Физика - Вращение

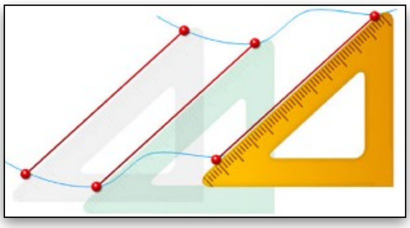
Вращение и Поступательное движение - две составляющие любого движения.

"Вращается флюгер вокруг оси -
Показывает ветер.
Вращается Солнце вокруг Земли -
Обогревает Землю.
Вращается папа вокруг мамы -
Наверное, провинился."
Олег Бундур

Мы привыкли к тому, что всё вокруг нас вращается: колеса автомобилей, стрелки часов, Земля вокруг своей оси, Земля вокруг Солнца, голова наша, когда мы глядим в разные стороны.

А еще мы знаем другой вид движения - ***поступательное движение***.

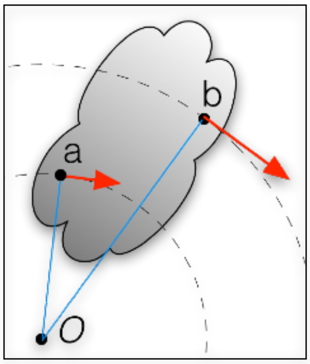
Дадим строгие определения:



Поступательное движение - это механическое движение тела, при котором отрезок прямой, соединяющий две любые точки этого тела, не именяется в размере и остаётся параллельным своему положению в любой предыдущий момент времени. При поступательном движении все точки тела описывают одну и ту же траекторию и в любой момент времени имеют одинаковые по направлению и абсолютной величине векторы скорости и ускорения. Это относится как движению в одной плоскости, так и к движению в пространстве.

Чашки весов движутся поступательно (но не прямолинейно)

Прямолинейное движение - механическое движение, происходящее вдоль прямой линии. То есть, при прямолинейном движении материальной точки траектория представляет собой прямую линию. ***Прямолинейное движение является частным случаем поступательного движения***.



Вращательное движение - это вид механического движения, при котором ***материальная точка*** описывает окружность. При вращательном движении абсолютно твёрдого тела все его точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Центры всех окружностей лежат при этом на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой ***осью вращения***. Если ось вращения расположена внутри тела, то говорят, что тело вращается само по себе. Если ось вращения расположена вне тела, то говорят об ***орбитальном вращении*** (пример - Земля вокруг Солнца).

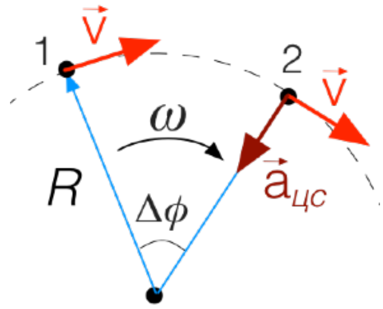
Тело может участвовать в нескольких вращательных движениях одновременно: примером тому опять же является наша Земля - Земля вращается вокруг своей оси и вращается вокруг Солнца.

Любое механическое движение тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательных движений!

Будем далее говорить о вращательном движении.

Кинематика вращательного движения материальной точки

Напомню: Материальная точка - тело, размерами и формой которого можно пренебречь в условиях данной задачи.
Начнем с простого. *Так, как объясняют в школе.*

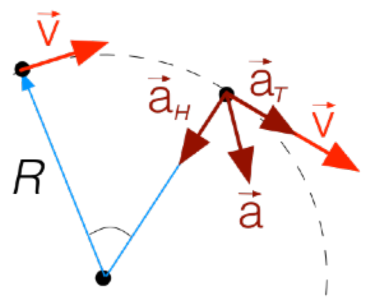


Равномерное вращение

Материальная точка (тело) совершает *равномерное вращательное* (круговое) движение в плоскости вокруг фиксированного центра.
Что значит равномерное? Это значит, что *за любые два равных интервала времени эта материальная точка поворачивается на один и тот же угол.*
Пусть: R - радиус вращения; $\Delta\varphi$ - угол (давайте договоримся измерять его в радианах - так принято), на который повернулась материальная точка за время Δt.
Для равномерного вращательного движения вводятся понятия:

- *угловая скорость вращения тела*: $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ [радиан/с]. Ну, а, зная что такое производная, можно записать и так: $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$;
- зная угловую скорость равномерного вращения, можно определить *угол поворота* за время Δt: $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$ [радиан];
- зная угол поворота точки, можно определить её *линейное перемещение* по окружности: $s = \Delta\varphi \cdot R$ [м];
- *период вращения* - время, за которое тело совершает один полный оборот: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ [с];
- *частота вращения* - число полных оборотов, совершаемых телом за единицу времени: $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ [с$^{-1}$]; или $\omega = 2\pi \cdot \nu = \dfrac{2\pi}{T}$;
- *линейная скорость* движения тела по окружности $v = \omega \cdot R$ [м/с]. Линейная скорость (как и всякая другая скорость) - это вектор. Вектор линейной скорости направлен по касательной к окружности движения (перпендикулярно к радиусу);
- поскольку при равномерном вращении величина вектора скорости не меняется, но меняется его направление, то возникает *центростремительное ускорение* $a_{цс}$, вектор которого направлен к центру вращения (перпендикулярно к касательной) - его также называют *нормальным ускорением* a_H: $a_H = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$ [м/с^2].

Неравномерное вращение



Очевидно, что тело может совершать и неравномерное вращательное движение: *за равные интервалы времени поворачиваться на разные углы.*
Пусть угол поворота тела изменяется по закону $\varphi = f(t)$. Тогда:

- угловая скорость: $\omega(t) = \dfrac{d\varphi}{dt}$ (производная от $\varphi(t)$);
- угловое ускорение: $\varepsilon(t) = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ [рад/с^2] (вторая производная от $\varphi(t)$);
- линейная скорость: $v(t) = \omega(t) \cdot R = \dfrac{d\varphi}{dt} \cdot R$;

- полное ускорение при неравномерном вращательном движении складывается (векторно) из двух ускорений: нормального и тангенциального ускорений.
- нормальное (оно же - центростремительное) ускорение обуславливается изменением ***направления*** вектора скорости. Вектор нормального ускорения направлен по нормали (перпендикулярно) к касательной - то есть по радиусу вращения и так же, как и в случае равномерного вращения, равен $a_H = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$;
- тангенциальное ускорение обуславливается изменением ***величины*** вектора скорости и его вектор направлен по касательной к окружности вращения: $a_T = \varepsilon \cdot R$;
- величина полного ускорения тела определяется как: $a^2 = a_H^2 + a_T^2$.

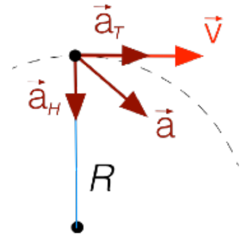
Равнопеременное вращение

Равнопеременное вращение - частный случай неравномерного вращения. При равнопеременном вращении постоянно угловое ускорение $\varepsilon = const$ (аналогично ему равнопеременное прямолинейное движение - движение с постоянным линейным ускорением). Тогда:
- угловая скорость: $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$, где ω_0 - начальная угловая скорость;
- угол поворота: $\varphi = \omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$, где ω_0 - начальная угловая скорость.

Давайте теперь сравним известные нам формулы кинематики

Прямолинейное движение		Вращательное движение	
		Равномерное	
путь	$s = v \cdot t$	угол	$\varphi = \omega \cdot t$
скорость	$v = const$	угловая скорость	$\omega = const$
ускорение	$a = 0$	угловое ускорение	$\varepsilon = 0$
		Равнопеременное	
путь	$s = v_0 \cdot t \pm \frac{a \cdot t^2}{2}$	угол	$\varphi = \omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
скорость	$v = v_0 \pm a \cdot t$	угловая скорость	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$
ускорение	$a = const$	угловое ускорение	$\varepsilon = const$
		Неравномерное	
путь	$s = f(t)$	угол	$\varphi = f(t)$
скорость	$v = \frac{ds}{dt}$	угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
ускорение	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Заметили, как похожи формулы?



