Колебания и Волны

Все мы и всё вокруг нас - это гигантские колебательные системы.

Только колебания могут найти золотую середину...
(из удмуртской мудрости)

Неожиданное утверждение? А вот квантовая теория поля говорит, что электрон и все элементарные частицы (из которых мы и окружающий мир состоят) - это колебания соответствующих полей. Значит мы состоим из колебаний![1] "Ну, это-ж квантовая теория поля! У них всё не по-человечески. Что-то мы не чувствуем в себе никаких колебаний", - скажете вы. Ну и ладно.

Вот общее определение понятия: ***колебания** - повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы **около точки равновесия***.

Положением равновесия называется такое положение системы, в котором она может оставаться сколь угодно долго (будучи помещена в это положение в состоянии покоя).

По физической природе можно говорить о:
- механических колебаниях (маятники, звук, вибрации);
- электромагнитных колебаниях (свет, радиоволны);
- квантовых колебаниях (лазеры и все те экзотические колебания, о которых говорит квантовая теория поля).

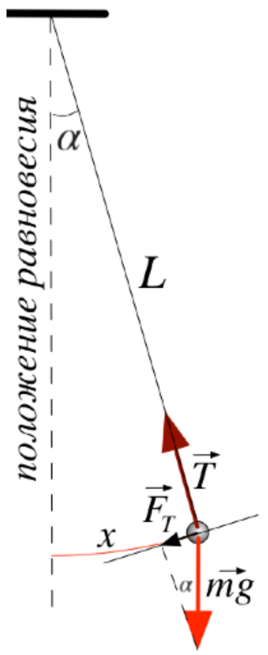
Колеблющуюся систему называют ***осциллятором***[2].

Механические колебания

Математический маятник

Математический маятник (ММ) - это механическая система:
- состоит из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити;
- находится в однородном поле сил тяжести;
- сопротивление воздуха при движении ММ отсутствует;
- совершает колебания в одной плоскости;
- углы отклонения от положения равновесия малы.

ММ - это идеальная модель, изучив которую, можно делать выводы о реальных механических колебательных системах.



Если подвешенная таким образом материальная точка неподвижно висит на нити в вертикальном положении, то сила тяжести и сила упругости нити взаимно компенсируются и наш ММ может находиться в таком положении бесконечно долго - это и есть положение равновесия.

Отведём ММ на малый угол и отпустим. Начнутся колебания - маятник будет двигаться по дуге окружности с радиусом, равным длине нити. Рассмотрим произвольное положение маятника. При этом: $\overrightarrow{mg}$ - сила тяжести, действующая на материальную точку, $\vec{T}$ - сила натяжения нити, α - текущий угол отклонения нити от положения равновесия, L - длина нити, x - смещение маятника по дуге окружности радиуса L от положения равновесия.

---

[1] *И тогда выражение "Я заколебался" приобретает вполне физический смысл.*

[2] *От латинского oscillo - качаться.*

Мы сейчас начнём писать формулы, в которых будут использоваться производные по времени. В физике они постоянно встречаются. Вот так их обозначают:

$x'(t) \leftrightarrow \dfrac{dx}{dt} \leftrightarrow \dot{x}(t) \leftrightarrow \dot{x}$ - *первая производная по времени;*

$x''(t) \leftrightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} \leftrightarrow \ddot{x}(t) \leftrightarrow \ddot{x}$ - *вторая производная по времени.*

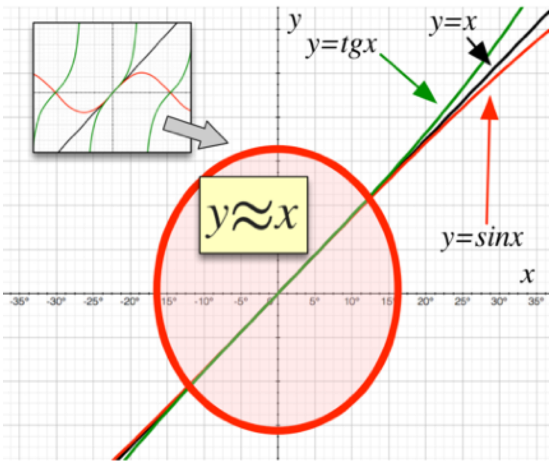
Тогда: $\alpha = \dfrac{x}{L}$ (α - в радианах!!!) и $ma_T = F_T = -mg \cdot sin\alpha$. Второе уравнение есть не что иное, как второй закон Ньютона записанный для проекций векторов ускорения и силы на направление касательной. a_T - тангенциальное ускорение маятника при его движении по дуге окружности, F_T - касательная составляющая силы тяжести, знак "-" означает, что F_T направлена в сторону, противоположную x (отклонению маятника).

Но тангенциальное ускорение a_T (как и всякое ускорение) - это вторая производная по времени от смещения x: $a_T = \ddot{x}$. В итоге мы получим: $\ddot{x} = -g \cdot sin\dfrac{x}{L}$ или

$\ddot{x} + g \cdot sin\dfrac{x}{L} = 0$[3] [1].

Мы получили уравнение движения маятника - зависимость смещения x (координаты) от времени. Смещение в этом уравнении представлено как непосредственно в виде x, так и в виде своей второй производной $\ddot{x}$. Такие уравнения в математике называют *дифференциальными уравнениями*. И чтобы получить выражение для x в "чистом" виде (без связки с собственными производными), это дифференциальное уравнение надо *решить* (чем и занимается раздел математики "Теория дифференциальных уравнений"). Но мы с вами пока этой теорией не владеем. Могу сказать только, что решение дифференциального уравнения [1] выглядит очень громоздко и сложно. И как быть?

А мы ещё с вами не использовали последнее условие ММ: углы отклонения ММ от положения равновесия малы. А что это нам даёт? А то, что если угол α мал, то мы можем использовать приближение $\alpha \approx sin\alpha \approx tg\alpha$ (α - в радианах!!!). И это сильно упростит нам жизнь!



Для особо недоверчивых я поясню это приближенное соотношение. Если построить графики функций $y = x, y = sinx, y = tgx$, то можно убедиться, что в области малых значений x они практически совпадают.

А расчёты в приведенной табличке показывают, что для углов до 10 градусов такое приближение верно с точностью до 0,5%.

x - град	*x - рад*	*sinx*	*ошибка*
6	0.105	0.105	0.2 %
7	0.122	0.122	0.2 %
8	0.140	0.139	0.3 %
9	0.157	0.156	0.4 %
10	0.175	0.174	0.5 %
11	0.192	0.191	0.6 %
12	0.209	0.208	0.7 %
13	0.227	0.225	0.9 %
14	0.244	0.242	1.0 %

И тогда для малых углов (а теперь-то мы понимаем, что малые углы - это углы не более 10 градусов) можно записать: $sin\dfrac{x}{L} \approx \dfrac{x}{L}$ и тогда уравнение для ММ станет выглядеть вот так: $\ddot{x} + \dfrac{g}{L} \cdot x = 0$.

[3] *Эта формула справедлива для любых углов отклонения маятника.*

Ну и что? - скажете вы. Всё равно получилось дифференциальное уравнение второго порядка (поскольку в нём присутствует вторая производная). И как его решать?
Да, мы пока не умеем решать дифференциальные уравнения. Зато мы в школе неплохо научились дифференцировать (брать производные). И это нам должно помочь.

Вдумчивый ученик тянет руку: "Мне кажется, я знаю как... Если взять функцию вида $x = sint$, то её первая производная по времени будет $\dot{x} = cost$, а вторая производная по времени будет $\ddot{x} = -sint$ и тогда можно записать $\ddot{x} = -x$ или $\ddot{x} + x = 0$. Правильно?"

Молодец, вдумчивый ученик! То есть мы не решили дифференциальное уравнение, а подобрали решение. Только надо это решение дать в общем виде. В соответствии с правилами дифференцирования общим решением может быть функция вида $x = A \cdot sin(\omega t + \varphi)$ или $x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$. Но синус от косинуса отличается лишь на $\pi/2$. Поэтому обычно рассматривают функцию $x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$ (хотя если вы в книжках встретите решение в виде $x = A \cdot sin(\omega t + \varphi)$, то это не будет великим грехом). И тогда для такой функции дифференциальное уравнение будет выглядеть как $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$. Похоже на наше уравнение для ММ: $\ddot{x} + \frac{g}{L} \cdot x = 0$? Да, если принять $\omega^2 = \frac{g}{L}$. Ну так давайте и примем, ведь величина $\frac{g}{L}$ всегда положительная. Итак, уравнение движения для ММ выглядит так: $x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$

Гармонические колебания - это колебания, при которых координата зависит от времени по ***гармоническому закону***: $x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$.

Математический маятник совершает гармонические колебания.
*Математический маятник - это **гармонический осциллятор**.*

Введём определения:

Амплитуда колебаний тела - это величина его наибольшего отклонения от положения равновесия.
Период колебаний T - это время одного полного колебания. Можно сказать, что за период тело проходит путь в четыре амплитуды.
Частота колебаний ν — это величина, обратная периоду: $\nu = \frac{1}{T}$. Частота измеряется в герцах (Гц) и показывает, сколько полных колебаний совершается за одну секунду.

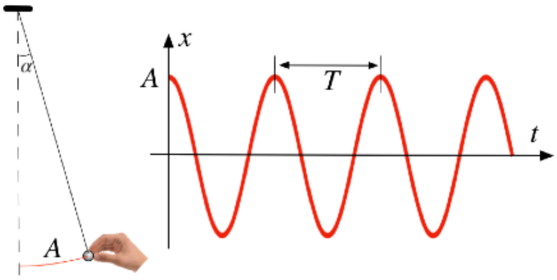
Разберёмся с величинами, входящими в формулу $x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$.

- Положительная величина A является наибольшим по модулю значением координаты, то есть наибольшим отклонением от положения равновесия. Поэтому A - амплитуда колебаний.
- Аргумент косинуса $\omega t + \varphi$ называется фазой колебаний. Величина φ, равная значению фазы при $t = 0$, называется начальной фазой. Начальная фаза отвечает начальной координате тела: $x_0 = A \cdot cos(\varphi)$.
- Величина ω называется циклической частотой. Одному полному колебанию отвечает приращение фазы, равное 2π радиан $\Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$. Измеряется циклическая частота в рад/с (радиан в секунду). А из этого вытекают ещё две формы записи гармонического закона: $x = A \cdot cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)$ и $x = A \cdot cos(2\pi \cdot \nu \cdot t + \varphi)$.

А поскольку $\omega^2 = \frac{g}{L}$, то *период колебаний математического маятника* $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

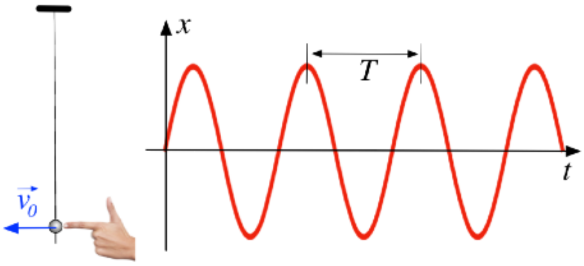
Он зависит только от длины нити (ну и от g, конечно). Он ***не зависит*** ни от массы ММ, ни от амплитуды колебаний.

Зная уравнение движения ММ $x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$, легко получить и выражения для его скорости и ускорения: $v = \dot{x} = -A\omega \cdot sin(\omega t + \varphi)$ и $a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cdot cos(\omega t + \varphi)$.



Движение ММ зависит от его начального состояния (начальных условий) при $t = 0$.

Пусть при $t = 0$ маятник отклонили на небольшой угол α и отпустили без начальной скорости. Ясно, что в этом случае $x_0 = A$ (амплитуде), поэтому можно положить начальную фазу φ равной нулю и тогда уравнение движения маятника будет выглядеть так: $x = A \cdot cos(\omega t)$.



А если в момент $t = 0$ маятник не отклоняли, но щелчком сообщили ему начальную скорость v_0 из положения равновесия. В этом случае $x_0 = 0$, поэтому можно положить начальную фазу $\varphi = -\pi/2$ (чтоб выполнялось $0 = A \cdot cos(\varphi)$) и тогда уравнение движения маятника будет выглядеть так: $x = A \cdot sin(\omega t)$. А скорость его будет выражаться как $v = \dot{x} = A\omega \cdot cos(\omega t)$. Тогда, зная сообщенную маятнику в момент $t = 0$ начальную скорость v_0, можно легко определить его амплитуду: $A = \frac{v_0}{\omega}$.

Ну и естественно, маятник можно запустить и "комбинированным способом": отклонить и сообщить ему начальную скорость. Тогда начальную фазу и амплитуду придётся посчитать отдельно. Уравнение движения будет иметь общий вид $x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$.

Амплитуда колебаний маятника определяется начальными условиями - тем, как далеко вы маятник отклонили или/и как сильно его "щёлкнули".

При этих вышеописанных способах "запуска" маятник будет совершать *плоские колебания*: все его колебательные перемещения будут происходить в одной плоскости.

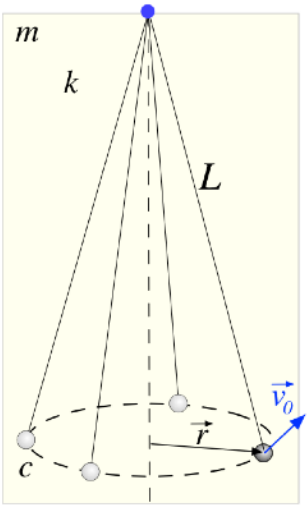
Ещё раз скажу, что во всех этих случаях период колебаний (и частота) будет одним и тем же: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ - от начальных условий он не зависит.

Как мы "заставляли" маятник качаться? Мы сообщали ему начальные условия (либо отклоняли, либо щёлкали по нему, либо и то и другое одновременно) и больше на него никак не воздействовали - маятник продолжал колебаться сам по себе со свойственной ему частотой. Такие колебания называются *свободными колебаниями* (нет никаких внешних периодических воздействий). А частота, с которой совершаются свободные колебания, называется *собственной частотой колебательной системы.* В нашем случае - собственная частота маятника.

А поскольку в нашей идеальной модели математического маятника отсутствует сопротивление воздуха и трение, то он будет колебаться с постоянной амплитудой бесконечно долго. Такие колебания называются *незатухающими*.

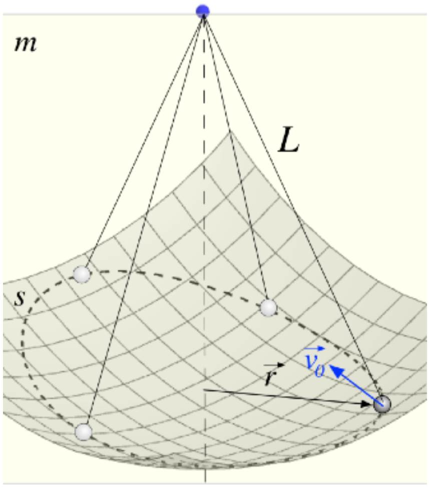
Вдумчивый ученик тянет руку: "А могут быть не-плоские колебания у математического маятника?"

