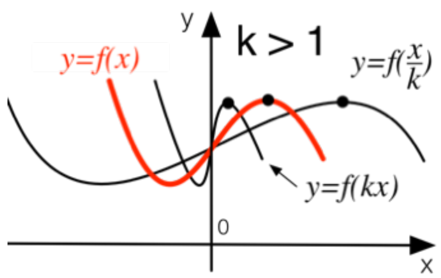
ГФ $y = f(x) + b$ сдвинут вверх по Y на b
ГФ $y = f(x) - b$ сдвинут вниз по Y на b



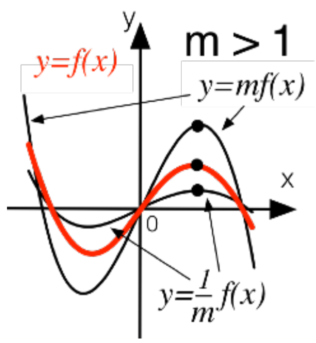
ГФ $y = f(x - a) + b$ сдвинут вправо по X на a и вверх по Y на b



ГФ $y = f(kx)$ сжат по оси X в k раз
ГФ $y = f\left(\frac{k}{x}\right)$ растянут по X в k раз



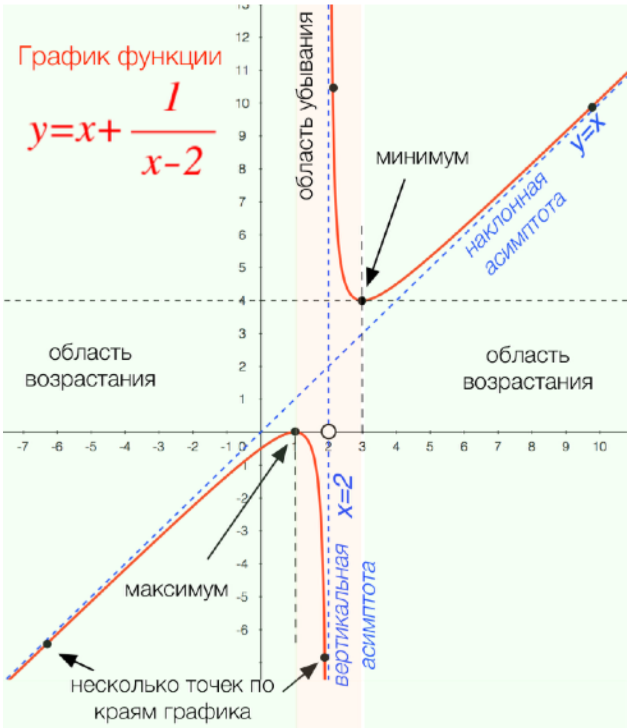
ГФ $y = mf(x)$ растянут по Y в m раз
ГФ $y = \frac{1}{m}f(x)$ сжат по Y в m раз



А теперь давайте подытожим результаты анализа функции $y = x + \dfrac{1}{x-2}$ и построим её окончательный график.