Давайте решим задачку №1: Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, выражаемому формулой $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$. Найти величину полного ускорения точки, находящейся на расстоянии $R = 0{,}1$ м от оси вращения для момента времени *t=4 с.*

Решение: Вращение - неравномерное.

Угловая скорость: $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = (10 + 20t - 2t^2)' = 20 - 4t$ (продифференцировали по t);

Угловое ускорение: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = (20 - 4t)' = -4$ рад/с² (продифференцировали по t).

Ага, $\varepsilon = const = -4$ рад/с² - вращение ***равнопеременное***.

Полное ускорение: $a^2 = a_H^2 + a_T^2$. Тангенциальное ускорение: $a_T = \varepsilon \cdot R = -4R$.

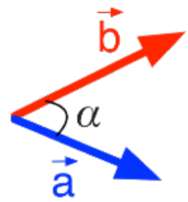
Нормальное ускорение: $a_H = \omega^2 \cdot R = (20 - 4t)^2 \cdot R$.

При *t=4 с* $a_T = -4R = -0{,}4$ м/с² и $a_H = (20 - 4 \cdot 4)^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}6$ м/с²

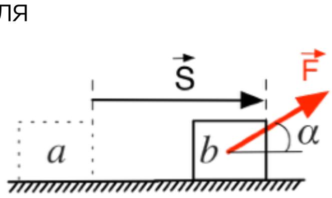
Полное ускорение $a = \sqrt{a_H^2 + a_T^2} = \sqrt{0{,}4^2 + 1{,}6^2} = 1{,}65$ м/с²

===============

Ну, вроде бы, всё понятно и логично. Но это - на первый взгляд. Вот в чём закавыка. Изучая физику, мы привыкли к тому, что одни физические величины являются скалярами (характеризуются лишь величиной - масса, энергия и пр.), а другие - векторами (характеризуются как величиной, так и направлением - скорость, ускорение, сила, напряженность электрического поля и пр.) Вот второй закон Ньютона выражается формулой $\vec{F} = m\vec{a}$ в векторном виде. Здесь всё понятно: $\vec{F}$ и $\vec{a}$ - векторы, m - скаляр. Мы можем записать это векторное уравнение в проекциях на оси и решать его алгебраически в соответствии с условиями задачи. Но в формулах кинематики вращения (так, как преподают в школе) нет никаких векторных выражений: $v = \omega \cdot R$, $a = \omega^2 \cdot R$, хотя и скорость, и ускорение - уж точно вектора! А угловая скорость ω - это вектор? Школа застенчиво молчит по этому поводу. Давайте внесем ясность. Для общего понимания картины физики это важно.

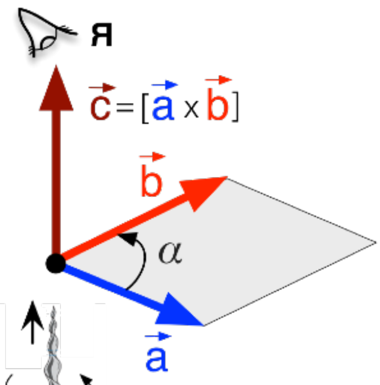


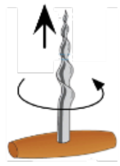
Вы знакомы из школьного курса геометрии с понятием скалярного произведения векторов. *Скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число ***c*** (скаляр), равное $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\alpha$. Так и обозначается: $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$. Скалярное произведение из двух векторов получает число. В физике оно применяется для определения, например, работы силы: при перемещении тела из точки a в точку b силой F, направленной под углом α к линии перемещения, работа силы F равна $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot cos\alpha$.



Всё понятно. Детские мозги переварили и усвоили это знание.

Но в физике, в которой очень много разных векторов, не все закономерности описываются ***скалярным*** произведением. Поэтому физика позаимствовала у математики и широко использует (я имею в виду - "взрослая" физика) понятие ***векторного произведения векторов***. Если скалярное произведение векторов - это "плоский случай" (два вектора с общей начальной точкой всегда лежат в одной плоскости), то ***векторное произведение векторов рассматривается в трехмерном пространстве***. Надо немного включить пространственное воображение.





Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что:

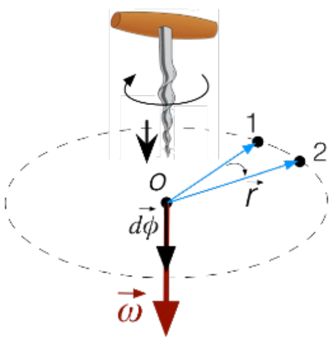
- длина этого вектора численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах (а именно $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\alpha$).
- вектор $\vec{c}$ **перпендикулярен** к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть из конца вектора $\vec{c}$, то поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ осуществляется ***против часовой стрелки*** *(или это направление определяется по* ***правилу правого винта - правилу буравчика****)*.

Обозначается $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ (иногда просто $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$). Векторное произведение двух векторов дает вектор. Основные свойства векторного произведения:

- векторное произведение двух коллинеарных (параллельных, α=0) векторов равно 0; частный случай: $[\vec{a} \times \vec{a}] = \vec{0}$;
- $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$ - векторное произведение некоммутативно!

Не сложно? Надо лишь аккуратненько следить за направлением вектора $\vec{c}$ и будет нам счастье. Векторное произведение резко упрощает запись векторных формул в физике, делает их легкими для чтения и понимания. Один раз поняв и запомнив что такое векторное произведение, вы в дальнейшем не будете путаться с "правилами правой-левой руки и задней ноги", которыми вас научили в школе.

Так вот, вооруженные знанием про векторное произведение, возвращаемся к кинематике вращательного движения.

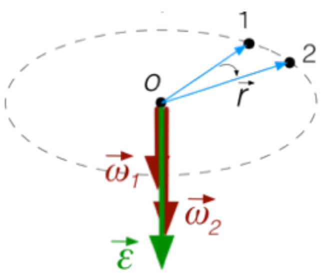


Пусть тело (материальная точка) за малое время dt повернулось вокруг центра вращения O на угол величиной $d\varphi$ - перешло из точки 1 в точку 2.

Вводится понятие ***вектор углового перемещения*** $\overrightarrow{d\varphi}$: численно он равен величине угла $d\varphi$, а направление его задается по правилу правого винта - правилу буравчика. И уж вектор углового перемещения $\overrightarrow{d\varphi}$ ***полностью определяет угловое перемещение***: как величину, так и направление.

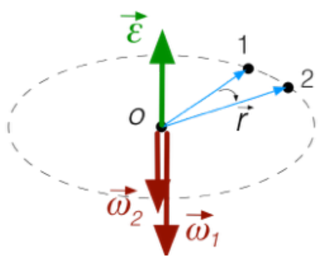
Но ведь угловая скорость тоже должна быть вектором: для неё характерна как величина, так и направление вращения! Да! И векторная формула для угловой скорости имеет вид: $\vec{\omega} = \dfrac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}$.

Угловая скорость - вектор! Этот вектор направлен так же, как и вектор $\overrightarrow{d\varphi}$.



А угловое ускорение? По определению $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}$.