Могут. И сейчас немного поговорим об этом. Переходим в 3D.

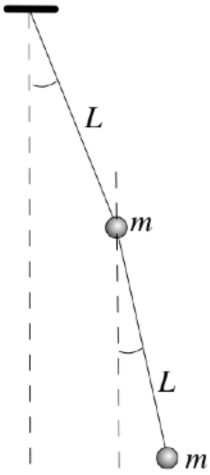


Отведём наш маятник от положения равновесия немного в сторону и сообщим ему начальную скорость v_0, вектор которой направлен ***перпендикулярно*** плоскости m (жёлтенькой) - плоскости, в которой лежат вертикальная ось положения равновесия и нить маятника в момент отведения. Маятник начнёт вращаться-колебаться так, что нить маятника будет заметать ("заметать" - вполне себе геометрическое понятие) коническую поверхность, а сам маятник будет двигаться по окружности c. Такой маятник называется ***коническим*** - думаю, что вам не раз приходилось наблюдать его в жизни.

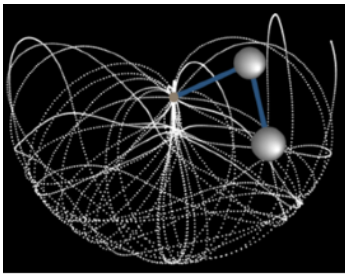
Период его вращений-колебаний всё тот-же: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.



А вот более общий случай: вектор начальной скорости v_0 направлен ***неперпендикулярно*** плоскости m. (Серая поверхность - это фрагмент сферы радиуса L с центром в точке подвеса нашего маятника). Наш маятник будет двигаться по замкнутой кривой s. Кривая s - это эллипс, нарисованный на нашей серой сферической поверхности. И такой маятник называется ***сферическим***. Уравнение его движения описывает немного сложная для нас математика, но период его вращений-колебаний всё тот-же: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.



А вот ещё один вид маятника - ***двойной***. К одному маятнику подвешен ещё и другой. Они совершают колебания в одной плоскости. В самом общем случае, когда длины нитей и массы маятников различны и углы отклонения велики, поведение такого маятника описывается довольно сложной системой уравнений и может при определённых условиях переходить в хаотическое движение (как на фото).



Но если длины нитей и массы маятников одинаковы и углы их отклонения малы (получаются два соединённых одинаковых математических маятника), то такой двойной маятник совершает гармонические колебания: верхний колеблется с периодом $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, а нижний - с $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

А поскольку $T_1 < 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} < T_2$, то можем сказать, что верхний маятник будет колебаться быстрее аналогичного одиночного математического маятника, а нижний - медленнее.

Ну ведь интересно же!?

Выше мы рассматривали поведение математического маятника *кинематически* - то есть описывали уравнения его движения и связанные с этим движением параметры. Настало время рассмотреть математический маятник с ***энергетической*** точки зрения.

Превращение энергии при колебаниях

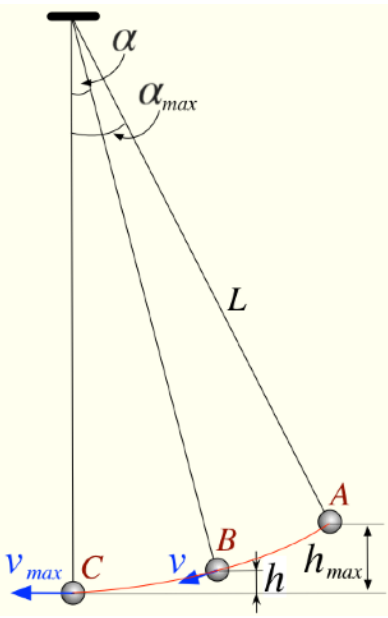
Итак, наш математический маятник совершает *свободные (без воздействия внешних периодических сил) гармонические (по закону косинуса или синуса) незатухающие (нет сил трения и сопротивления)* в *однородном* поле тяготения Земли (или другой планеты) с *собственной частотой*.

А поскольку в механической системе "математический маятник - Земля" нет сил трения и сопротивления (то есть нет тепловых потерь), то эта система - замкнутая в энергетическом смысле. *А в замкнутых механических системах полная механическая энергия сохраняется.*

Какой механической энергией обладает маятник? **Кинетической** - поскольку он движется по своей траектории. И **потенциальной** энергией в гравитационном поле Земли.

Изменяются ли эти энергии в процессе колебаний? **Да.** Колебательное движение маятника происходит с изменяющейся скоростью, следовательно его кинетическая энергия изменяется. Поскольку маятник при колебании меняет свою высоту подъёма в поле тяжести, то меняется и его потенциальная энергия.

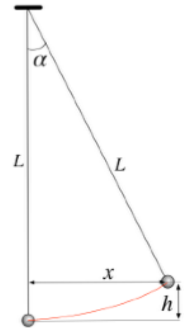
Но сумма его кинетической и потенциальной энергий остаётся постоянной.



Рассмотрим подробнее. Пусть при $t = 0$ мы, как и раньше, отклонили маятник на небольшой угол α_{max} в положение A. Маятник поднялся на высоту h_{max} от положения своего равновесия. Если принять за нулевой отсчёт потенциальной энергии уровень положения равновесия маятника, то можно сказать, что в положении A маятник обладает потенциальной энергией $E_p = mg \cdot h_{max}$. Кинетической энергии в этом положении у маятника нет (мы его всё ещё удерживаем). Потенциальная энергия $E_p = mg \cdot h_{max}$ - это та энергия, которой мы "зарядили" маятник. Затем мы отпустили маятник (без начальной скорости). Маятник начал опускаться по вертикали (уменьшая свою потенциальную энергию), увеличивая скорость и кинетическую энергию. В промежуточном положении B он обладал как потенциальной, так и кинетической энергиями. Проходя положение C (положение равновесия) его потенциальная энергия станет равной нулю (с учётом принятого нулевого отсчёта), а кинетическая станет максимальной. И так далее. Это всё очевидные вещи. Пора переходить к формулам.

Запишем выражения для потенциальной и кинетической энергий математического маятника в промежуточной точке B.

Потенциальная энергия: $E_p = mg \cdot h$. Из геометрии: $h = \dfrac{x^2}{2L}$. Из условия гармонических колебаний $x = A \cdot cos(\omega t)$ (начальную фазу φ положим равной нулю для простоты формул). Мы помним, что $\omega^2 = \dfrac{g}{L}$. Отсюда с учётом тригонометрии следует: $E_p(t) = \dfrac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{4}(1 + cos(2\omega t))$.

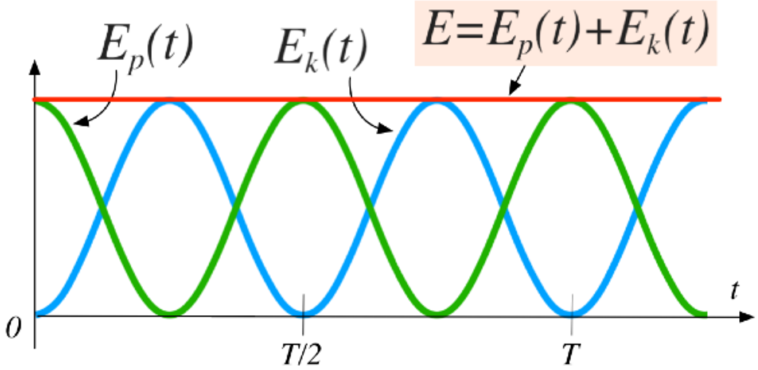


Кинетическая энергия: $E_k = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$. Поскольку $v = \dot{x} = -A\omega \cdot sin(\omega t)$, получаем $E_k(t) = \dfrac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{4}(1 - cos(2\omega t))$.

И тогда $E_p(t) + E_k(t) = \dfrac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{4} = const$, что подтверждает наш вывод о сохранении полной механической энергии при колебаниях математического маятника.

При этом $E_{p_{max}} = E_{k_{max}} = \dfrac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{4}$.

Графики энергий при этом выглядят вот так:



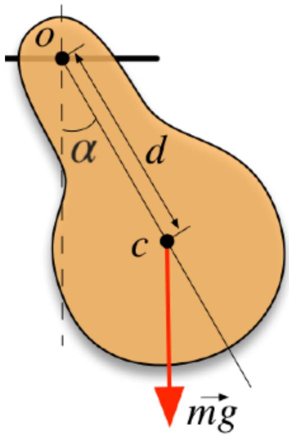
Если бы наш маятник был запущен из положения равновесия щелчком (мы "зарядили" маятник кинетической энергией), то графики выглядели бы с точностью до наоборот.

Вообще говоря, когда вы видите качающийся маятник, вы не можете точно сказать как он был запущен ("щелчком" или "отклонением"). Вы можете лишь понять сколько энергии в него "зарядили" при $t = 0$. Эта энергия в нём и сохраняется.

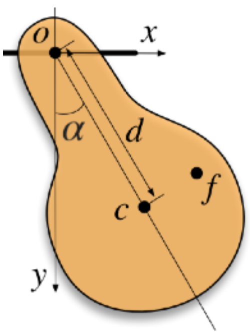
Таким образом, *при гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.* И происходит это превращение с частотой в два раза большей, чем частота собственных колебаний.

Физический маятник

Любое тело, насаженное на горизонтальную ось вращения, способно совершать в поле тяготения свободные колебания и, следовательно, также является маятником. Такой маятник принято называть ***физическим*** (ФМ). Он отличается от математического только распределением масс - массу такого тела нельзя считать точечной. В положении устойчивого равновесия центр масс C ФМ находится ниже оси вращения O на вертикали, проходящей через ось.



Напомню, что ***центром масс*** тела называется точка, к которой приложена равнодействующая всех сил тяжести, действующих на каждый элемент (в пределе - бесконечно малый) тела. В положении устойчивого равновесия центр масс C физического маятника находится ниже оси вращения O на вертикали, проходящей через ось. При отклонении маятника на угол α возникает момент силы тяжести,



стремящийся возвратить маятник в положение равновесия: $M = -mg \cdot sin\alpha \cdot d$, где d - расстояние между осью вращения и центром масс маятника. Знак "минус" в этой формуле означает, что момент сил стремится повернуть маятник в направлении, противоположном его отклонению от положения равновесия.

Сейчас нам придётся вспомнить кое-что по теме *Кинематика и Динамика вращательного движения*[4].

В соответствии с *основным уравнением вращательного движения твёрдого тела*: $I \cdot \varepsilon = M = -mgd \cdot sin\alpha$, где I - момент инерции маятника относительно оси вращения O, ε - угловое ускорение маятника - вторая производная от угла смещения по времени: $\varepsilon(t) = \ddot{\alpha}(t)$. Откуда $\ddot{\alpha}(t) + \dfrac{mgd}{I} \cdot sin(\alpha(t)) = 0$ - получили дифференциальное уравнение движения ФМ (не в координатах, как у ММ, а в углах отклонения).

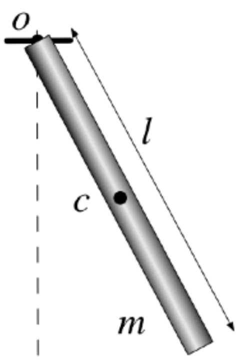
А если считать (как и в случае ММ) углы отклонения α от положения равновесия малыми, то, воспользовавшись соотношением $\alpha \approx sin\alpha$, имеем: $\ddot{\alpha} + \dfrac{mgd}{I} \cdot \alpha = 0$. Опять получили дифференциальное уравнение второго порядка! Но оно подозрительно математически похоже на дифференциальное уравнение движения ММ $\ddot{x} + \dfrac{g}{L} \cdot x = 0$.

И из этой похожести можно сделать выводы:

- решение этого уравнения имеет вид $\alpha(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$, где $\alpha(t)$ - текущее угловое отклонение ФМ, A - угловая амплитуда колебаний, ω - циклическая частота колебаний, φ - начальная фаза;
- собственная частота малых колебаний ФМ $\omega = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$, а их период $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}}$;
- *при малых углах отклонения ФМ совершает свободные* ***гармонические*** *колебания*;
- при гармонических колебаниях ФМ превращение кинетической энергии в потенциальную происходит аналогично ММ.

Замечание: В формуле для периода колебаний ФМ фигурирует момент инерции I относительно оси вращения O (точки подвеса). Для простейших физических однородных тел (стержень, шар, цилиндр и пр.) посчитаны и известны моменты инерции I_C относительно центра масс. Тело ФМ может быть подвешено за любую точку. Посчитать момент инерции I относительно точки подвеса через момент инерции I_C относительно центра масс довольно легко (по теореме Штейнера): $I = I_C + m \cdot d^2$, где m - масса тела, d - расстояние между осью вращения (точкой подвеса) и центром масс маятника. Тогда формула для периода малых колебаний ФМ будет выглядеть так:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + m \cdot d^2}{mgd}}.$$



Пример: определите период малых колебаний однородного тонкого стержня длины l, подвешенного за свой конец.
У однородного стержня центр масс расположен на середине его длины ($d = \dfrac{l}{2}$). Момент инерции I_C однородного тонкого стержня относительно

[4] *Смотри Историю про Вращение.*

центра масс известен: $I_C = \frac{1}{12} m \cdot l^2$. Тогда искомый период $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$

(*от массы не зависит - как и у ММ!*).


Вдумчивый ученик тянет руку: "А можно ли уравнение движения ФМ записать не в углах отклонения, а в координатах (как для ММ)?"

Эх, вдумчивый ученик! Спросил, не сильно подумав! В координатах ***чего***? Координаты могут быть только у точки. А поскольку ММ - это материальная точка в нашей идеальной модели, то координаты вполне к нему применимы. Физическое тело - это множество (зачастую - бесконечное) материальных точек, о координатах каких из них ты спрашиваешь? Хорошо, переформулирую твой вопрос корректно: *Как, зная уравнение движения ФМ в углах отклонения, записать уравнение движения вполне определённых точек тела ФМ в координатах?*
Уравнение движения по x-координате центра масс C посчитать легко: с учётом малости угла отклонения $x_c = d \cdot \alpha$ (α - в радианах!!!). Откуда $x_c = d \cdot A \cdot cos(\omega t + \varphi)$.