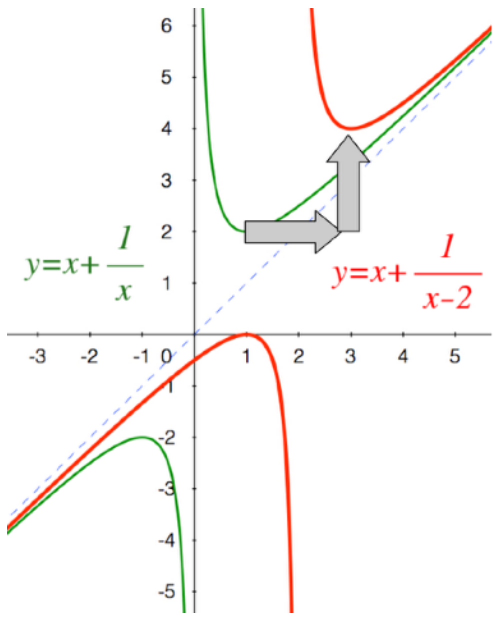
- ОО: $x \in \,]-\infty, 2[\, \cup \,]2, +\infty[$ - точка x=2 не включена - является ***точкой разрыва*** функции;
- ОЗ: $y \in \,]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$ (определилась после вычисления максимума/минимума) - график функции состоит из двух ветвей.
- Точка пересечения с осью Y - точка (0,-0.5).
- Точка пересечения (касания) с осью X - точка (1,0).
- Асимптоты:
  вертикальная: *x=2*: при $x \to 2$ слева $y \to -\infty$; при $x \to 2$ справа $y \to +\infty$;
  наклонная: *y=x*: при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ график → y=x.
- Функция не чётная и не нечётная.
- Функция непериодическая.
- Точки экстремума и интервалы монотонности:
  Производная функции $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2}$. Производная не определена в точке x=2 - в точке разрыва функции;
  Интервалы монотонности (надо решить неравенство $y' < / > 0$):
    функция возрастает ($y' > 0$): $]-\infty, 1[\, \cup \,]3, +\infty[$;
    функция убывает ($y' < 0$): $]1,2[\, \cup \,]2,3[$
  Экстремумы: точка (1,0) - максимум; точка (3,4) - минимум (производная меняет знак);
  Интервалы знакопостоянства (надо решить неравенство $y < / > 0$):
    функция положительна: $]2, +\infty[$;
    функция отрицательна: $]-\infty, 1[\, \cup \,]1,2[$;
    функция равна 0: в точке (1,0).
- Точки перегиба и интервалы выпуклости:
  Вторая производная функции $y'' = \dfrac{2}{(x-2)^3}$. Вторая производная не определена в точке x=2 - в точке разрыва функции.
  Интервалы выпуклости:
    функция выпукла ($y'' < 0$): $]-\infty, 2[$;
    функция вогнута ($y'' > 0$): $]2, +\infty[$.
  Точек перегиба нет (вторая производная в 0 не обращается);
- Обратной функции нет (функция не монотонна).

А вот и график:



А если бы я был старым мудрым математиком, то я бы в два раза облегчил себе задачу. Я бы переписал уравнение функции $y = x + \dfrac{1}{x-2}$ как $y = (x-2) + \dfrac{1}{x-2} + 2$, построил бы график функции

$y = x + \dfrac{1}{x}$ (а она нечетная и достаточно построить лишь одну ветку), а потом сдвинул бы полученный график на 2 вправо по оси X и на 2 вверх по оси Y и получил бы то же самое.



Понятно, что сейчас существует масса прекрасных компьютерных программ, которым задаешь функцию в аналитическом виде, а они её полностью анализируют и строят графики неземной красоты. "И зачем нам самим строить графики и уставать?" - спросите вы. Ну, это вопрос почти философский. Мы его, с вашего позволения, проигнорируем.

Ну и на десерт - Хорошая ЕГЭшная задачка про функции

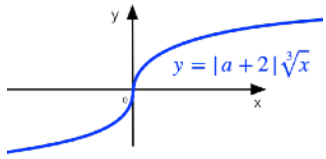
Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $f(x) = |a + 2|\sqrt[3]{x}$ имеет 4 решения, где f - чётная периодическая функция с периодом $T = \dfrac{16}{3}$, определенная на всей числовой прямой, причём $f(x) = ax^2$, если $0 \leq x \leq \dfrac{8}{3}$.

Решение:

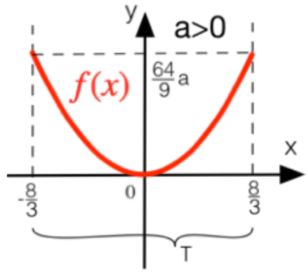
Задачка про функции с параметром и с модулем.
Поскольку функция f задана нам описательно и превратить её в формулу не получится, то будем решать комбинированным аналитическо-графическим способом.

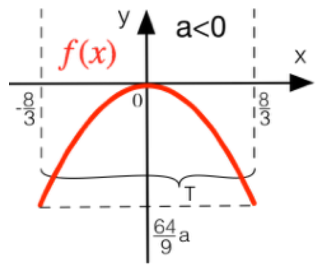
Осматриваем внимательно функции из задачи. Сразу замечаем, что a=0 и a=-2 не являются решением нашей задачи: при a=0 получается 1 решение, при a=-2 получается бесконечно много решений.