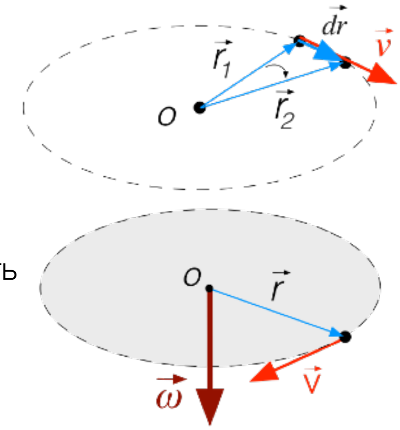
Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ - тоже вектор. Если при движении тела из точки 1 в точку 2 угловая скорость возросла, то вектор углового ускорения будет сонаправлен вектору угловой скорости и наоборот.



Под конструкциями $\dfrac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}$ и $\dfrac{\overrightarrow{d\omega}}{dt}$ ***имеется в виду производная по времени***!!!

Так, что нам осталось одеть в "векторные" одежды? Ага, линейную скорость.

Положение тела на окружности вращения полностью определяется ***радиус-вектором*** $\vec{r}$, таким, что начало этого вектора лежит в центре вращения O, а конец этого вектора совпадает с местом текущего положения тела на окружности. Длина этого вектора равна радиусу вращения. Понятие радиус-вектора - базовое понятие для рассмотрения ***любых видов движения*** в механике.



По определению скорость $\vec{v} = \dfrac{\vec{dr}}{dt}$ (любая скорость!)

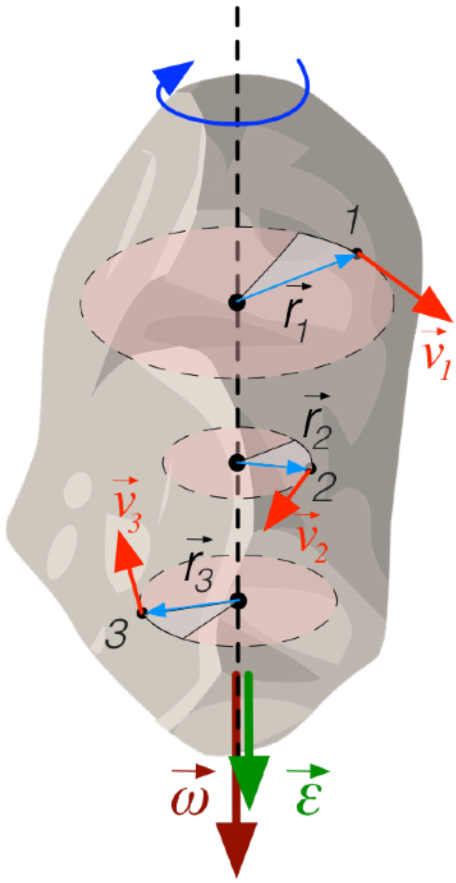
Но это общее определение. Как нам связать скорость с параметрами вращения? Если присмотреться к рисунку в уже привычных нам векторах, то векторная формула для линейной скорости будет выглядеть так: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (векторное произведение!!!).

Полное ускорение по определению $\vec{a} = \dfrac{\vec{dv}}{dt}$.

Хорошо, ну и чего мы добились, познакомившись с этими векторными формулами? Во-первых, физические величины-параметры вращения обрели свой векторный смысл в формулах. Это важно для понимания физической картины. В дальнейшем мы будем ими пользоваться. Во-вторых, когда вы начнете учиться в техническом вузе, вам с первых же недель курсов физики и математики придётся пользоваться этими векторными понятиями - так устроены "взрослые" физика и математика. Привыкайте, тем более, что ничего архи-сложного в этом нет.

А что же делать с теми формулами, которые нам давали в школе? Хоть они и не отражают векторный смысл параметров вращения, они прекрасно подходят для определения их величин. Поэтому для расчетов значений пользуйтесь ими.

Кинематика вращательного движения твердого тела



В отличие от материальной точки твёрдое тело имеет объём, распределение массы по объёму, внутреннюю структуру. Но что мы понимаем под понятием твёрдое тело? Мы понимаем то, что ***любые две (а также три, четыре и т.д.) точки твёрдого тела сохраняют друг относительно друга постоянное положение при всех возможных видах движения.*** В отличие от резинового-пластилинового тела.

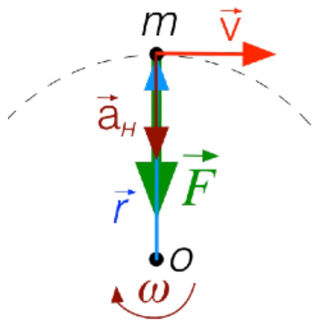
Представим себе твёрдое тело, вращающееся вокруг вертикальной оси. При вращении твёрдого тела каждая из его точек вращается в плоскости, проходящей через эту точку и перпендикулярную оси вращения. При этом каждая из точек описывает окружности. А поскольку тело твёрдое, то ***за одинаковые интервалы времени каждая из точек поворачивается на один и тот же угол***. А значит *у всех точек вращающегося твёрдого тела одинаковы углы поворота, угловые скорости и угловые ускорения*.

Поэтому задача кинематического описания вращения твёрдого тела сводится к кинематическому описанию вращения любой (или всех) его точек. А это делать мы уже умеем.

Динамика вращательного движения материальной точки

Кинематика описывает ***как*** тело вращается и не отвечает на вопрос ***почему*** оно вращается. На вопрос "почему" отвечает динамика.

Динамика - раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения. Динамика оперирует понятиями масса, сила, импульс, момент импульса (вот об этом мы и будем говорить), энергия. Динамика решает две взаимно обратные задачи: по заданному закону движения тела определяет равнодействующую сил, действующих на тело, и по заданным силам определяет закон движения тела. Основу динамики образуют ***три закона Ньютона***, о которых мы подробно говорили в Истории про силы.

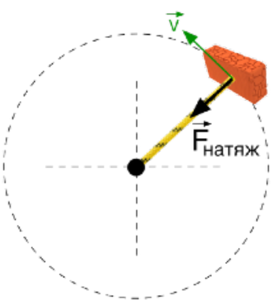


Рассмотрим уже привычный для нас пример: материальная точка (тело) массой m (ага, вводим массу материальной точки!) равномерно вращается по окружности с постоянной угловой скоростью ω. Мы подробно рассмотрели такое вращение в предыдущем разделе.

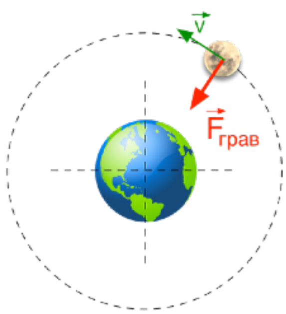
Один из выводов Первого закона Ньютона говорит: ***если тело движется не по прямой, то ищите силы, на него действующие***. Вращение - это как раз движение не по прямой. Значит на вопрос "почему наша материальная точка вращается" у нас уже готов ответ: на неё действует сила.

Мы уже знаем, что при равномерном вращении по окружности с постоянной угловой скоростью ω материальная точка движется с ***нормальным*** (центростремительным) ***ускорением*** $a_H = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$, направленным по радиусу вращения. Тогда по Второму закону Ньютона величина силы, это вращение порождающей, равна $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a_H}$. Силу эту называют ***центростремительной***. Центростремительная сила - эта сила, которая действует в перпендикулярном к линии движения направлении и сворачивает тело с прямолинейной траектории. ***Центростремительная сила - это НЕ какой-то специальный вид сил.*** Центростремительная сила - это роль (функция), которую играют те или иные силы в конкретных физических условиях.

Заметьте, что в процессе вращения центростремительная сила постоянно меняет свое направление - она всё время смотрит на центр вращения!!!