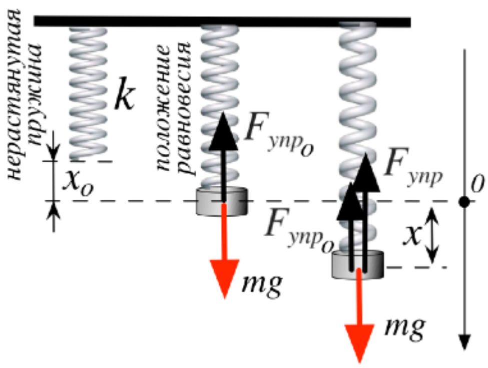
Ну а координаты произвольной точки f считаются аналогично с помощью геометрии: поскольку взаимное положение точки f и центра масс C фиксировано (тело-то твёрдое), можно выразить координаты точки f через координаты центра масс C.

Пружинный маятник

Есть ещё один механический маятник, который наглядно рассматривать как *гармонический осциллятор* - **пружинный маятник**. ПМ - это подвешенный на пружине грузик массой m.

Модель пружинного маятника (ПМ) подразумевает следующие ограничения:
- грузик рассматривается как материальная точка;
- ПМ находится в однородном поле сил тяжести;
- сопротивление воздуха при движении ПМ отсутствует;
- все деформации пружины при колебаниях ПМ подчиняются ***закону Гука*** ($F_{упр} = k \cdot x$, где x - линейное удлиннение пружины относительно нерастянутого/несжатого состояния, k - коэффициент жёсткости пружины).

У ПМ даже меньше модельных ограничений, чем у ММ.



Сначала подвесим нерастянутую пружину жёсткостью k. Теперь к пружине подвесим грузик массой m. Пружинный маятник собран! Под действием силы тяжести mg грузик растянет пружину на величину x_0 относительно нерастянутого состояния. ПМ будет находиться в состоянии покоя - это его ***положение равновесия***. При этом $F_{упр_0} = k \cdot x_0 = mg$ [a].

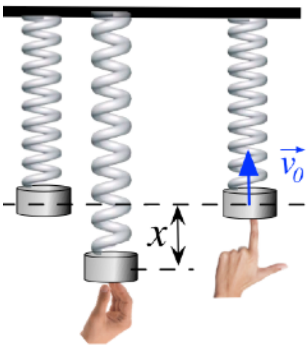
А теперь запустим колебания ПМ: оттянем грузик вниз по вертикали и аккуратно отпустим. Начнутся колебания ПМ в вертикальной плоскости.

Для произвольного положения грузика в процессе колебаний запишем второй закон Ньютона (положительное направление вертикальной оси показано на рисунке): $ma = -F^c_{упр} + mg$, где $F^c_{упр}$ - общая сила упругости пружины, действующая на грузик. По закону Гука можно записать $F^c_{упр} = k \cdot (x_0 + x)$, где x - смещение грузика относительно положения равновесия. В результате с учётом [a] получим: $ma = -k \cdot x$. Но $a = \ddot{x}$, поэтому $m\ddot{x} = -k \cdot x$ или $\ddot{x} + \dfrac{k}{m} \cdot x = 0$ - уравнение движения ПМ. С такими видом уравнений мы уже встречались.

Поэтому на ПМ можем распространить выводы математического маятника:

- ПМ совершает свободные **гармонические** колебания;
- уравнение движения ПМ: $x(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$, где $x(t)$ - смещение ПМ *относительно своего положения равновесия*, A - линейная амплитуда колебаний, ω - циклическая частота колебаний, φ - начальная фаза;
- собственная частота колебаний ПМ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, а их период $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ (*заметим, что в последних двух формулах не фигурирует* g, *значит и на Земле и на другой планете (даже в невесомости*[5]*) один и тот же ПМ будет колебаться с одинаковыми частотой-периодами*);
- скорость и ускорение определяются так: $v = \dot{x} = -A\omega \cdot sin(\omega t + \varphi)$ и $a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cdot cos(\omega t + \varphi)$;
- при гармонических колебаниях ПМ превращение кинетической энергии в потенциальную происходит аналогично ММ.

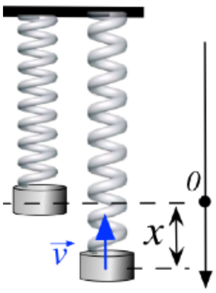
Пружинный маятник - это тоже гармонический осциллятор!



Начальные условия для колебаний ПМ задаются так же, как и для ММ: либо оттягиваем грузик и отпускаем его без начальной скоростии, либо "щёлкаем" по грузику в положении равновесия, сообщая ему начальную скорость, либо и то и другое одновременно.

Оттянули ПМ на x относительно положения равновесия и отпускаем его без начальной скорости - амплитуда колебаний будет $A = x$. "Щёлкнули" по ПМ в положении равновесия, сообщив ему начальную скорость v_0, амплитуда определится из выражения $v_0 = A \cdot \omega$.

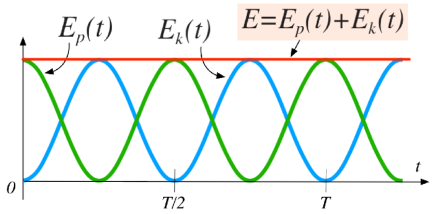
Амплитуда колебаний и начальная фаза определяются начальными условиями.



Поговорим об ***энергетике*** ПМ. Пусть в некоторый момент своего колебательного движения ПМ смещён на величину x относительно положения равновесия и имеет скорость v. Поэтому ПМ обладает как кинетической энергией $E_k = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$, так и потенциальной энергией деформированной пружины $E_p = \dfrac{k \cdot x^2}{2}$. Откуда (аналогично, как и в случае с ММ) получаем: $E_k(t) = \dfrac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{4}(1 - cos(2\omega t))$ и $E_p(t) = \dfrac{m \cdot \omega^2 \cdot A^2}{4}(1 + cos(2\omega t))$. Или с учётом $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ получаем $E_k(t) = \dfrac{k \cdot A^2}{4}(1 - cos(2\omega t))$ и $E_p(t) = \dfrac{k \cdot A^2}{4}(1 + cos(2\omega t))$.

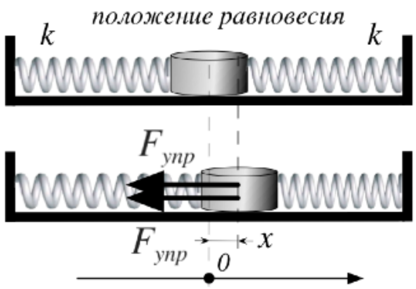
Причём $E_p(t) + E_k(t) = \dfrac{k \cdot A^2}{4}$ - полная механическая энергия ПМ сохраняется. А величина

[5] *Но уж если есть гравитационное поле, то оно должно быть однородным.*



$\dfrac{k \cdot A^2}{4}$ - это та энергия, которой ПМ "зарядили" при запуске (при начальных условиях). Графики энергий ПМ выглядят полностью аналогично ММ:

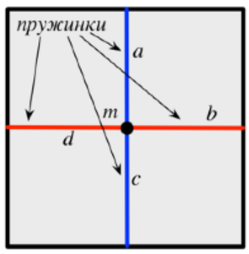
==================



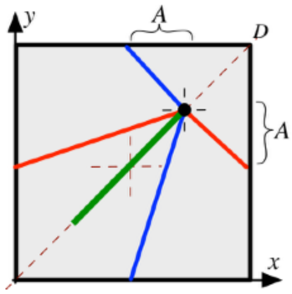
А вот каким ещё может быть пружинный маятник. Две одинаковые пружины закреплены одними своими концами к противоположным бортикам, а другими - к грузику массой m. Грузик может перемещаться по горизонтальной поверхности без трения.

Запишем второй закон Ньютона для грузика при его смещении от положения равновесия на величину x: $ma = -2F_{упр}$ (обе пружины стремятся возвратить грузик обратно - отсюда "2" в формуле). Откуда $ma = -2k \cdot x$ или $\ddot{x} + 2\dfrac{k}{m} \cdot x = 0$, что тоже даёт ***гармонические колебания*** с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$. Если жёсткости пружин различны, то, надеюсь, вы сами сможете написать соответствующие уравнения.

А вот с такой конструкцией ПМ можно провести интересные опыты.



положение равновесия



Пусть наш грузик m закреплён на четырёх пружинах внутри квадратной коробочки с гладким покрытием так, как это показано на рисунке (вид сверху). Картинка симметрична относительно осей.

В первой серии опытов будем считать, что *у всех пружин одинаковый коэффициент жёсткости*.

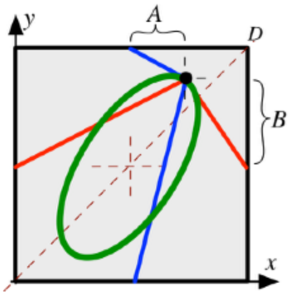
Опыт 1. Оттянем грузик по диагонали D и плавно отпустим (без начальной скорости). По какой траектории будет двигаться наш грузик?

Чтобы ответить на этот вопрос (да и на все последующие), надо понимать:

> Движение грузика можно рассматривать *как сумму независимых движений по осям x и y*. Это вытекает из общих принципов кинематики.
>
> По оси x грузик будет совершать гармонические колебания под действием пружин b и d. И по оси y грузик будет совершать гармонические колебания под действием пружин a и c.

Поскольку все четыре пружины одинаковы, то и колебания по осям x и y будут одинаковыми (будут описываться одними и теми же уравнениями).

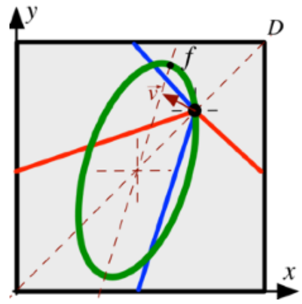
А поскольку картинка является симметричной относительно диагонали D (по обеим осям у грузика одинаковая амплитуда), то логично утверждать, что траектория грузика - это лежащий на диагонали зелененький отрезок.



Опыт 2. Оттянем грузик до точки, ***не лежащей*** на диагонали D и плавно отпустим (без начальной скорости). По какой траектории будет двигаться наш грузик?

Как и в предыдущем опыте, мы рассматриваем движение грузика как сумму независимых движений по осям. По каждой из осей грузик совершает гармонические колебания с одинаковой частотой (периодом).

Амплитуда колебаний по оси x равна A, по оси y равна B.



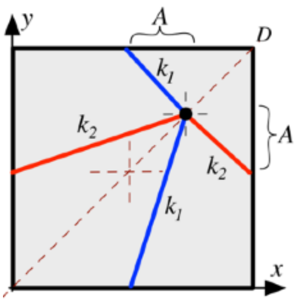
Колебание по оси x можно записать как $x = A \cdot cos(\omega t)$ (начальную фазу полагаем равной нулю), а колебание по оси y как $y = B \cdot sin(\omega t)$[6]. Тогда легко вывести: $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$. А это - уравнение эллипса. Грузик будет двигаться по зелёненькому эллипсу.

Опыт 3. Оттянем грузик по диагонали D и плавно отпустим и сообщим ему начальную скорость как показано на рисунке. По какой траектории будет двигаться наш грузик?

Если разложить по осям вектор начальной скорости, то станет понятно, что каждая пара пружин будет стараться эти скорости погасить и найдётся некоторая точка f, в которой эти скорости станут равными нулю. А это значит, что мы возвращаемся к условиям предыдущего опыта в точке f. Значит грузик будет двигаться по зелёненькому эллипсу.

В этих опытах всё довольно понятно и наглядно, поскольку все пружины одинаковы и грузик совершает синхронные (с одинаковой частотой) гармонические колебания по обеим осям.

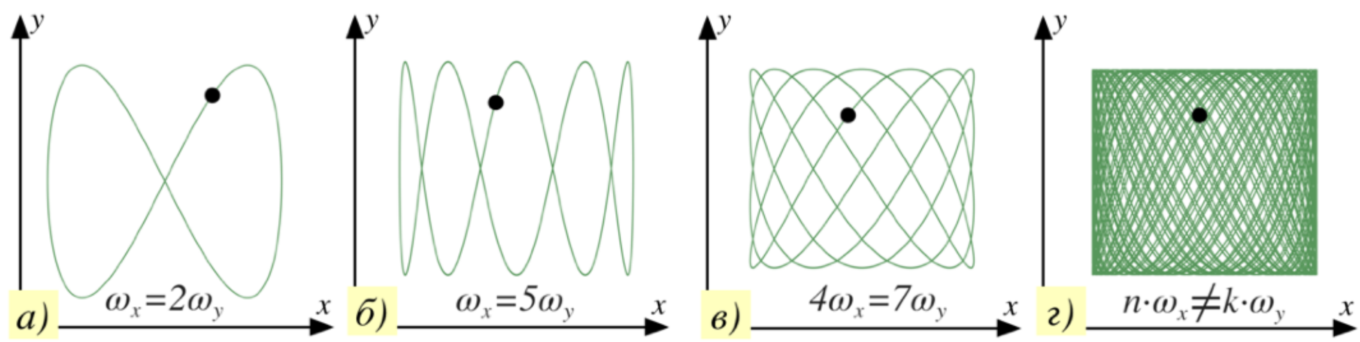
$\Rightarrow$ *А теперь кардинально изменим условия*: пусть у пружин a и c коэффициент упругости k_1, а у пружин b и d - k_2. Это значит, что грузик будет совершать по осям x и y гармонические колебания ***с разными частотами***. И тогда ...



Опыт 4. Оттянем грузик по диагонали D и плавно отпустим (без начальной скорости). По какой траектории будет двигаться наш грузик?

Ответ зависит от соотношения частот колебаний по осям.

Вот какими могут быть эти траектории. Давайте разбираться.



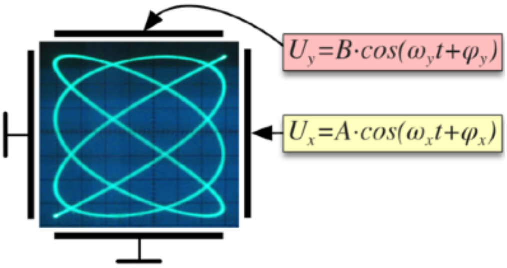
[6] *Почему синус, а не косинус? Потому, что ось y отстоит от оси x на 90 градусов. Есть ещё математические нюансы, но о них говорить не буду - сути это не меняет.*

а) $\omega_x = 2\omega_y$: за то время пока грузик сделает одно полное колебание по y, он же сделает два полных колебания по x. Траектория - замкнутая кривая.
б) $\omega_x = 5\omega_y$: за то время пока грузик сделает одно полное колебание по y, он же сделает пять полных колебаний по x. Траектория - замкнутая кривая.
в) $4\omega_x = 7\omega_y$: за то время пока грузик сделает четыре полных колебания по y, он же сделает семь полных колебаний по x. Траектория - замкнутая кривая.
г) $n\omega_x \neq k\omega_y$: частоты по осям не кратны. Траектория - разомкнутая кривая, за продолжительное время грузик побывает во всех точках нашей квадратной коробочки.