Функция $y = |a + 2|\sqrt[3]{x}$ на графике выглядит так:



Один период функции $f(x)$ в зависимости от знака параметра a выглядит вот так (построено с учетом: а) f(x) - четная - симметричная отн-но оси Y; б) числовых параметров из задачи):





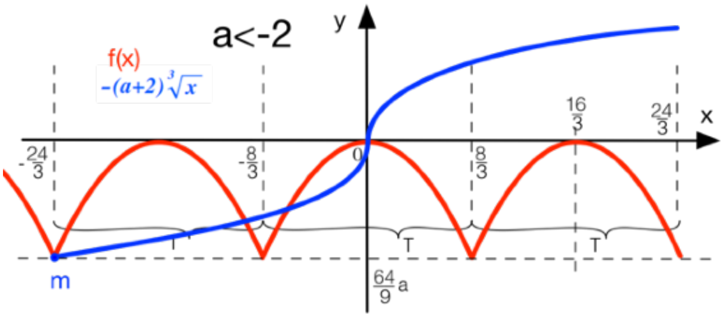
Ну что ж, все приготовления сделаны - пора раскрывать модуль.

$$|a+2| = \begin{cases} a+2, & a+2>0 \\ -a-2, & a+2<0 \end{cases}$$ (неравенства строгие - равно нас не интересует - см. выше)

На самом деле нас интересуют три числовых интервала (на них меняются не только уравнения, но и вид графика функции f): a<-2, -2<a<0, a>0.

1) a < -2: Строим примерный вид графиков. $y = -(a+2)\sqrt[3]{x}$. Периодичность $f(x)$ учтена.

Количество решений - это сколько раз синенькая кривая пересечет красненькую. В точке (0,0) эти кривые пересекаются всегда - уже одно решение. Затем синяя кривая два раза пересекает красную в области x=-8/3 - еще два решения.



Чтобы было ровно 4 решения, надо, чтобы кривые пересекались в точке m синей кривой, имеющей координаты (-24/3,64/9a). Будет эта точка немного выше - будут 5 решений; немного ниже - только 3. Отсюда условие:

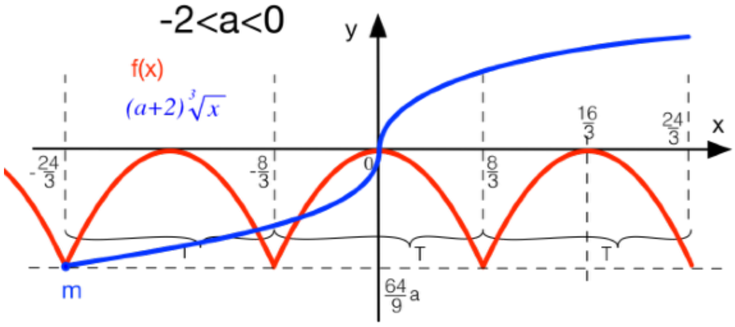
$\frac{64}{9}a = -(a+2)\sqrt[3]{-\frac{24}{3}} => \quad a = \frac{18}{23}$, ***не пойдет***, поскольку a<-2.

2) -2 < a < 0: Графики выглядят так же, лишь знак в уравнении поменялся:

$y = (a+2)\sqrt[3]{x}$. Абсолютно те же рассуждения. Условие:

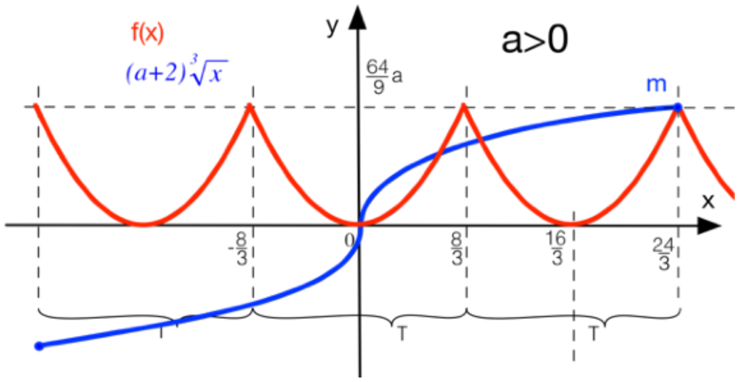
$\frac{64}{9}a = (a+2)\sqrt[3]{-\frac{24}{3}} => \quad a = -\frac{18}{41}$,

пойдет!



3) a > 0: График функции f перевернулся. Аналогичные рассуждения про точку m. Условие:

$\frac{64}{9}a = (a+2)\sqrt[3]{\frac{24}{3}} => \quad a = \frac{18}{23}$, ***пойдет!***



Ответ: $a = -\frac{18}{41}, \frac{18}{23}$

Вот и всё про функции. Получилось много, зато всё по делу.