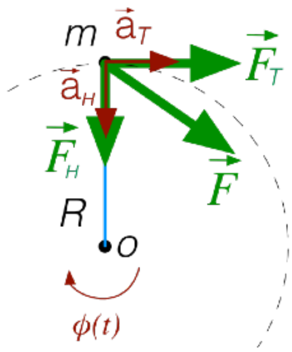
При вращении по кругу кирпича на веревке центростремительной силой является сила натяжения веревки. Сила гравитационного притяжения является центростремительной силой, действующей на Луну при ее орбитальном вращении вокруг Земли. Для мотоциклиста в повороте центростремительной силой является сила трения. Сила электростатического притяжения (кулоновская сила) является центростремительной для электрона, вращающегося вокруг ядра атома (если не вдаваться в квантовую природу микромира). И так далее.



Еще раз и на всю жизнь:

> *Центростремительная сила - это роль (функция), которую играют те или иные силы в конкретных физических условиях, сворачивающие тело с прямолинейной траектории движения.*

А как рассчитать вращательное движение, если к материальной точке приложена сила $\vec{F}$, направленная под некоторым углом (как на рисунке)?



Поступаем так: разлагаем силу $\vec{F}$ на две составляющие: нормальную (центростремительную) $\overrightarrow{F_H}$ и тангенциальную $\overrightarrow{F_T}$. По Второму закону Ньютона $\overrightarrow{F_H} = m \cdot \overrightarrow{a_H}$ и $\overrightarrow{F_T} = m \cdot \overrightarrow{a_T}$. Дальше уже можно писать не в векторах, а в проекциях на соответствующие оси.

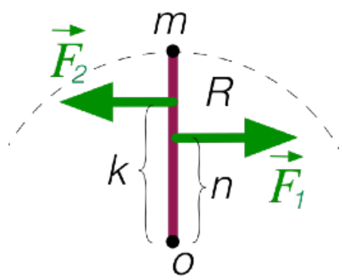
Из кинематики вращения материальной точки мы знаем, что:
$a_H = \omega^2 \cdot R = (\frac{d\varphi}{dt})^2 \cdot R$; $a_T = \varepsilon \cdot R = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot R$ (ω - угловая скорость; ε - угловое ускорение)

Поэтому получаем два уравнения: $F_H = m \cdot (\frac{d\varphi}{dt})^2 \cdot R$ и $F_T = m \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot R$. В зависимости от того, что дано в задаче, можем найти остальные параметры.

Ну вот, с динамикой вращения материальной точки разобрались.

Динамика вращательного движения твёрдого тела

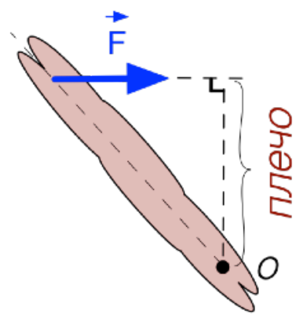
А давайте попытаемся решить вот какую задачу: материальная точка массы m прикреплена невесомым жестким стержнем длины R к фиксированному центру вращения O. К стержню на расстоянии n от точки O приложена перпендикулярная сила $\overrightarrow{F_1}$, а на расстоянии k от точки O приложена противоположная перпендикулярная сила $\overrightarrow{F_2}$ - как показано на рисунке. Опишите движение материальной точки.



Если внимательно посмотреть на условия задачи, то станет понятно, что динамика вращательного движения материальной точки, как мы её рассмотрели выше, в данном случае не работает. Почему? Ведь у нас есть материальная точка, стержень невесом. Это да, но когда мы говорим о материальной точке, то мы подразумеваем то, что она не имеет размера. И все силы, которые на неё действуют, должны быть приложены именно к ней. А в нашем случае конструкция "невесомый стержень + материальная точка" имеет размеры и *силы приложены к разным точкам* этой конструкции. Поэтому эту задачу надо уже решать ***методами динамики вращательного движения твёрдого тела***.

Но сначала я напомню вам о разделе механики, который вы изучали в школе - о ***Статике***. Статика изучает равновесие тел. Именно тел, а не материальных точек. В статике тела имеют пространственный размер. В статике рассматривается равновесие тел как в смысле поступательного движения, так и вращения. Вот именно из-за последнего мы и вспоминаем статику.

В статике есть понятие момент силы относительно оси (точки) вращения. *Момент силы относительно точки вращения* - это произведение величины этой силы на плечо действия этой силы относительно точки вращения. ***Плечом*** действия силы называют величину перепендикуляра, опущенного из точки вращения (возможного вращения) на линию действия силы.

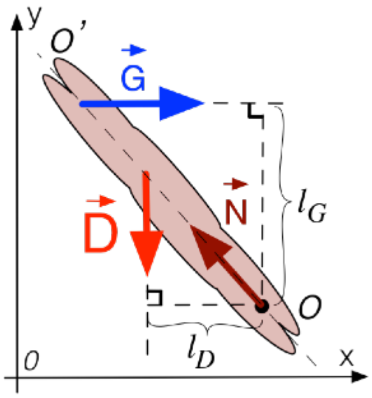


Момент силы = величина силы · плечо

В рамках каждой задачи моменты сил разделяются на моменты, вращающие (пытающиеся вращать) тело против часовой стрелки и моменты, вращающие (пытающиеся вращать) тело по часовой стрелке.

Школьная статика опять-же застенчиво не уточняет: а момент силы - это вектор или скаляр? Ничего, чуть позже мы уточним.

Так вот, статика утверждает, *что **условием отсутствия вращения** тела относительно данной оси (точки) является **равенство сумм моментов сил**, приложенных к данному телу, вращающих (пытающихся вращать) тело **против** часовой стрелки и сумм моментов сил, приложенных к данному телу, вращающих (пытающихся вращать) тело **по** часовой стрелке.* Для тела на рисунке условием отсутствия вращения относительно точки О будет условие:



$\left|\vec{G}\right| \cdot l_G = \left|\vec{D}\right| \cdot l_D$ *(сила $\vec{N}$ проходит через точку О и момента не создает - её плечо равно 0).*

Ну а условием отсутствия ***поступательного*** движения является равенство нулю векторной суммы всех сил, приложенных к телу (из второго закона Ньютона).

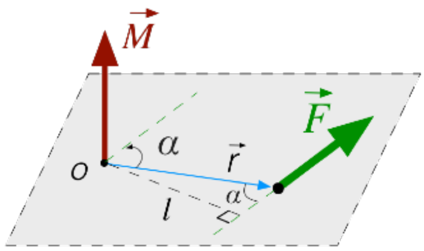
Этими методами статики решаются задачи поиска условий равновесия, подъёма грузов с помощью рычагов, поиска центров тяжести и пр.

========

Мы возвращаемся к динамике вращения твёрдого тела. Введем несколько важных понятий.

Для начала мы позаимствуем у статики понятие момента силы. Только лишь немного уточним.

→ ***Момент силы*** относительно точки О - это ***вектор***, равный векторному произведению радиус-вектора, построенного от точки О к точке приложения силы, и вектора силы: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ [н·м]

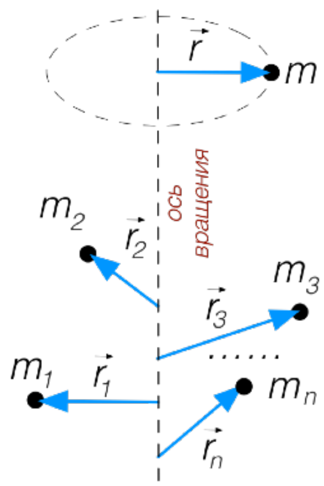


Тогда условие отсутствия вращательного движения в статике можно переформулировать так: ***векторная сумма моментов равна нулю***. Ведь проще же! Если присмотреться к рисунку, то "школьное" определение величины момента силы из него геометрически вытекает.