Эти кривые называются ***фигурами Лиссажу*** - траекториями, прочерчиваемыми точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Фигуры Лиссажу - это не просто затейливые картинки. Они имеют практическое применение в электронике для сравнения частот двух гармонических сигналов.

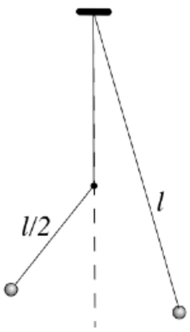
Представьте осциллограф на электронно-лучевой трубке. На горизонтально отклоняющие пластины подаем гармонический сигнал $U_x = A \cdot cos(\omega_x t + \varphi_x)$, а на вертикально отклоняющие пластины - гармонический сигнал$U_y = B \cdot cos(\omega_y t + \varphi_y)$. Электронный луч (поток электронов) под независимым действием горизонталного и вертикального гармонически изменяющихся электрических полей и будет вырисовывать на экране фигуру Лиссажу. Вид её будет определяться соотношением частот ω_x и ω_y. Это позволяет точно подстроить[7] частоту ω_y под равную (кратную) частоте ω_x: когда частоты становятся точно равными (или кратными) соответствующая ***замкнутая*** фигура Лиссажу на экране осциллографа замирает неподвижно. Когда частоты близки, но не равны, фигура Лиссажу начинает "вращаться" на экране. Когда частоты не кратны друг другу, фигура Лиссажу становится разомкнутой и засвечивает весь экран[8].



======================

А теперь - несколько задачек.

Задача 1. Математический маятник длины l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l/2$ от неё вбит гвоздь. Найти период колебаний маятника.



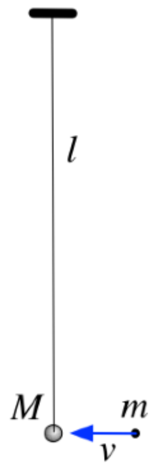
Решение: Слева от вертикали маятник будет колебаться как ММ на нити длиной $l/2$, а справа от вертикали - как ММ на нити длиной l. Полный период колебаний маятника равен сумме полупериодов таких колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{l}{g}} + \sqrt{\frac{l}{2g}}\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

[7] *Предполагается, что мы можем электронным способом менять частоту по оси y.*

[8] *В современных цифровых осциллографах электронного луча и отклоняющих пластин нет: сигналы с каждого из входов оцифровываются и программно обрабатываются микропроцессором осциллографа. Но картинка на экране получается аналогичной.*

Задача 2. В математический маятник с длиной нити l и массой M попадает горизонтально летящая со скоростью v пуля массой m и в нём застревает. Определите амплитуду колебания ММ.

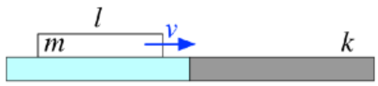


Решение: По условию задачи мы запускаем ММ колебаться "щелчком" пули из положения равновесия. Какая же у ММ будет начальная скорость в положении равновесия? Её мы можем определить из закона сохранения импульса по горизонтальной оси: $m \cdot v = (m + M) \cdot V \Rightarrow V = \dfrac{m \cdot v}{m + M}$ - и эта скорость - максимальная скорость ММ в положении равновесия.

Вспомним, что при гармонических колебаниях скорость ММ определяется как $v(t) = -A\omega \cdot sin(\omega t + \varphi)$, а частота колебаний $\omega = \sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Значит

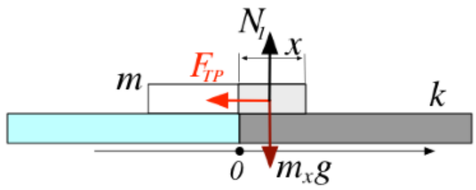
$$V = A \cdot \omega \Rightarrow A = \frac{m \cdot v}{m + M}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Задача 3. Прямоугольный брусок длиной l=0,2 м и массой m =0,5 кг въезжает с горизонтальной абсолютно гладкой (без трения) поверхности со скоростью v=1 м/с на горизонтальную поверхность с коэффициентом трения k=0,5. Через какое время после этого брусок остановится и какой путь он при этом пройдёт?



Решение: Позвольте, но при чём здесь наши маятники и гармонические колебания?! Очень даже при чём. Эта задачка была на московской городской школьной олимпиаде по физике для 10-х классов году этак в 1977-м. Я её решал-решал и таки-решил. Она - сложная, хоть и кажется простенькой. Давайте разбираться.

Если бы брусок ***полностью*** находился на "трущейся" поверхности и тормозил силой трения, нам бы не составило труда, рассматривая брусок как материальную точку, записать для него второй закон Ньютона, из него найти ускорение торможения и рассчитать кинематику ***равнозамедленного*** движения бруска до останова. Такие задачки решают пачками в 8-м классе школы. Но в нашей задачке всё несколько не так.



Рассмотрим момент времени, когда брусок въехал на поверхность с трением на расстояние x. Какие силы действуют на брусок в горизонтальном направлении? Правильно, сила трения о "трущуюся" поверхность. Она противоположно направлена скорости бруска и его тормозит. А как её записать в виде формулы? Как обычно: $F_{TP} = -k \cdot N_1$. А что это за N_1 такая? А это сила реакции "трущейся" поверхности. А чему она равна? А она равна (и противоположно направлена) силе тяжести "въехавшей" на поверхность части бруска. И это очень важное утверждение: *трётся только "въехавшая" часть бруска (это-то как раз понятно), а значит* ***сила трения пропорциональна силе тяжести этой "въехавшая" части.***

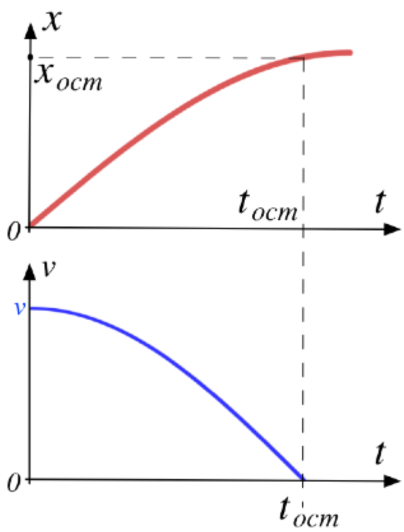
А как это в формулах записать? Да очень просто - из пропорции: $N_1 = \dfrac{x}{l}mg$. Когда брусок полностью въедет на "трущуюся" поверхность ($x = l$), N_1 станет равной mg.

Тогда второй закон Ньютона для въезжающего на "трущуюся" поверхность бруска записывается: $ma = -F_{TP} = -k \cdot N_1 = -\dfrac{k}{l}mg \cdot x$ или $ma = -\dfrac{k}{l}mg \cdot x$. Но $a = \ddot{x}$ и тогда уравнение движения бруска выглядит: $\ddot{x} + \dfrac{k}{l}g \cdot x = 0$. Дифференциальное уравнение второго порядка. Ничего не напоминает? Ой, и вправду похоже на уравнение движения математического маятника $\ddot{x} + \frac{g}{L} \cdot x = 0$. Конечно, брусок - никакой не маятник. Просто дифференциальное уравнение движения бруска в условиях нашей задачи ***математически похоже*** на дифференциальное уравнение движения ММ. И эта похожесть позволяет найти его решение. В этом и заключалась "фишка" решения этой задачки: разглядеть похожесть уравнений.

Исходя из этого, уравнение движения бруска будет выглядеть так: $x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega = \sqrt{\frac{kg}{l}}$ - конечно, это никакая не частота колебаний, в нашем случае у бруска нет никаких колебаний - это просто коэффициент в математическом уравнении. Поскольку мы выбрали, что при $t = 0$ (в момент начала въезда бруска на "трущуюся" поверхность) $x = 0$, то φ полагаем равным $-\pi/2$ и переписываем уравнение движения в виде:
$x = A \cdot sin(\sqrt{\frac{kg}{l}}t)$. А как будет выглядеть уравнение для скорости бруска? Вот так:
$v(t) = \dot{x} = A \cdot \sqrt{\frac{kg}{l}} \cdot cos(\sqrt{\frac{kg}{l}}t)$. Поскольку при $t = 0$ $v(0) = v$, получаем $A = v \cdot \sqrt{\frac{l}{kg}}$.

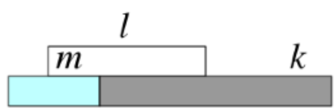
Окончательно:

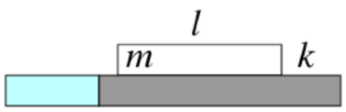
уравнение движения бруска	уравнение скорости бруска
$x(t) = v \cdot \sqrt{\frac{l}{kg}} \cdot sin(\sqrt{\frac{kg}{l}}t)$ [1]	$v(t) = v \cdot cos(\sqrt{\frac{kg}{l}}t)$ [2]



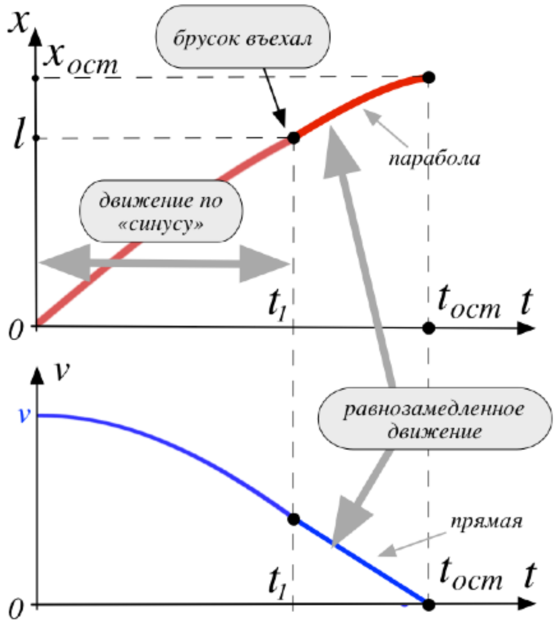
Казалось бы, основное дело сделано - найдены уравнения движения и скорости. Можно выдохнуть и промокнуть пот со лба. Но нет! В этой задачке есть ещё один подводный камень.

Вот на графиках показано как бы двигался наш брусок в соответствии с уравнениями [1] и [2]. И время останова определить очень легко - останов произойдёт тогда, когда скорость станет нулевой: из [2] $v \cdot cos(\sqrt{\frac{kg}{l}}t_{OCT}) = 0 \Rightarrow$ $\sqrt{\frac{kg}{l}}t_{OCT} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{OCT} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{kg}}$. И путь, пройденный до останова из [1]: $x_{OCT} = v \cdot \sqrt{\frac{l}{kg}}$ [3]. Но такой вариант предполагает, что брусок при останове расположится как-то так: то есть $x_{OCT} \leq l$.





Потому что, если это не так ($x_{OCT} > l$), то после того, как брусок полностью въедет на "трущуюся" поверхность, перестанут действовать уравнения [1] и [2], а начнётся ***равнозамедленное*** движение как в стандартных задачах, о которых я говорил выше.



Вот что произойдёт: от 0 до времени t_1 брусок будет двигаться по уравнениям [1] и [2] ("по синусу"), в момент t_1 брусок полностью въедет на "трущуюся" поверхность, после чего он начнёт равнозамедленное движение до останова.

Чтобы определить какой-же вариант движения реализуется, надо определить x_{OCT} по формуле [3], подставив в него числа из условия задачи.

Подставив числа, получаем x_{OCT} = 0,2 м = l. Значит брусок полностью въезжает на "трущуюся" поверхность и тут же останавливается - всё его движение проходит в соответствии с уравнениями [1] и [2]. Ну а время до останова $t_{OCT} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{kg}}$.

Если бы оказалось, что $x_{OCT} > l$, то нам пришлось бы ещё повозиться, расписывая участок равнозамедленного движения.

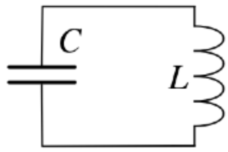
Вот такая олимпиадная задачка! Как видите, знание уравнения движения математического маятника нам в ней пригодилось[9].

========================

[9] *Кстати, как вы видите, от массы бруска ответ не зависит.*

Электрические колебания

Колебательный контур



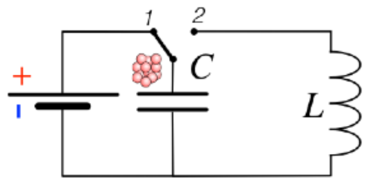
А теперь мы узнаем что такое электрический гармонический осциллятор.

Рассмотрим вот такую простую замкнутую электрическую цепь (контур). В ней есть конденсатор C и катушка индуктивности L (эту схему называют LC-контур).

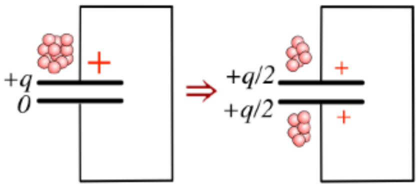
Что умеет делать конденсатор? Он умеет накапливать электрический заряд.

Что умеет делать индуктивность? Она умеет противостоять возрастающему току и поддерживать убывающий ток[10]. Делает она эти благородные дела благодаря явлению электромагнитной индукции.

А чего в этом контуре нет? А в этом контуре нет электрического сопротивления R. Когда по электрическому сопротивлению протекает ток, то на нём выделяется тепло. А выделяющееся тепло - это всегда энергетические потери. А коли в нашем контуре нет электрического сопротивления, то в нём ***нет энергетических потерь***. В реальной жизни электрическое сопротивление всегда имеется (ну быть может лишь в сверхпроводниках оно отсутствует), но в данном случае *мы опять рассматриваем модель* и в ней сопротивления нет.



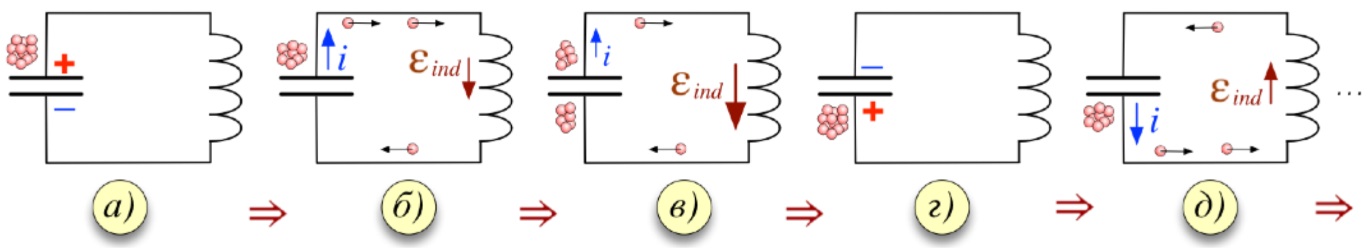
Давайте зарядим конденсатор нашего контура с помощью, например, вот такой схемы. Перекинули ключ из положения 1 в положение 2 и получили заряд на конденсаторе. Что произойдёт дальше? Подробно рассмотрим процесс.



Если бы в контуре индуктивности не было, то половина избыточного положительного заряда быстро перетекла бы с верхней пластины на нижнюю и возникла бы ситуация равновесия - напряжение на конденсаторе стало бы нулевым и заряды перестали бы перемещаться. На этом бы дело и закончилось.

Но индуктивность в нашем контуре есть! Как же она влияет?

а) Исходное положение: на верхней пластине конденсатора - избыток положительного заряда. Электрическое поле в конденсаторе, появившееся из-за разных зарядов на его пластинах, будет совершать работу по перемещению избыточного положительного заряда с верхней пластины на нижнюю для достижения равновесия. А перемещающийся заряд - это ток.



б) С момента начала своего протекания это ток будет ***уменьшающимся***: в начальный момент разница зарядов на пластинах была максимальная (а следовательно,

[10] *Смотри Историю про Магнетизм.*

максимальными были напряженность электрического поля в конденсаторе и напряжение между его пластинами), но по мере переноса заряда с верхней пластины на нижнюю эта разница зарядов-напряженности-напряжения уменьшается и поэтому уменьшается ток. И тут вступает в игру индуктивность. Из-за явления ЭМ-индукции при уменьшающемся протекающем токе в индуктивности возникает ЭДС индукции, стремящаяся этот ток усилить.

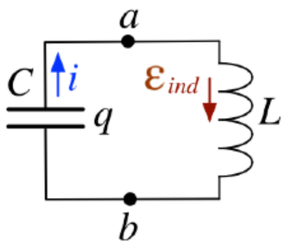
в) В момент, когда на пластинах конденсатора окажутся равные заряды (будет нулевое напряжение между пластинами) и у самого конденсатора не останется "резона" продолжать переносить заряды, ЭДС индукции станет максимальной и перемещение зарядов продолжится...

г) ... вплоть до момента, когда на нижнюю пластину конденсатора переместится весь избыточный положительный заряд (конденсатор перезарядится). Больше перемещать нечего. Ток прекратится. Исчезнет и ЭДС индукции.

д) Ну а дальше процесс продолжится, только уже в обратном направлении. И так без конца.

Суть этого процесса - конденсатор заряд хранит, а индуктивность этот заряд "из одного кармана конденсатора в другой" перегоняет. Налицо явный колебательный процесс[11]. Попробуем описать его формулами. Сначала вспомним всё необходимое:

- ток в цепи - это скорость прохождения в цепи электрического заряда: $I = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}(t)$;
- напряжение на конденсаторе: $U = \dfrac{q}{C}$ (q - заряд на конденсаторе, C - его ёмкость);
- ЭДС в индуктивности L при протекании через неё тока: $\varepsilon_{ind} = -L \cdot \dfrac{dI}{dt}$.



Вот наш контур. Рассмотрим момент времени, когда на конденсаторе находится заряд q. Ток в цепи равен I.
Чему равно напряжение U_{ab}? С одной стороны, оно равно напряжению на конденсаторе $U = \dfrac{q}{C}$. С другой стороны, оно равно ЭДС индукции, возникающей в катушке: $\varepsilon_{ind} = -L \cdot \dfrac{dI}{dt}$. Именно ЭДС индукции является тем "насосом", который помогает переносить заряды между пластинами конденсатора. ЭДС индукции порождает ток индукции из этих зарядов. Поэтому можем эти напряжения приранять: $\dfrac{q}{C} = -L \cdot \dfrac{dI}{dt}$. Но $\dfrac{dI}{dt} = \ddot{q}(t)$ и в итоге $\ddot{q}(t) + \dfrac{1}{LC}q(t) = 0$.
Опять дифференциальное уравнение второго порядка! И опять оно очень ***математически похоже*** на ранее нам попадавшиеся.

Отсюда сразу можно сделать выводы:

В LC-контуре заряд и ток изменяются по гармоническому закону.
*LC-контур - это электрический **гармонический осциллятор**.*

---

[11] В Истории про Ток мы сказали, что скорость перемещения зарядов, образующих ток в проводнике, невелика (порядка 5 мм/с). А вот что в цепи изменяется бысто, так это электрическое поле. Поэтому правильнее говорить, что в нашем контуре колеблется электрическое поле.

Уравнение для заряда на конденсаторе будет выглядеть так: $q = Q \cdot cos(\omega t + \varphi)$, где Q - "амплитуда" заряда - тот заряд, которым мы изначально зарядили конденсатор, ω - циклическая частота колебаний $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, φ - начальная фаза.

Период колебаний: $T = 2\pi \cdot \sqrt{LC}$.

Ток в LC-контуре изменяется по закону: $I = \dot{q} = -Q\omega \cdot sin(\omega t + \varphi)$.

А вот и графики:

Опишем **энергетику** гармонического колебательного процесса в LC-контуре.

Напомню:

- энергия заряженного конденсатора: $E_C = \dfrac{q^2}{2C}$;
- энергия в катушке с индуктивностью L, через которую проходит ток I: $E_L = \dfrac{L \cdot I^2}{2}$.

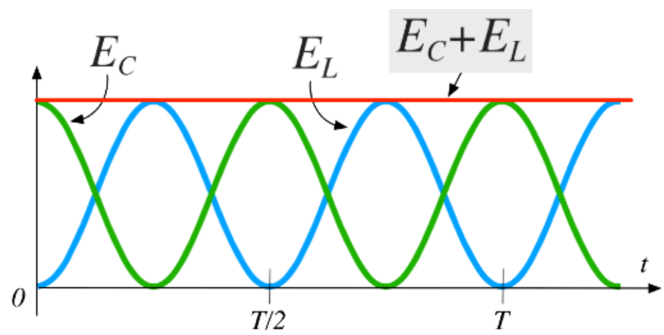
Тогда (положив для простоты начальную фазу φ равной нулю):

$$E_C = \frac{Q^2}{4C}(1 + cos(2\omega t))$$

$E_L = \dfrac{L \cdot \omega^2 \cdot Q^2}{4}(1 - cos(2\omega t))$ (а с учетом $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$) $E_L = \dfrac{Q^2}{4C}(1 - cos(2\omega t))$

И полная энергия LC-контура: $E_C + E_L = \dfrac{Q^2}{4C}$ (зависит от заряда, которым мы изначально зарядили конденсатор).

Вот график изменения энергий в LC-контуре.



==========================

Мы рассмотрели четыре *гармонических осциллятора*: три механических (математический маятник, физический маятник, пружинный маятник) и один электрический (LC-контур).

Подытожим:

- все они являются ***колебательными системами*** - они имеют *положение равновесия*, вокруг которого и происходят колебания;
- все они являются *идеальными моделями* реальных осцилляторов со своими *модельными ограничениями* (малые углы отклонения, однородность гравитационного поля и пр.);
- в них отсутствуют энергетические потери;
- их колебательный параметр (x - смещение, в случае механических осцилляторов; q - заряд, в случае LC-контура) описывается дифференциальным уравнением вида $\ddot{x} + Ax = 0, \quad A > 0$ и его решением вида $x = X \cdot cos(\omega t + \varphi)$ - *уравнением гармонических колебаний*;
- все они совершали *свободные* (нет никаких внешних периодических воздействий) *незатухающие* колебания;
- в процессе гармонических колебаний происходит превращение одних видов энергии осциллятора в другие его виды; **полная энергия осциллятора сохраняется**.

Замечание: не всё, что описывается уравнениями вида $\ddot{x} + Ax = 0$ и $x = X \cdot cos(\omega t + \varphi)$, является гармоническим осциллятором. Примером тому - Задача 3: уравнение движения бруска имеет вид $\ddot{x} + \dfrac{k}{l} g \cdot x = 0$, но он не является колебательной системой.

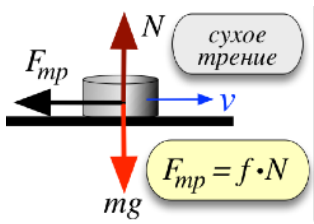
Пора переходить к реальным колебательным системам.

Затухающие колебания

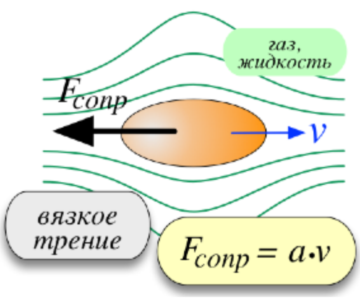
Во всякой реальной колебательной системе имеются внешние силы сопротивления (трение, сопротивление воздуха, падение напряжения на резисторе и пр.) С точки зрения динамики эти силы препятствуют колебательным движениям, а с точки зрения энергетики - совершают работу, переходящую в тепловую энергию, что ведет к убыли полной энергии колебательной системы.

Затухающие колебания - колебания, энергия которых уменьшается с течением времени.

Различают два вида сил трения-сопротивления: *сухое трение и вязкое трение*.



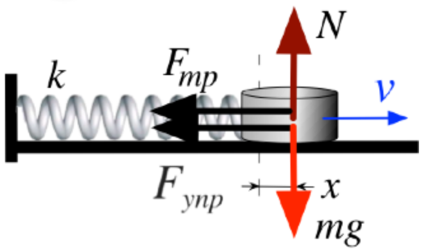
Сухое трение - это привычное нам трение твёрдого тела о твердое тело. Направлено это трение против вектора скорости. Величина его равна $F_{TP} = f \cdot N$, где f - коэффициент трения поверхностей твёрдых тел, N - сила реакции опоры. Всё это нам знакомо.



Вязкое трение - это трение-сопротивление, возникающее при движении твёрдого тела в среде (жидкости или газе). Направлено оно также против вектора скорости. Величина силы вязкого трения зависит от формы тела, от свойств среды и ***от скорости*** движения тела в среде. Для данного тела в данной среде можно считать, что $F_{сопр} = a \cdot v$, где a - коэффициент вязкого трения, v - скорость тела в среде.

Посмотрим как будут себя вести некоторые осцилляторы в реальных условиях трения-сопротивления. Их колебания остаются *свободными* (нет никаких внешних периодических воздействий): как им сообщили энергию при "запуске" (оттягиванием, "щелчком", зарядом конденсатора), так больше энергии к ним не поступает. Наоборот, трение-сопротивление энергию у них отнимает.

Пружинный маятник при наличии сухого трения

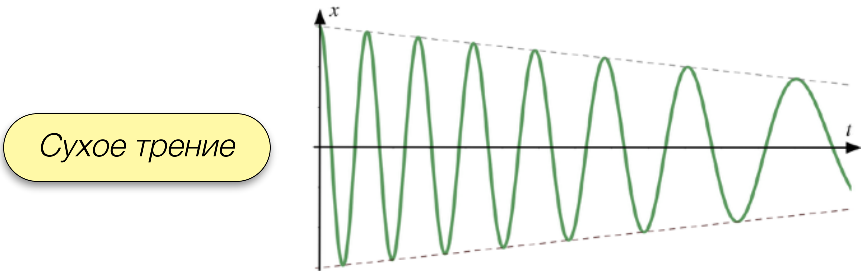


Сухое трение постоянно по величине и направлено против скорости. Второй закон Ньютона для ПМ с сухим трением: $ma = -k \cdot x - f \cdot mg$ (k - коэффициент упругости пружины, f - коэффициент трения о горизонтальную поверхность). Откуда дифференциальное уравнение движения: $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x + fg = 0$.

По сравнению со случаем колебания без трения ($\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$) в этом дифференциальном уравнении появилась константа fg.

Не буду вас мучить громоздкой математикой, дам общие выводы:

График колебаний будет выглядеть вот так:

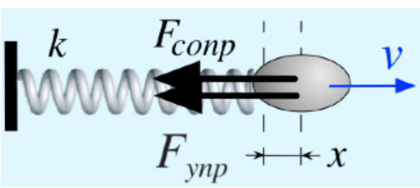


- колебания такого ПМ будут *затухающими*: их амплитуда будет ***линейно*** уменьшаться со временем;
- период таких колебаний будет возрастать (частота будет уменьшаться);
- сколько таких колебаний сделает ПМ до остановки - зависит от коэффициента трения. Но ПМ в результате затухания остановится - это обусловлено наличием силы *трения покоя* у сухого трения.

Пружинный маятник при наличии вязкого трения

Поскольку бОльшая часть механических осцилляторов колеблются в воздухе, то они подвержены вязкому трению (сопротивлению воздуха). В некоторых случаях его можно не учитывать. Но для общности рассмотрим поведение пружинного маятника в вязкой среде (считаем, что сухого трения нет). Вязкое трение пропорционально скорости[12] и направлено против неё.

Второй закон Ньютона для для ПМ с вязким трением: $ma = -k \cdot x - a \cdot v$ (k - коэффициент упругости пружины, a - коэффициент вязкого трения, v - мгновенная скорость маятника). Откуда дифференциальное уравнение движения: $\ddot{x} + \dfrac{a}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$.

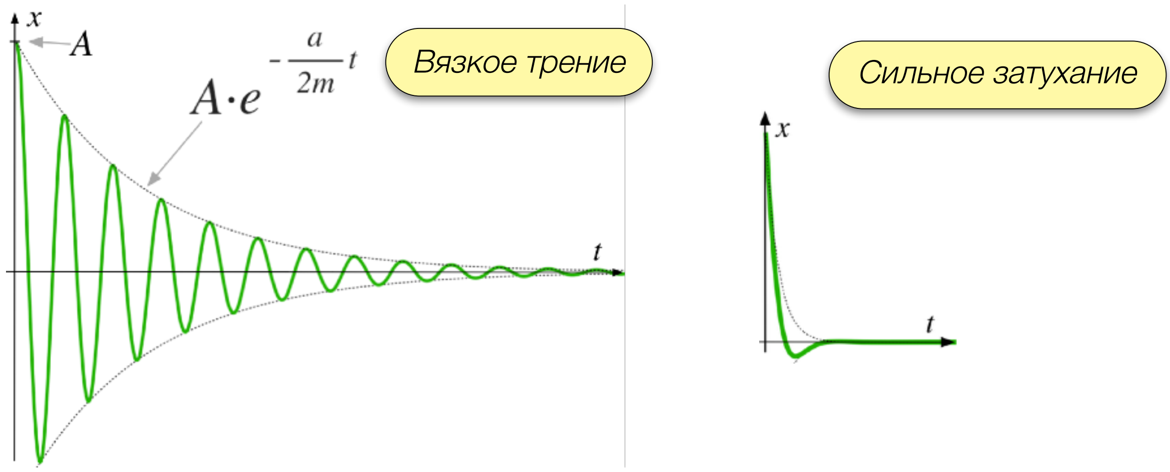


Не забываем, что $v = \dot{x}$. По сравнению со случаем колебания без трения ($\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$) в этом дифференциальном уравнении появилось слагаемое с первой производной $\dfrac{a}{m}\dot{x}$.