→ Важнейшее понятие динамики вращательного движения твёрдого тела - ***момент инерции***. Подобно тому, как масса является мерой инертности тела при его поступательном движении, момент инерции является мерой инертности тела при его вращательном движении.
В общем случае понятие момента инерции надо рассматривать в трехмерном пространстве.
Момент инерции материальной точки относительно неподвижной оси вращения - скалярная величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от этой точки до оси вращения: $J = m \cdot r^2$ [кг·м²]
Соответственно момент инерции нескольких материальных точек:

$$J = \sum_{1}^{n} m_i \cdot r_i^2$$

*(моменты инерции относительно одной и той же оси аддитивны). **Моменты инерции тел (относительно одной и той же оси вращения), входящих во вращающуюся систему тел, можно складывать.***

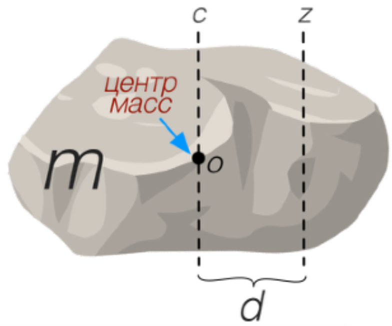


Напомню еще одно понятие, которое вы проходили в школе - ***центр масс*** (центр инерции).

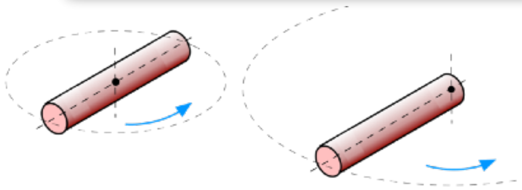
Центр масс тела - геометрическая точка, характеризующая движение тела как целого. Если на тело не действуют внешние силы, то центр масс тела движется с постоянной по величине и направлению скорости. Центр масс нескольких материальных точек (радиус-вектор центра масс) считается как $\vec{r_c} = \dfrac{\sum m_i \cdot \vec{r_i}}{\sum m_i}$.

> ***Чтобы избежать путаницы***. Есть ещё одно похожее понятие - *центр тяжести* тела: точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести, действующих на тело, равен нулю. Центр масс и центр тяжести совпадают в однородном гравитационном поле.

Ещё одно важное свойство момента инерции тела: *момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс этого тела, и параллельной данной оси, и произведению массы тела на квадрат расстояния между осями* (***теорема Гюйгенса - Штейнера***):
$J_Z = J_C + m \cdot d^2$ (оси C и Z параллельны). Эта теорема облегчает вычисление момента инерции тела относительно произвольной оси.

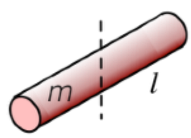
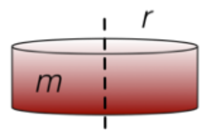
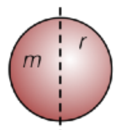


> Момент инерции твёрдого тела относительно какой-либо оси зависит от массы, формы, распределения массы по объёму тела, а также от положения тела относительно этой оси.



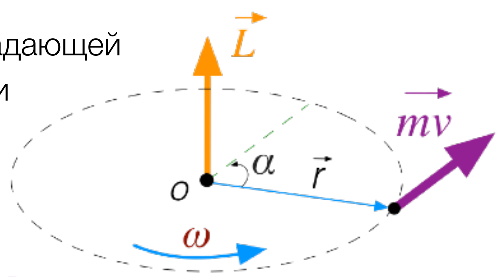
Вы, наверное, понимаете из жизненного опыта, что вращать стержень за его центр легче, чем за его кончик? Разные моменты инерции в обоих случаях это объясняют.

В табличке приведены формулы для расчета момента инерции простейших тел (*ось вращения проходит через центр масс*). В справочниках вы можете найти формулы и для многих других тел.

	Тело	Момент инерции
	Стержень (цилиндр) длины l и массой m	$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
	Сплошной цилиндр радиуса r и массой m	$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
	Шар радиуса r и массой m	$J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$

И ещё одно важное понятие динамики вращательного движения твёрдого тела - *момент импульса (момент количества движения)*.

Момент импульса характеризует количество вращательного движения. Это величина, зависящая от того, сколько массы вращается, как она распределена относительно оси вращения и с какой скоростью происходит вращение.



Для материальной точки, вращающейся вокруг центра O, и обладающей механическим импульсом $\overrightarrow{mv}$, моментом импульса $\vec{L}$ этой точки относительно O называют векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, построенного от O к материальной точке, и вектора импульса $\overrightarrow{mv}$: $\vec{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{mv}$ [м²·кг/с]

Для системы точек $\vec{L} = \sum \vec{L_i}$ (*момент импульса аддитивен - моменты импульса каждой точки (тела) вращающейся системы можно складывать*).

Для ***вращающегося абсолютно твёрдого тела*** справедливо соотношение: $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$, где $\vec{L}$ - момент импульса абсолютно твёрдого тела, J - момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости, с которой вращается тело.

==========

Коль уж мы с вами рассматриваем динамику вращательного движения твёрдого тела, которую в школе не рассматривают, то и приходится использовать "взрослые" приемы: векторные произведения, представление векторов вращения в пространстве. В этом ничего нет сложного. Привыкайте.

Итак, введено несколько новых понятий:

Момент силы $\vec{M}$ - мера внешнего вращательного воздействия на тело;

Момент инерции J - мера инертности тела при вращении;

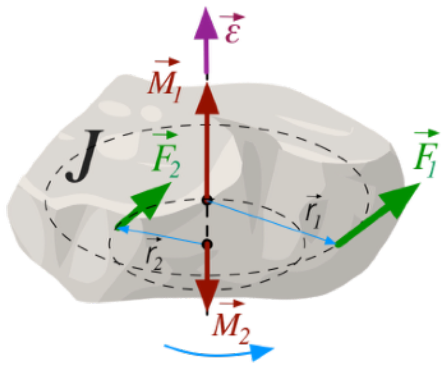
Момент импульса (количества движения) $\vec{L}$ - мера количества вращательного движения в теле.

Сейчас мы увидим как это всё работает для решения задач динамики вращательного движения твёрдого тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела

Если к твёрдому телу, вращающемуся вокруг данной оси, приложены силы, создающие вращательные моменты, то векторная сумма этих моментов пропорциональна угловому ускорению вращения тела: $\sum \vec{M_i} = J \cdot \vec{\varepsilon}$, где J - момент инерции тела относительно оси вращения.

Это уравнение называется ***основным уравнением вращательного движения твёрдого тела.***



На рисунке $\vec{M_1} + \vec{M_2} = J \cdot \vec{\varepsilon}$.

Непонятно? А вот очень похожая формула: $\sum \vec{F_i} = m \cdot \vec{a}$ ($\sum \vec{F_i}$ - векторная сумма сил, приложенных к телу, m - масса тела, $\vec{a}$ - ускорение тела). Она вам знакома? Ну конечно, это второй закон Ньютона для поступательного движения. Уж мы то привыкли использовать его во всех задачках про поступательное движение.

Так же, как второй закон Ньютона даёт основное уравнение для поступательного движения, так же и формула $\sum \vec{M_i} = J \cdot \vec{\varepsilon}$ *является основным уравнением для вращательного движения*.

При этом векторная сумма моментов сил $\sum \vec{M_i}$ (как мера внешнего вращательного воздействия) аналогична векторной сумме сил $\sum \vec{F_i}$ (как мере внешнего поступательного воздействия). Момент инерции J (как мера инертности тела при вращении) аналогична массе m (как мере инертности тела при поступательном движении). Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ (как кинематическая характеристика вращательного движения) аналогична вектору ускорения $\vec{a}$ (как кинематической характеристике поступательного движения).