[12] *Это справедливо для малых скоростей. Для больших скоростей зависимость - квадратичная.*

Не вдаваясь в математические детали решения этого дифференциального уравнения, приведу его результат: $x = A \cdot e^{-\frac{a}{2m}t} \cdot cos(\omega t)$[13] ($A$ - начальная амплитуда колебаний, m - масса маятника, a - коэффициент вязкого трения, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - собственная частота колебаний ПМ, начальную фазу φ считаем равной нулю для простоты).
Это - уравнение движения ПМ с вязким трением.

График колебаний будет выглядеть вот так:



- колебания такого пружинного маятника будут *затухающими*: их амплитуда будет ***экспоненциально*** уменьшаться со временем;
- частота колебаний постоянна и равна собственной частоте колебаний ПМ;
- теоретически такое затухание будет бесконечным (у вязкого трения трение покоя нулевое).

В более вязкой среде (a большой) - затухание сильней.

Если взглянуть на зависимость силы вязкого трения $F_{B.TP} = -a \cdot v = -a \cdot \dot{x}$ от времени, то мы увидим, что эта внешняя сила не только направлена против скорости (как, впрочем, и сила сухого трения), но и *изменяет свою величину с собственной частотой колебаний ПМ* (сила же сухого трения остается постоянной по величине). В этом и заключается причина того, что ***сила вязкого трения гораздо эффективнее тормозит ПМ, чем сила сухого трения*** (экспоненциальное затухание амплитуды колебаний происходит гораздо быстрее, чем линейное затухание).

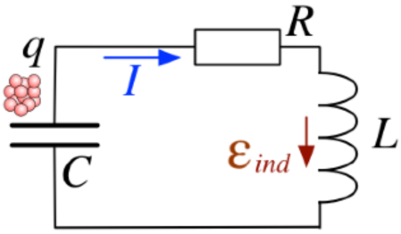
Все силы трения диссипативные - их работа приводит к выделению тепла. Выделенное тепло - это энергетические потери в колебательной системе.

В реальных механических осцилляторах могут присутствовать как силы сухого, так и силы вязкого трения. Понятно, что обе эти силы будут противодействовать колебаниям и отнимать у осциллятора энергию, приводя к затуханию колебаний.

[13] *Точное решение дифф. уравнения даёт несколько вариантов формул. Но эти тонкости нам пока не важны.*

■ RLC - контур

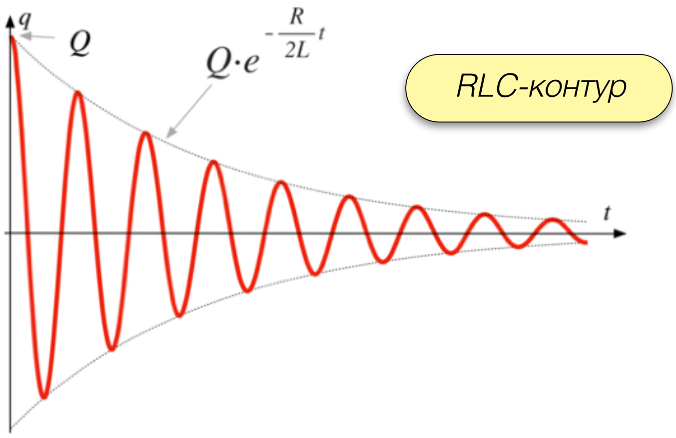
Ранее мы рассмотрели электрический гармонический осциллятор - LC-контур. И, как в идеальной модели, полагали, что электрическое сопротивление в этой цепи равнно нулю. Однако все реальные контура имеют электрическое сопротивление R. Вот такой RLC-контур мы и рассмотрим. Поймём к чему приводит наличие в нём электрического сопротивления.



RLC-контур перед вами: в произвольный момент времени на конденсаторе есть заряд q, в контуре течет ток I, на катушке индуктивности наведена ЭДС индукции ε_{ind}. По закону Ома для полной цепи можем записать: $\varepsilon_{ind} = U_C + I \cdot R$ или $L \cdot \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{q}{C} + I \cdot R = 0$ или (помня, что $I = \dot{q}, \dfrac{dI}{dt} = \ddot{q}$)

$\ddot{q} + \dfrac{R}{L}\dot{q} + \dfrac{1}{LC}q = 0$ - получили дифференциальное уравнение, описывающее поведение заряда на конденсаторе в RLC-контуре. Хоть мы с вами всё ещё не умеем их решать, но мы научились находить *математическую похожесть* одних дифференциальных уравнений на другие. И на что же похоже это дифференциальное уравнение? А *оно похоже на дифференциальное уравнение движения пружинного маятника с* ***вязким*** *трением*, которое мы рассматривали в предыдущем параграфе! Да ну?! Ну да. А значит и его решение мы можем представить по аналогии: $q = Q \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \cdot cos(\omega t)$, ($Q$ - начальный заряд на конденсаторе, $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота колебаний LC-контура). Это - уравнение поведения заряда на конденсаторе в RLC-контуре.

График поведения заряда будет выглядеть вот так:



- колебания уже не будут гармоническими, а будут *затухающими*: их амплитуда будет ***экспоненциально*** уменьшаться со временем;
- частота колебаний постоянна и равна собственной частоте колебаний LC-контура;
- теоретически такое затухание будет бесконечным;
- скорость затухания зависит от электрического сопротивления R контура.

Если в случае сил сухого и вязкого трения выразить в формулах превращение части энергии колебательной системы в тепло довольно трудно, то для RLC-контура это оказывается совсем просто: мощность (энергия в единицу времени) превращаемой в тепло энергии при протекании тока I через сопротивление R определяется по закону Джоуля: $P = I^2 \cdot R = (\dot{q})^2 \cdot R$.

================================

Итак,

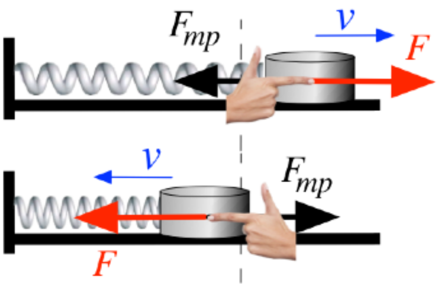
- мы рассмотрели *идеальные гармонические осцилляторы*, совершающие **незатухающие собственные** колебания без потери энергии;
- мы рассмотрели *реальные осцилляторы*, в которых присутствуют внешние тормозящие воздействия. **Собственные** колебания этих осцилляторов - **затухающие**. Осцилляторы при этом энергию теряют;
- и появляется логичный вопрос: *а можно ли в колебательную систему добавлять извне энергию в процессе колебаний?*

Вот ответом на последний вопрос и займёмся.

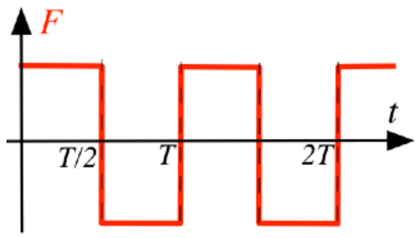
Вынужденные колебания

Колебания, совершающиеся под воздействием ***внешней периодической силы***, называются ***вынужденными*** (в отличие от *свободных колебаний*). В этом случае внешняя сила совершает *положительную работу* и обеспечивает *приток энергии* к колебательной системе. Она не дает колебаниям затухать, несмотря на действие сил трения. Эта внешняя сила называется *вынуждающей силой*.

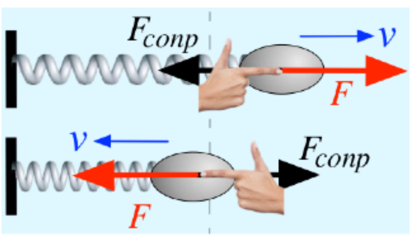
Рассмотрим простенький пример из предыдущего параграфа - пружинный маятник с сухим трением. *Собственные* колебания такого маятника будут затухающими: постоянно действующая сила сухого трения будет отнимать энергию у колебательной системы и, отняв её полность, приведёт к останову.



Но нам не хочется, чтобы этот маятник останавливался. Что делать? Общий ответ понятен: надо "доливать" в колебательную систему внешней энергии, чтобы компенсировать её потери от трения. Как? Например, вот так: прикладывать к маятнику внешнюю силу F (например, пихая его пальцем) такую, чтобы в каждый момент времени она компенсировала (была равна по величине и противоположно направлена) силу сухого трения. Поскольку сила сухого трения постоянна по величине, то график изменения нашей прикладываемой силы F (вынуждающей силы) будет выглядеть как-то так: на каждом полупериоде надо просто менять её направление. Величина же её в точности равна силе сухого трения. Получилась периодическая негармоническая (поскольку изменяется не "по косинусу") внешняя сила. Если говорить *динамически*, то сила F полностью компенсирует силу сухого трения и колебания ПМ происходят как-бы в отсутствии трения.

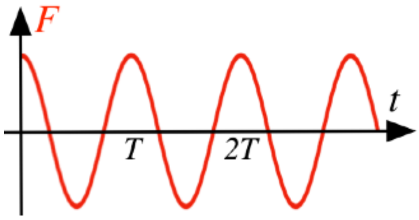


Но корректнее говорить *энергетически* (поскольку сила сухого трения всё-таки есть - ведь её действие приводит к выделению тепла): сила F совершает положительную работу и обеспечивает приток энергии к колебательной системе, компенсируя тепловые потери. Она не дает колебаниям затухать, несмотря на действие сил трения. Колебания нашего ПМ стали *вынужденными* (есть периодическая негармоническая внешняя сила) и *незатухающими*. Мы ещё к этому примеру вернёмся, когда будем говорить об *автоколебаниях*.



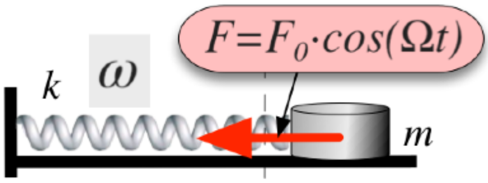
Аналогично можно рассмотреть случай пружинного маятника с вязким трением. *Собственные* колебания такого маятника будут затухать, но мы этого не хотим. Поэтому аналогично приложим к маятнику внешнюю силу F такую, чтобы в каждый момент времени она компенсировала силу вязкого трения.

Поскольку (как мы выяснили в предыдущем параграфе) сила вязкого трения изменяет свою величину с собственной частотой колебаний ПМ, то график изменения нашей внешней силы F будет выглядеть вот так: получилась периодическая гармоническая (изменяется "по косинусу") внешняя сила. Все остальные выводы - как и в предыдущем случае. Колебания нашего ПМ стали *вынужденными* и *незатухающими*.



Ага, из этих примеров становится понятно, что приложением *внешней периодической силы* можно "победить" силы трения и сделать колебания системы *незатухающими*.

Периодическая внешняя сила может изменяться во времени по различным законам. Особый интерес представляет случай, когда внешняя сила изменяется по *гармоническому закону*. Вот этот случай и рассмотрим.

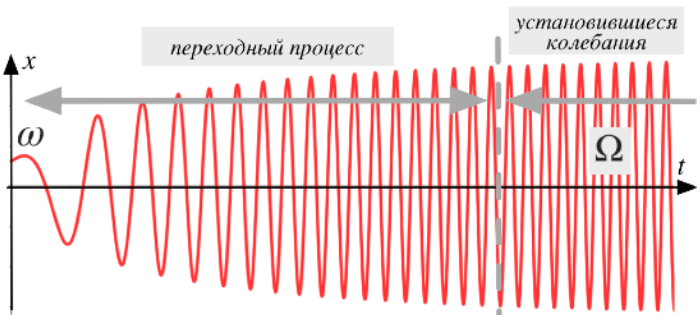


Имеем: знакомый нам пружинный маятник ***без трения*** (трение "добавим" чуть позже). Собственная частота его колебаний равна $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. К нему приложена внешняя гармоническая сила $F = F_0 \cdot cos(\Omega t)$, где Ω - частота её изменения. Что будет происходить в колебательной системе?

Давайте для начала запишем второй закон Ньютона для ПМ: $m\ddot{x} = -k \cdot x + F_0 \cdot cos(\Omega t)$ или $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot cos(\Omega t)$. О, опять дифференциальное уравнение! Ну сколько можно? Ладно-ладно, ещё чуть-чуть. Решением его будет вот такое уравнение движения нашего ПМ: $x(t) = A \cdot sin(\omega t) + \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \cdot cos(\Omega t)$ [1].

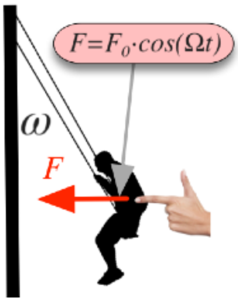
Категорически *не надо запоминать* это громоздкое уравнение. Нам чуть позже оно пригодится.

Так как же будет колебаться наша система? В начальный момент начинаются оба процесса - свободные колебания с собственной частотой ω и вынужденные колебания с частотой Ω. Но свободные колебания затухают из-за неизбежного наличия сил трения (да-да - силы трения есть[14]!). Поэтому через некоторое время (по окончании ***переходного процесса***) в системе остаются только ***установившиеся колебания*** с частотой Ω внешней вынуждающей силы. Вынужденные колебания "победили" собственные.



И это - иллюстрация к общему утверждению: *установившиеся вынужденные колебания всегда происходят на частоте Ω внешней силы.*

[14] *В начале я сказал, что их нет, для простоты составления уравнений.*



И вот вам пример из жизни. Качели - это по сути физический маятник с собственной частотой свободных колебаний ω. Если ваш приятель сядет на качели, вы их отклоните на небольшой угол и отпустите, то качели будут совершать затухающие (трение-то есть) свободные колебания с собственной частотой ω. Это очевидно. Но если вы будете раскачивать вашего приятеля с гармонической силой частоты Ω, то качели будут совершать вынужденные колебания с частотой Ω. Выйдите во двор и проверьте.

Вдумчивый ученик тянет руку: "А вынужденные колебания всегда незатухающие?"

Совершенно необязательно. Ведь через внешнюю вынуждающую силу в колебательную систему "доливается" энергия, призванная компенсировать потери от сил трения. И если этой энергии будет недостаточно для компенсации потерь, то такие вынужденные колебания будут затухать. Например, при наличии сухого трения с его трением покоя.

Итак, по окончании переходного процесса установившиеся вынужденные колебания будут иметь вид (вытекает из [1]): $x(t) = \dfrac{F_0}{m} \cdot \dfrac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \cdot cos(\Omega t)$ (трение опять не учитываем для простоты рассуждений). Ничто не смущает в этом уравнении? А сомножитель $\dfrac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$?

Резонанс

Именно этот сомножитель $\dfrac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$ и ответственнен за явление, называемое *резонансом*[15]. Ведь если частота вынуждающей силы станет равна частоте собственных колебаний системы ($\omega = \Omega$), то амплитуда таких колебаний должна "улететь" в бесконечность! Это так для идеальных колебательных систем без трения. А в реальных колебательных системах с трением произойдёт резкое увеличение амплитуды.

Резонанс[16] *- это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешней силы* Ω *к собственной частоте колебательной системы* ω.

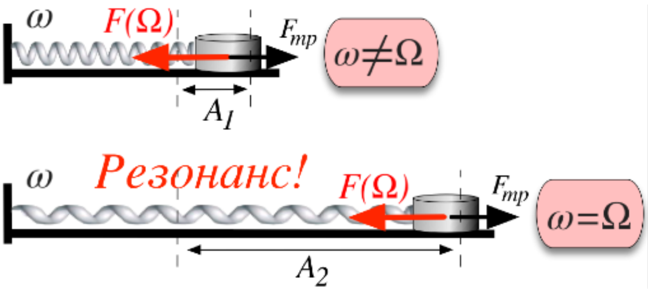
При резонансе создаются оптимальные условия для передачи энергии от внешнего источника (вынуждающей силы) в систему, так как в течение всего периода колебаний работа вынуждающей силы положительна.

Резонанс встречается в механике, электронике, оптике, акустике, астрофизике.

[15] *В уравнениях вынужденных колебаний систем с трением (реальных систем) этот сомножитель выглядит чуток сложнее, но свою общую форму он сохраняет.*

[16] *От латинского "resono" - откликаться.*

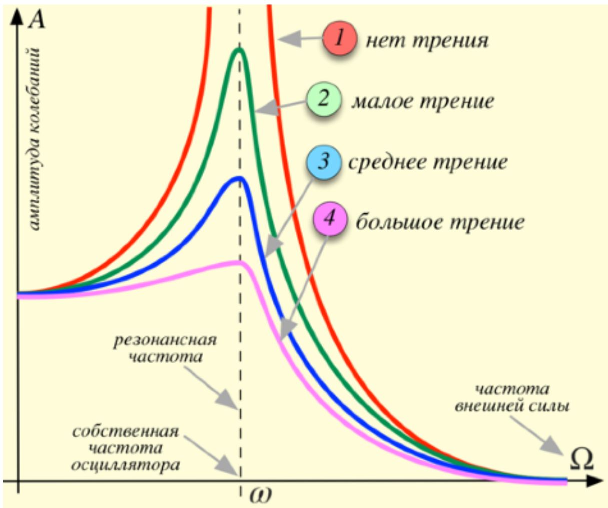
Резонанс в механических колебательных системах



Вот иллюстрация. Вынужденные колебания пружинного маятника с трением (с собственной частотой ω) под действием вынуждающей силы $F = F_0 \cdot cos(\Omega t)$, где Ω - частота её изменения. Если $\omega \neq \Omega$, то амплитуда установившихся вынужденных колебаний равна A_1.

Если мы меняем частоту изменения вынуждающей силы Ω (*только частоту, амплитуда вынуждающей силы F_0 не меняется!*) и делаем её равной ω, то амплитуда установившихся вынужденных колебаний резко возрастёт - наступит явление резонанса. А вот насколько возрастёт - определяется имеющимся в колебательной системе трением.

Или ещё. Вспомните процесс раскачивания на качелях: если это делать очень быстро или очень медленно, качели практически невозможно будет раскачать. Если же подобрать частоту толчков, близкую к частоте собственных колебаний качелей, то раскачивание будет эффективным.



Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы называется резонансной характеристикой или *резонансной кривой*. Вот они показаны на рисунке.

Точное решение дифференциальных уравнений вынужденных колебаний описывает дополнительные эффекты резонанса: смещение резонансных частот от собственной частоты ω колебательной системы при бОльшем трении в системе, отставание вынужденных колебаний по фазе от вынуждающей силы. Но на нашем уровне рассмотрения это не принципиально.

Это мы поговорили о резонансе теоретически. А на практике как проявляется резонанс?

Одно важное утверждение: ***любое физическое тело обладает своей собственной резонансной частотой***[17] (и не одной). Эта резонансная частота определяется его формами и свойствами материала, из которого оно сделано.

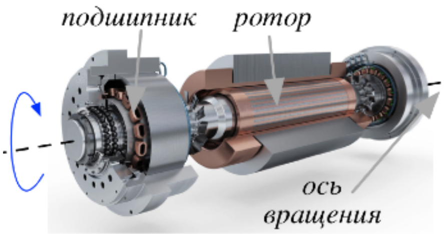
Вот висит колокол. Ударьте слегка по нему молоточком. Колокол начнёт вибрировать (и зазвучит, передавая свои вибрации окружающему воздуху) ***на своей собственной частоте***.

Или ещё пример - каменные колонны в соборах. Колонны держат свод собора - они находятся под большим механическим напряжением. Ударьте слегка по колонне твёрдым предметом и приложите к колонне ухо - вы услышите и почувствуете как гудит колонна: она ***вибрирует на своей собственной частоте***.

[17] *Ага, я же говорил в начале, что все мы - колебательные системы!*

А коли так, то *любое внешнее механическое воздействие на собственной частоте вводит физическое тело в резонанс*. Резонанс, как и любое физическое явление, сам по себе не является ни плохим, ни хорошим, так как может приносить как пользу, так и вред.

Вот хрестоматийный негативный пример действия резонанса. Если рота солдат строевым шагом "в ногу" пройдет по мосту, то может обрушить его потому, что вызовет сильный резонанс собственных колебаний моста с колебаниями от марша сотен солдат. Что и произошло в 1905 году в Петербурге с Египетским мостом через Фонтанку. Поэтому прежде, чем колонна солдат вступает на мост, командиры всегда отдают команду "Сбить ногу!" Резонанс мостов может вызвать не только рота солдат, но и, например, колебания ветра.

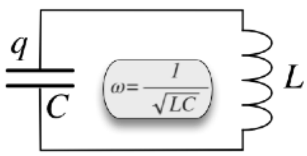


Вот ещё пример ситуации, когда резонанс может "натворить дел". У электродвигателя есть вращающийся ротор, закреплённый в подшипнике. Идеально центр тяжести ротора должен лежать точно на оси его вращения и эта ось должна совпадать с осью вращения подшипника. Но идеального ничего не бывает - существуют допуски при изготовлении роторов и подшипников. Наличие этих допусков приводит к появлению резонансных частот системы "ротор-подшипник". И если частота вращения ротора совпадёт с этой резонансной частотой, то возникнет резонанс. Он может привести к поломке электродвигателя.

Это всё к тому, что при проектировании и производстве механических систем и конструкций учёт возможных резонансов обязателен.

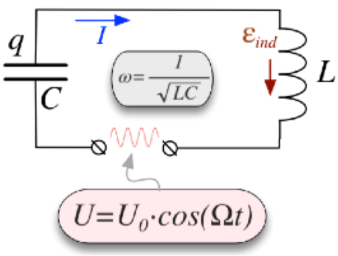
Ну а может быть польза от резонанса? Да. Когда вы выталкиваете забуксовавший в ямке автомобиль, вы его раскачиваете, пытаясь "поймать резонанс". Ультразвуковая резка бетона и ультразвуковая чистка зубов - это резонансные явления (приводящие к локальным разрушениям) при совпадении частоты ультразвука с собственной частотой бетона или зубного камня.

Резонанс в электрических колебательных системах



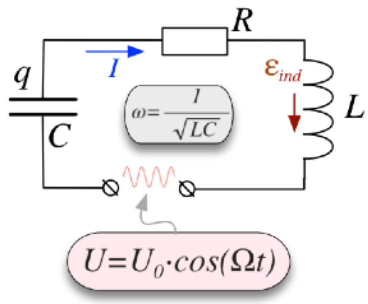
Сначала поговорим о ***вынужденных колебаниях*** в LC-контуре.

Есть у нас LC-контур с частотой собственных колебаний $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ (рассматриваем пока для простоты ситуацию, когда электрическое сопротивление контура отсутствует). Разорвём один проводок этой схемы как показано на рисунке и подадим в разрыв гармонический сигнал (напряжение) $U = U_0 \cdot cos(\Omega t)$. Этот сигнал является ***внешним вынуждающим воздействием*** на контур. А колебания, которые при этом в контуре происходят, становятся ***вынужденными***.



По закону Ома для полной цепи можем записать:
$\varepsilon_{ind} = U_C + U_0 \cdot cos(\Omega t)$ или в уже ставшем привычном нам виде
$\ddot{q} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{U_0}{L} \cdot cos(\Omega t)$ - получили дифференциальное уравнение, описывающее поведение заряда на конденсаторе при вынужденных колебаниях в контуре. Похожесть этого дифференциального

уравнения на дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний без трения $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot cos(\Omega t)$ позволяет сделать по аналогии вывод: через некоторое время (по окончании ***переходного процесса***) *в контуре будут происходить* ***установившиеся колебания*** *с частотой Ω внешнего гармонического сигнала*. И эти установившиеся вынужденные колебания будут иметь вид: $q(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \cdot cos(\Omega t)$. И



сомножитель $\frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$ говорит, что в контуре возможен резонанс.

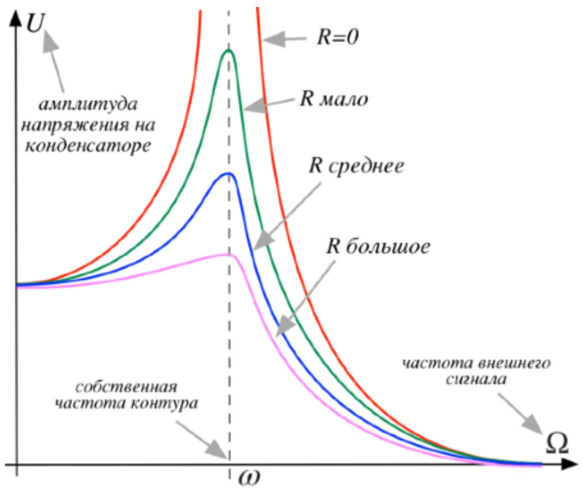
А если всё-таки признать, что в контуре есть и электрическое сопротивление, то дифференциальное уравнение поведения заряда на конденсаторе будет выглядеть так:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_0}{L} \cdot cos(\Omega t).$$

Вы, наверное уже сообразили, что силы трения (именно вязкого трения) в механических колебательных системах и электрическое сопротивление в электрических колебательных системах очень похожи по своему действию:

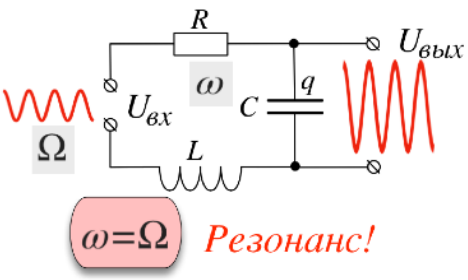
- сила вязкого трения пропорциональна $\dot{x}$, а напряжение на резисторе пропорционально $\dot{q}$;
- через работу сил трения происходят теплопотери энергии в механических колебательных системах, а через выделение джоулева тепла на резисторе - теплопотери энергии в электрических колебательных системах;
- наличие сил вязкого трения приводит к экспоненциальному затуханию собственных колебаний в механических колебательных системах, а наличие электрического сопротивления приводит к экспоненциальному затуханию собственных колебаний в электрических колебательных системах;
- чем больше сила вязкого трения и чем больше электрическое сопротивление, тем менее выраженными становятся резонансные кривые (об этом чуть ниже).

Итак, при приближении частоты внешнего сигнала Ω к собственной частоте RLC-контура ω возникает ***резонанс*** - резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний заряда на конденсаторе. Мы можем также говорить об амплитуде напряжения на конденсаторе, поскольку $U_C = \frac{q}{C}$.



Как и в случае механических колебательных систем, резонанс в электрических описывается резонансными кривыми. Как видите, резонансное увеличение амплитуды тем резче, чем меньше электрическое сопротивление контура.

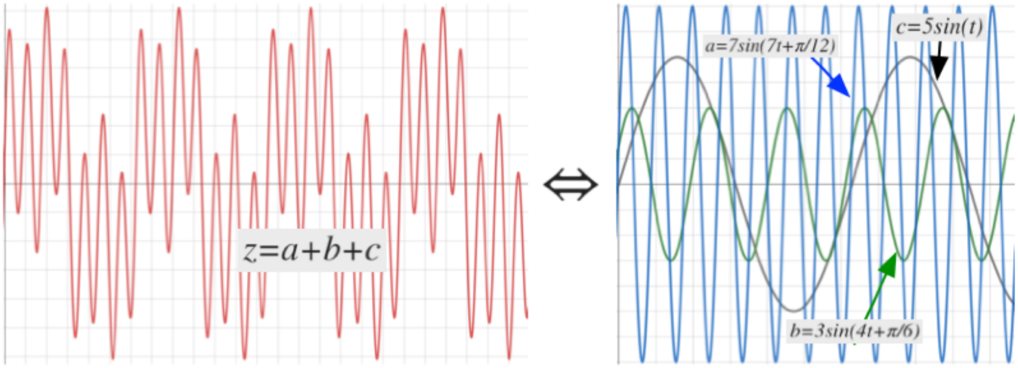
Проиллюстрировать резонанс в RLC-контуре можно так: резкое увеличение амплитуды выходного сигнала (напряжения на конденсаторе) при совпадении частот. По сути мы имеем *усилитель напряжения гармонического сигнала*.



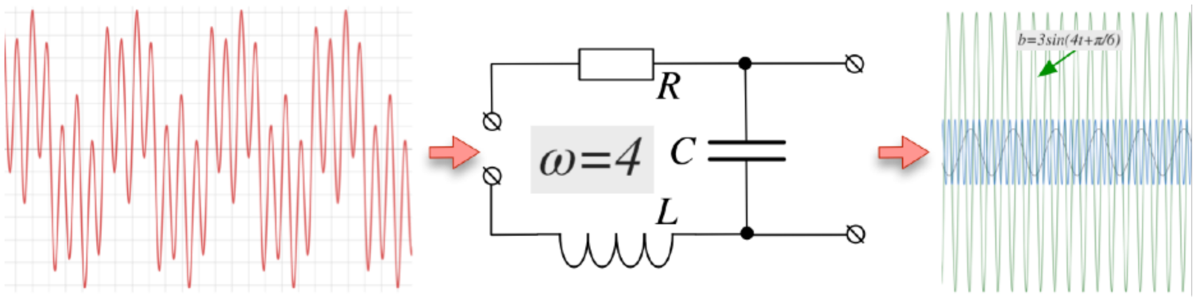
Это опять-же теория. А что с практикой?