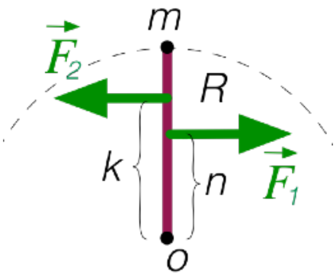
И ещё про одну аналогию поступательного и вращательного движения хочу сказать. При поступательном движении импульс тела (импульс также называют *количеством движения*) определяется как $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ - это нам знакомо. При вращательном движении момент импульса тела (момент количества движения) выражается как $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$. И опять аналогии:

- $\vec{p}$ - количество поступательного движения тела ↔ $\vec{L}$ - количество вращательного движения тела;
- m - мера инертности тела при поступательном движении ↔ J мера инертности тела при вращении;
- $\vec{v}$ - кинематическая характеристика поступательного движения ↔ $\vec{\omega}$ - кинематическая характеристика вращательного движения.

Ну про аналогии поступательного и вращательного движений мы ещё поговорим.

А применим-ка мы основное уравнением вращательного движения к той задачке, что мы не смогли решить. Напоминаю:

Задача: материальная точка массы m прикреплена невесомым жестким стержнем длины R к фиксированному центру вращения O. К стержню на расстоянии n от точки O приложена перпендикулярная сила $\vec{F_1}$, а на расстоянии k от точки O приложена противоположная перпендикулярная сила $\vec{F_2}$ - как показано на рисунке. Опишите движение материальной точки.



Основное уравнением вращательного движения $\sum \vec{M_i} = J \cdot \vec{\varepsilon}$. Можно записать это уравнение не в векторной форме, а в скалярной, по старинке подразумевая, что моменты сил, вращающих тело против часовой стрелки положительны и наоборот. Положительная величина углового ускорения будет означать, что тело вращается с возрастающей угловой скоростью и наоборот. Момент инерции конструкции "невесомый стержень + материальная точка" (относительно точки вращения O) будет равен просто моменту инерции материальной точки относительно точки вращения O: $J = m \cdot R^2$.

Тогда: $F_2 \cdot k - F_1 \cdot n = m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$, откуда легко найти угловое ускорение ε.
Ура, работает!

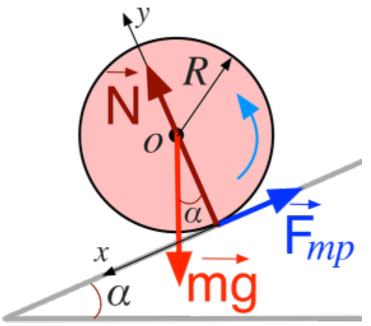
==========

Опять про аналогию. Второй закон Ньютона может быть записан в импульсной форме (вы это проходили): $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$ или: $F = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, где p - импульс поступательного движения тела. Или уж совсем "по-взрослому": $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ - вектор равнодействующей всех сил, действующих на тело при поступательном движении, равен производной по времени вектора импульса тела. На основании этого уравнения формулируется закон сохранения механического импульса при поступательном движении.

Есть для вращательного движения аналогичная формула: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ - ***суммарный вектор всех моментов сил, действующих на тело при вращательном движении, равен производной по времени вектора момента импульса тела***.

Основное уравнение вращательного движения тела можно записывать не только относительно неподвижной или равномерно движущейся оси, но и относительно оси, движущейся с ускорением. Оно не изменяет своего вида и в случае ускоренно движущихся осей при условии, что ось вращения проходит через центр массы тела и что ее направление в пространстве остается неизменным.

Задача №2: по наклонной (угол α) плоскости скатывается цилиндр радиуса R с трением без проскальзывания. Опишите движение цилиндра.



Решение: Скатываясь с плоскости, цилиндр вращается вокруг оси О, проходящей через центр масс цилиндра. На цилиндр действуют три силы: сила тяжести $\overrightarrow{mg}$, сила реакции опоры $\overrightarrow{N}$ и сила трения $\overrightarrow{F_{TP}}$.

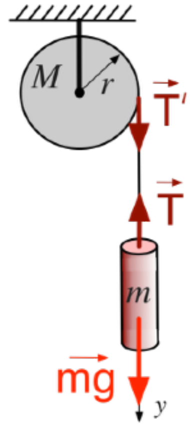
- $\overrightarrow{mg}$ приложена к центру масс О $\Rightarrow$ вращательного момента силы не создаёт (плечо равно 0);
- $\overrightarrow{N}$ проходит через центр масс О $\Rightarrow$ вращательного момента силы не создаёт (плечо равно 0);
- $\overrightarrow{F_{TP}}$ - создаёт момент $M = F_{TP} \cdot R$ (*заметьте, что цилиндр, скатываясь, вращается только из-за наличия силы трения. Не было бы её - цилиндр бы просто соскальзывал*). А поскольку цилиндр скатывается без проскальзавания, то эта сила трения - ***сила трения покоя!***

→ ***Цилиндр участвует в двух движениях: поступательном и вращательном.***

Поступательное движение центра масс цилиндра будем описывать вторым законом Ньютона (ВЗН). ВЗН "не знает и знать не хочет" про вращательное движение цилиндра. Оси указаны на рисунке. Тогда ВЗН для центра масс цилиндра в проекции на ось X: $ma = mg \cdot sin\alpha - F_{TP}$ [1], где a - линейное ускорение центра масс цилиндра.
Вращательное движение будем описывать основным уравнением вращательного движения (УВД). УВД "не знает и знать не хочет" про поступательное движение цилиндра. УВД для вращения цилиндра вокруг оси О: $M = J \cdot \varepsilon$, где $M = F_{TP} \cdot R$ - момент силы трения, J - момент инерции цилиндра относительно оси О, ε - угловое ускорение вращения цилиндра относительно оси О.
Но $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ - кинематическая связка углового ускорения и линейного. ***Эта связка связывает поступательное и вращательное движения.*** Тогда УВД примет вид: $F_{TP} \cdot R = J \cdot \dfrac{a}{R}$ [2].
Исключая из [1] и [2] F_{TP}, получим: $a = \dfrac{mg \cdot sin\alpha}{\dfrac{J}{R^2} + m}$. Момент инерции цилиндра относительно оси О равен $J = \dfrac{1}{2}m \cdot R^2$ (см. табличку). Тогда $a = \dfrac{2g \cdot sin\alpha}{3}$. Заметьте, что если бы скатывался не цилиндр, а ***шар*** (уравнения ВЗН и УВД остались бы без изменений), у которого $J = \dfrac{2}{5}m \cdot R^2$, то $a = \dfrac{5g \cdot sin\alpha}{7}$, то есть *шар скатывался бы быстрее за счет меньшего момента инерции*.

Главное в этой простенькой задаче:

- цилиндр участвует в двух движениях: поступательном и вращательном
- поступательное движение центра масс цилиндра описывается ВЗН
- вращательное движение цилиндра описывается УВД
- не забывайте про кинематические связки: $a = \varepsilon \cdot R$ и $v = \omega \cdot R$
- УВД можно записывать и относительно оси, движущейся с ускорением



Помните, ранее в задачах динамики поступательного движения, если участвовал блок, то говорилось "невесомый блок". Тем самым подразумевалось, что у него нет момента инерции и динамика его вращательного движения не учитывается. Теперь мы эту динамику учитываем. В системе, изображенной на рисунке, блок массой M участвует только во вращательном движении. Груз массой m участвует только в поступательном движении. А кинематическая связка $a = \varepsilon \cdot R$ эти движения связывает.

Закон сохранения момента импульса

С динамикой вращательного движения твёрдого тела познакомились. Основные принципы изложены. Можете решать задачи. Вы, наверное, заметили, что я постоянно ссылаюсь на аналогию поступательного и вращательного движений. Эта аналогия фундаментальна.

А что вы изучали в школе по теме поступательного движения после освоения динамики (второго закона Ньютона)? Напомню, вы изучали понятие импульса поступательного движения и закон сохранения импульса. Динамика вращательного движения твёрдого тела следует этим же путём. Мы рассмотрели понятие момента импульса вращательного движения $\overrightarrow{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{m\vec{v}} = J \cdot \overrightarrow{\omega}$ (аналог импульса поступательного движения $\overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{v}$) и его свойства. Настало время познакомиться с законом сохранения момента импульса при вращательном движении.

Закон сохранения момента импульса является одним из трёх фундаментальных законов сохранения в механике.

> *Фундаментальные законы сохранения в механике:*
> - закон сохранения импульса - *для поступательного движения*
> - закон сохранения момента импульса - *для вращательного движения*
> - закон сохранения энергии - *как для поступательного, так и для вращательного движений*

Напомню:
- импульс - вектор; момент импульса - вектор; энергия - скаляр;
- ***закон сохранения механической энергии***: в изолированной механической системе суммарная механическая энергия системы не изменяется. Под изолированной системой понимается система, на которую не влияют внешние воздействия. Проще говоря, в изолированной системе механическая энергия не исчезает и не появляется.
- ***закон сохранения импульса***: если векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то векторная сумма импульсов всех тел системы не изменяется. Проще говоря, в системе с нулевой суммой внешних сил импульс не исчезает и не появляется.

Закон сохранения момента импульса вытекает из основного уравнения динамики вращательного движения и формулируется так:

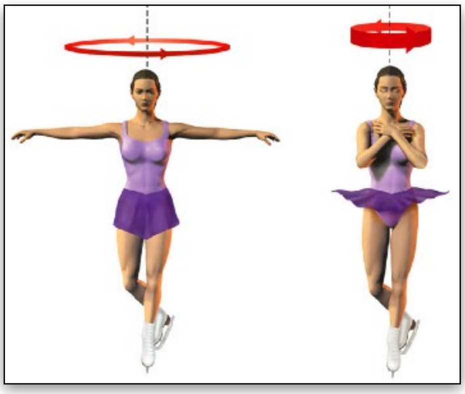
> Векторная сумма моментов импульсов всех тел замкнутой системы относительно данной точки (оси) не изменяется со временем. *Под замкнутой понимается такая система, для которой векторная сумма моментов всех внешних сил относительно данной точки (оси), действующих на систему, равна нулю.*

В системе с нулевой суммой моментов внешних сил момент импульса не исчезает и не появляется. Мы имеем в виду моменты импульсов относительно одной и той же точки (оси).

Для замкнутой системы математически это можно записать так: $\sum \overrightarrow{L_i} = J_S \cdot \overrightarrow{\omega} = const$, где $\overrightarrow{L_i}$ - момент импульса элемента системы, J_S - момент инерции системы, $\overrightarrow{\omega}$ - угловая скорость вращения системы. Или так: $\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = 0$, где $\overrightarrow{L}$ - момент импульса системы.

И как следствие из закона сохранения момента импульса: *момент импульса системы (тела) изменяется только в присутствии момента силы, направленной на его изменение.*

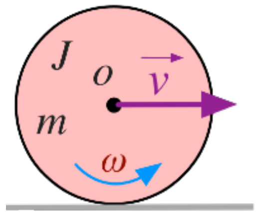
Классической иллюстрацией проявления закона сохранения момента импульса (ЗСМИ) - вращение фигуристки. Острый носок конька, которым фигуристка опирается на лёд, обеспечивает замкнутость системы (нет моментов внешних сил). Фигуристка начинает вращение, широко раскинув руки. А затем она руки прижимает, собирая массу своего тела ближе к оси вращения, тем самым уменьшая свой момент инерции. А коль момент инерции уменьшился, то из формулы ЗСМИ $J_S \cdot \vec{\omega} = const$ следует, что угловая скорость вращения должна возрасти, что и происходит - фигуристка начинает вращаться с бОльшей угловой скоростью (частотой).



Важное замечание: поскольку момент импульса является вектором, то при сложном вращении тела (вокруг нескольких осей) можно писать уравнения ЗСМИ по тем осям, по которым система является замкнутой.

Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия вращающегося тела задается формулой: $E_K = \dfrac{J \cdot \omega^2}{2}$, где J - момент инерции тела, ω - угловая скорость его вращения.

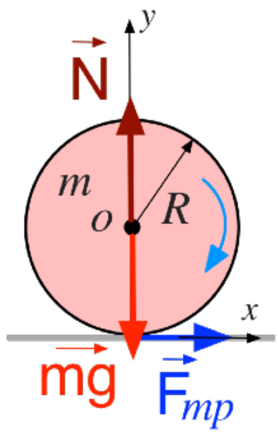


Если твёрдое тело движется поступательно и одновременно вращается с угловой скоростью вокруг оси, проходящей через его центр масс, то его кинетическая энергия определяется как сумма двух составляющих: $E_K = \dfrac{J \cdot \omega^2}{2} + \dfrac{m \cdot v^2}{2}$, где m - масса тела, v - скорость поступательного движения. Вы заметили как похожи выражения для поступательной и вращательной кинетической энергий.

Эти формулы применяются в тех задачах, где работает закон сохранения механической энергии.

А теперь давайте порешаем ещё задачек.

Задача №3: ***Динамика и кинематика вращения***. Цилиндр радиуса R раскрутили вдоль его основной оси до угловой скорости ω и опустили на горизонтальную плоскость. Цилиндр катится по плоскости с трением с коэффициентом k без проскальзывания ($F_{TP} = k \cdot N$). Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки и какой путь он пройдет?



Решение: В системе "цилиндр-плоскость" трение присутствует, но ***сила трения не совершает работы*** (цилиндр катится ***без проскальзывания***)! *Это сила трения покоя!* В мгновенной точке касания цилиндра с плоскостью сила трения позволяет цилиндру перевести свое вращательное движение в поступательное. Заметьте, что если бы трения не было, то цилиндр не катился бы по плоскости, а бесконечно вращался бы на месте. Благодаря трению он катится. Обратите внимание как направлена сила трения, приложенная к цилиндру: цилиндр норовит проскользнуть по плоскости, но сила трения покоя ему препятствует. Именно из-за такого направления силы трения угловая скорость вращения цилиндра гасится: вектор момента силы трения направлен против вектора угловой скорости.

Запишем основное уравнением вращательного движения для вращения цилиндра вокруг оси О: $F_{TP} \cdot R = J \cdot \varepsilon$, где $F_{TP} \cdot R$ - момент силы трения, J - момент инерции цилиндра относительно оси О, ε - угловое ускорение вращения цилиндра относительно оси О.

Момент инерции цилиндра относительно оси О равен $J = \dfrac{1}{2}m \cdot R^2$ (см. табличку).

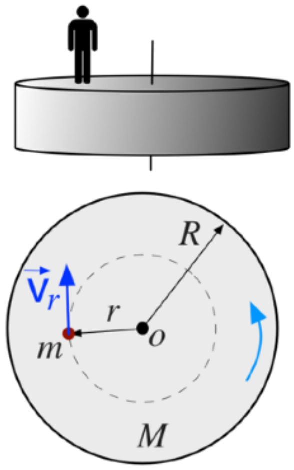
Но $F_{TP} = k \cdot N = k \cdot mg$. Тогда $k \cdot mg \cdot R = \dfrac{1}{2}m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$, откуда $\varepsilon = \dfrac{2kg}{R} = const$. То есть цилиндр будет замедляться с постоянным отрицательным угловым ускорением.
Сколько времени он будет замедляться (пока ω не станет 0): по кинематической формуле:

$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$ получаем: $0 = \omega - \varepsilon \cdot \tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \dfrac{\omega}{\varepsilon}$, где τ - время до останова. А на какой угол повернется цилиндр за время τ? По формуле $\varphi = \omega_0 \cdot t \pm \dfrac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$ получаем

$\varphi = \omega \cdot \tau - \dfrac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\omega^2}{2\varepsilon} = \dfrac{\omega^2 R}{4kg}$. Это столько оборотов (1 оборот = 2π):

$n = \dfrac{\varphi}{2\pi} = \dfrac{\omega^2 R}{8\pi kg}$. А путь: $S = 2\pi n \cdot R = \dfrac{\omega^2 R^2}{4kg}$.

==============



Задача №4: *ЗСМИ*. На неподвижной платформе-диске радиуса R и массой M стоит человек массой m на расстоянии r от центра О. Человек начинает идти по окружности радиуса r со скоростью v относительно платформы. С какой частотой будет вращаться платформа?

Решение: В системе "человек-платформа" нет моментов внешних сил, поэтому к ней применим ЗСМИ. Когда человек стоял на неподвижной платформе, момент импульса системы был равен 0. Следовательно, он должен остаться нулевым и после начала движения человека и вращения платформы.

Человек, идя по платформе, отталкивается от неё ногами, следовательно платформа и человек будут вращаться в разных направлениях друг относительно друга. По рисунку можем сказать, что платформа будет вращаться против часовой стрелки (её угловая скорость Ω будет положительна, её момент импульса L_P будет положителен), а человек ***относительно платформы*** будет вращаться по часовой стрелке).

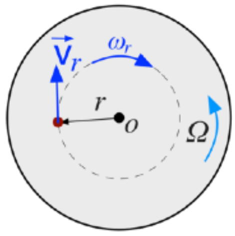
Суммарный момент импульса системы "человек-платформа" относительно неподвижной оси О равен нулю. Поэтому мы можем записать: $L_P - L_H = 0$ [1], где L_P - момент импульса платформы, L_H - момент импульса человека.

Момент импульса платформы относительно оси О $L_P = J_P \cdot \Omega$, где J_P - момент инерции платформы относительно оси О, Ω - угловая скорость вращения платформы вокруг оси О.

Поскольку платформа - это диск, вращающийся вокруг своей оси, то $J_P = \dfrac{1}{2}M \cdot R^2$, а $\Omega = 2\pi \cdot N$, где N - искомая частота вращения платформы. Тогда $L_P = \pi M \cdot R^2 \cdot N$.

Момент импульса человека $L_H = J_H \cdot \omega$, где J_H - момент инерции человека относительно оси О, ω - угловая скорость человека относительно ***неподвижной*** оси О.

Человека можно рассматривать как материальную точку, поэтому: $J_H = m \cdot r^2$.



Теперь давайте разбираться с угловой скоростью человека относительно ***неподвижной*** оси О (точнее говоря, мы должны считать момент импульса человека относительно той же оси, что мы считали момент импульса платформы.

Важно!

А момент импульса платформы мы считали относительно неподвижной оси О).

Человек вращается относительно платформы по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_r = \dfrac{v}{r}$, а платформа вращается относительно ***неподвижной*** оси О с угловой скоростью Ω. Значит угловая скорость человека относительно ***неподвижной*** оси О будет $\omega = \omega_r - \Omega = \dfrac{v}{r} - 2\pi \cdot N$.

Подставляем всё в уравнение [1]: $\pi M \cdot R^2 \cdot N - m \cdot r^2 \cdot (\dfrac{v}{r} - 2\pi \cdot N) = 0$. Откуда

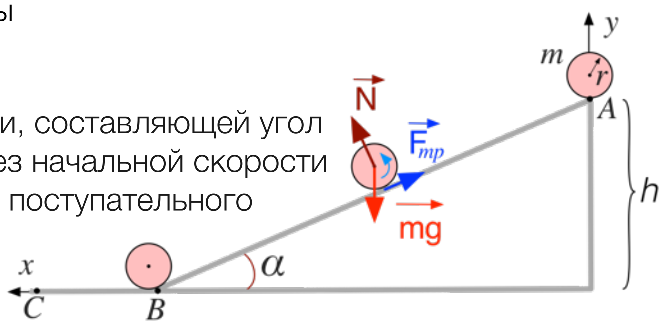
$$N = \frac{m \cdot v \cdot r}{\pi(M \cdot R^2 - 2m \cdot r^2)}$$ [об/с].

Важное в этой задаче:

- понять, что в системе "человек-платформа" выполняется ЗСМИ
- увидеть, что в системе "человек-платформа" момент импульса системы равен 0 "до" и "после"
- выразить угловую скорость человека относительно ***неподвижной*** оси через относительную угловую скорость человека относительно платформы

===============

Задача №5: ***Энергия вращения***. С наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, скатывается без проскальзывания и без начальной скорости сплошной диск. Определите установившуюся скорость поступательного движения центра масс диска по горизонтальной плоскости (трения скольжения нет).



Решение: *ЗСМЭ*. Как я уже выше говорил, при скатывании диска с наклонной поверхности присутствует сила трения покоя, которая и обеспечивает диску вращательное движение (без него диск просто соскальзывал бы без вращения). Но эта сила не совершает работы. Поэтому полная механическая энергия диска не изменяется. В решении будем использовать ЗСМЭ.

В точке А диск обладает только потенциальной энергией (за 0 потенциальной энергии принят 0 по оси У).
В промежуточной точке на наклонной поверхности диск обладает как потенциальной энергией, так и кинетической энергией. Причем кинетическая энергия состоит из кинетической энергией поступательного и вращательного движений.
В точке В диск обладает только кинетической энергией поступательного и вращательного движений.
После точки В скорость поступательного движения диска не меняется (трения скольжения нет).
Запишем уравнени закона сохранения механической энергии для точек А и В:

$mgh = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}$, где v - скорость центра масс диска в точке В (и во всех точках далее) - искомая скорость, ω - угловая скорость вращения диска относительно оси, проходящей через его центр масс.

$J = \dfrac{1}{2} m \cdot r^2$, $\omega = \dfrac{v}{r}$, откуда $v = 2\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$.

А теперь посмотрим на динамические характеристики поступательного и вращательного движений. Опять аналогии!

Поступательное движение		Вращательное движение	
масса - мера инертности	m	момент инерции - мера инертности	J
сила - мера внешнего воздействия	$\overrightarrow{F}$	момент силы - мера внешнего воздействия	$\overrightarrow{M}$
импульс - количество движения	$\overrightarrow{p}$	момент импульса - момент количества движения	$\overrightarrow{L}$
основное уравнение динамики - второй закон Ньютона	$\sum \overrightarrow{F_i} = m \cdot \overrightarrow{a}$	основное уравнение динамики	$\sum \overrightarrow{M_i} = J \cdot \overrightarrow{\varepsilon}$
кинетическая энергия	$E_K = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$	кинетическая энергия	$E_K = \dfrac{J \cdot \omega^2}{2}$
Законы сохранения			
Закон сохранения импульса		*Закон сохранения момента импульса*	
Закон сохранения механической энергии			

Заключение

Мы завершаем рассмотрение вопросов, связанных с вращательным движением. Вы теперь представляете его основы. Теоретическая механика даёт полное описание движения любой сложности. Сделайте в интернет-поисковике запрос "эффект Джанибекова" и узнаете о фантастически неожиданных свойствах вращения. Но как бы сложно ни было движение, его всегда можно представить как комбинацию поступательного и вращательного.

В механике есть три фундаментальных закона сохранения (вы их теперь все знаете):
- закон сохранения импульса
- закон сохранения момента импульса
- закон сохранения энергии *(он является общим для всех разделов физики)*

Эти законы сохранения вытекают из фундаментальных свойств нашего с вами пространства-времени (*теорема Нётер*):
- ***закон сохранения импульса вытекает из однородности пространства*** (одинаковости свойств пространства во всех его точках)
- ***закон сохранения момента импульса вытекает из изотропности пространства*** (одинаковости свойств пространства во всех его направлениях)
- ***закон сохранения энергии вытекает из однородности времени*** (равноправность всех моментов времени)

Вот и всё. Удачи!