Если в механических системах резонанс приводит зачастую к разрушениям и с ним борются, то в электрических системах резонанс - друг и помощник. Вся радио- и связная техника построена на резонансах.

Великая наука математика утверждает, что любую[18] сложную функцию (сигнал) можно представить как сумму гармонических функций: $f(t) = A_0 + \sum A_k \cdot cos(k\omega t + \varphi_k)$[19].

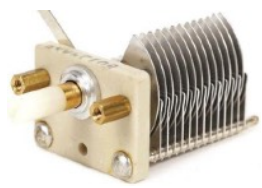


Вот у нас есть сигнал (красненький) довольно непонятной формы. А на самом деле этот сигнал представляет собой сумму трёх синусоид:
$z = 5sin(t) + 3sin(4t + \pi/6) + 7sin(7t + \pi/12)$. Это я так специально подобрал и построил, но математика умеет находить разложение практически любой функции на гармонические составляющие (Фурье-анализ). Все три синусоиды имеют разные частоты, амплитуды и начальные фазы. А теперь подадим наш смешанный красненький сигнал на вход RLC-контура, имеющего собственную частоту $\omega = 4$ (в условных единицах). Что произойдёт?



А произойдёт вот что: для составляющей $b = 3sin(4t + \pi/6)$ нашего входного сигнала (у неё частота колебаний равна $\Omega = 4$) возникнет резонанс в RLC-контуре с собственной частотой $\omega = 4$. То есть произойдёт усиление по амплитуде составляющей b в соответствии с резонансной кривой нашего контура. Остальные же составляющие усиливаться не будут, посколько с их частотами резонанс не происходит. И тем самым мы выделили (говорят "отфильтровали") из входного сигнала вполне определенную гармоническую составляющую.

И на этом резонансном методе основывается вся техника фильтрации сигналов.

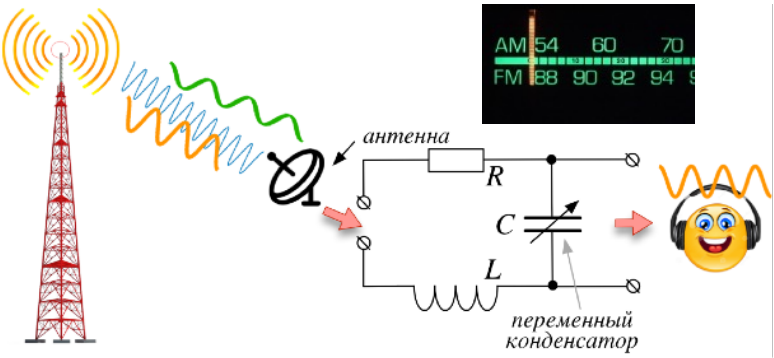


А давайте поставим в наш RLC-контур переменный конденсатор. Рукоятку такого конденсатора можно вращать, меняя его ёмкость, и тем самым *менять собственную частоту контура* ($\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$). Каждая радиостанция работает на своей частоте: например, "Авторадио" - на 90,3

[18] *Практически любую.*

[19] *Это называется рядом Фурье.*

МГц, "Радио Вести FM" - 97,6 МГц[20]. С радиовышки, транслирующей передачи этих радиостанций, излучаются сигналы разных частот. Приделаем ко входу нашего RLC-контура приёмную антенну, а к выходу подключим наушники. Вращая рукоятку переменного конденсатора нашего контура, мы будем входить в резонанс с сигналом соответствующей



радиостанции и выделять этот сигнал. Так и работают наши радиоприёмники.

Вот ещё важное замечание. Мы увидели, что при резонансе увеличивается амплитуда напряжения резонирующего сигнала. Но отнюдь не его энергия (мощность)[21]. Более того: часть энергии входного сигнала теряется в виде джоулева тепла на резисторе. Поэтому и говорят, что RLC-контур - это пассивный фильтр (частотный сигнал-то он выделяет, но мощность его не увеличивает). А для увеличения мощности сигнала используются активные схемы - схемы с источниками энергии (батареями или поключением к электросети) - усилители мощности.

И ещё про резонанс... Все музыкальные инструменты - это резонаторы со своими резонансными частотами.

> *"Все связи между явлениями устанавливаются исключительно путем разного рода простых и сложных резонансов - согласованных вибраций физических систем."*
>
> *Никола Тесла*

Давайте подытожим то, что мы рассмотрели в последних параграфах:

- мы рассмотрели ***диссипативные*** колебательные системы (механические и электрические). Слово *"диссипативные"* подразумевает то, что в таких колебательных системах происходят потери энергии колебаний из-за наличия сил трения или электрического сопротивления;
- диссипативные колебательные системы - это реальные физические системы и в них всегда в той или иной мере происходят потери энергии;
- *собственные* колебания в диссипативных системах *являются затухающими*;
- для восполнения потерь энергии и поддержания колебаний в системе (превращения их в *незатухающие*) необходимо действовать на колебательную систему внешним ***периодическим*** воздействием, делая эти колебания *вынужденными*;
- если действовать на систему внешним ***гармоническим*** воздействием, то установившиеся вынужденные гармонические колебания происходят *на частоте внешнего воздействия*;
- если частота внешнего *гармонического* воздействия совпадает с частотой собственных колебаний системы, то возникает явление *резонанса*.

*То есть **диссипативный гармонический осциллятор** можно "раскачать" (то есть сделать колебания в нём незатухающими) другим (внешним) гармоническим осциллятором.*

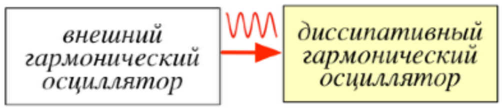
---

[20] *Это частоты так называемого FM-диапазона для Москвы и Московской области.*

[21] *А наше ухо лучше слышит более мощные сигналы.*

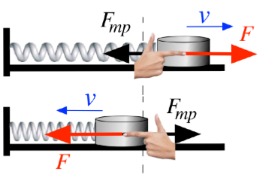
Вот кратенько подытожили. Вопросы?

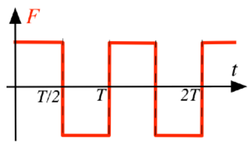
У вдумчивого ученика есть: "С внешним гармоническим воздействием понятно. Такое гармоническое воздействие ещё найти надо. А нельзя ли как-нибудь попроще подводить энергию в колебательную систему?"
Правильный вопрос!



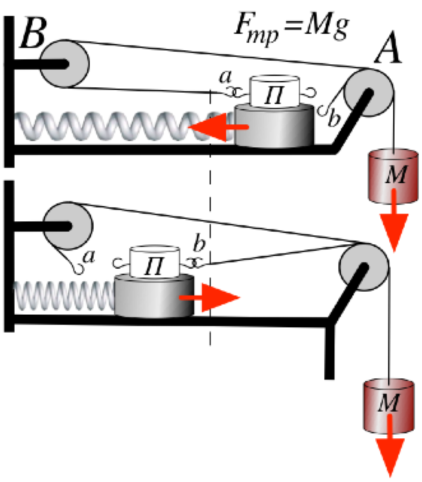
Ну посудите сами. Во-первых, этот внешний гармонический осциллятор должен сам быть незатухающим. А где такой взять, если все осцилляторы в окружающем нас мире диссипативны по сути? "Раскачивать" его ещё более внешним гармоническим осциллятором? Ну так можно рассуждать до бесконечности. Во-вторых, существуют простые источники постоянной силы (например, сила тяжести груза) или постоянного напряжения (батареи-аккумуляторы). Нельзя ли их как-то приспособить для поддержания незатухающих колебаний в диссипативном гармоническом осцилляторе? Поговорим об этом.

■ Автоколебания





Давайте вспомним пружинный маятник с сухим трением. У сухого трения величина силы постоянна. Мы пришли к выводу, что для поддержания колебаний достаточно "пихать этот маятник пальцем" с постоянной по величине, но меняющей свое направление на противоположное силой F. Величина этой силы должна равняться силе трения. И тогда колебания станут незатухающими. А как это сделать на практике? Напрягите фантазию!



Прошло пять минут и вдумчивый ученик воскликнул: "Ага! Вот что я придумал. Сила сухого трения постоянна и её легко посчитать: $F_{тр} = f \cdot mg$, где f - коэффициент сухого трения, m - масса маятника. Возьмём грузик массой M такой, чтобы $F_{тр} = Mg$ и перекинем две нити от него через блоки A и B. И придумаем такой приборчик Π, чтобы он, будучи прикреплённым к нашему маятнику, в правом крайнем положении маятника цеплялся за крючочек a и отцеплялся от крючочка b, а в левом крайнем положении маятника - наоборот: цеплялся за крючочек b и отцеплялся от крючочка a. Тогда грузик M будет создавать постоянную силу F, а приборчик Π будет переключать её направление. И колебания станут незатухающими. Грузик M всё время будет опускаться и уменьшение его потенциальной энергии пойдёт на восполнение энергии колебаний."

- А если мы увеличим массу грузика M, то что произойдёт?
- Маятник всё равно будет качаться, но быстрее.
- Верно. А если ещё из этой конструкции и пружину убрать, то что произойдёт?
- Ой! Маятник перестанет качаться гармонически, а станет двигаться из стороны в сторону равноускоренно, главное, чтобы приборчик Π успевал перецеплять крючочки.

Ну что ж, вдумчивый ученик, в общем всё верно. И приборчик Π такой можно придумать.

Главное в этой идее следующее:
- есть источник ***постоянного*** внешнего воздействия: динамически - это сила, с которой грузик M действует на маятник, а энергетически - это убыль потенциальной энергии грузика M, которая идёт на восполнение энергии колебаний;
- есть некий приборчик Π, который определяет в каком положении находится маятник и соответствующим образом перецепляет крючочки. Приборчик Π осуществляет *управление* колебательной системой и такие действия называются ***обратной связью***.

Об управлении мы говорили с вами в Истории про Ток. Добавлю следующее:

Во всех задачах автоматического управления понятие обратной связи - ключевое. ***Обратная связь*** *- это процесс, приводящий к тому, что результат управления какой-либо системой влияет на управление этой системой.*

По способу обработки обратной связи различают *положительную* и *отрицательную* обратную связь. Отрицательная обратная связь изменяет входной сигнал таким образом, чтобы противодействовать изменению выходного сигнала. Это делает систему более устойчивой к случайному изменению параметров. Положительная обратная связь, наоборот, усиливает изменение выходного сигнала.

Это всё, как вам может показаться, заумные слова, но на самом деле понятие обратной связи постоянно присутствует в нашей жизни. Вот простейший пример: вы сидите и слушаете музыку по радиоприёмнику, "Ой, что-то тихо звучит. Надо сделать погромче" - решаете вы и крутите рукоятку громкости вправо. "Ой, а так совсем громко. Надо сделать потише" - и вы поворачиваете рукоятку громкости немного влево. Вы совершили два акта управления: первый с положительной обратной связью (усилили звук), а второй - с отрицательной. И таких примеров - масса на каждом шагу.

И уже знакомый нам пример системы с отрицательной обратной связью[22]:

закон электромагнитной индукции Фарадея и правило Ленца к нему: $\varepsilon_{ind} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

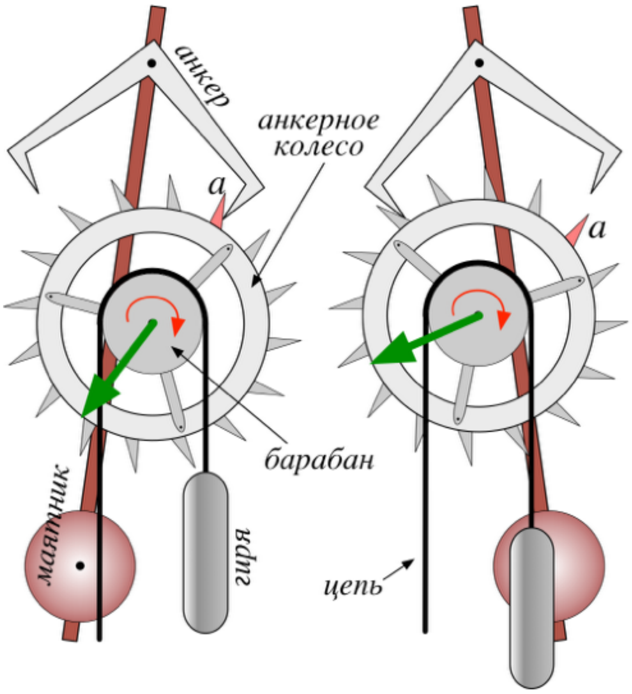
Изменение магнитного потока магнитного поля порождает индукционный ток такого направления, что порождаемое этим током индукционное магнитное поле ***стремится уменьшить*** *изменение исходного магнитного потока.*

Это не просто система управления, это - физический закон, распространяющийся на все электромагнитные процессы. А знак "минус" обеспечивает отрицательную обратную связь.

Вдумчивый ученик опять тянет руку: "Это всё очень интересно и здОрово - незатухающие гармонические колебания, обратная связь и прочее. А для чего это надо в жизни?"

[22] *Смотри Историю про Магнетизм.*

Изучение гармонических колебаний началось с изучения маятника. А к маятнику интерес возник из-за того, что стали нужны часы нового поколения. Солнечные, водяные и песочные свой век отслужили - наступало время ***механических*** часов. Нужно было научиться измерять время с бОльшей точностью (это требовалось и для морской навигации, и для развивающейся науки). Маятник позволяет отмерять равные малые интервалы времени - периоды своих колебаний. Периоды колебаний маятника можно легко настраивать. А время нужно измерять постоянно. Поэтому колебания маятника (который по сути своей является диссипативной колебательной системой) нужно постоянно поддерживать. Вот одна из причин интереса к поддержанию незатухающих гармонических колебаний. Ну а в радиосвязи гармонические колебания - основа для передачи сигналов.



Работы по созданию механических ***маятниковых*** часов начались в Европе в 13-м веке. Ну а в 17-м веке голландец Христиан Гюйгенс довел их конструкцию "почти до совершенства".

Посмотрим на основные идеи в конструкции маятниковых часов. Есть маятник - диссипативная гармоническая колебательная система. Есть гиря на цепочке - источник постоянной силы и энергии для поддержания незатухающих колебаний маятника. И есть ***спусковой механизм*** (так говорят часовщики): анкер[23] и анкерное колесо. Анкер жестко соединён с палкой маятника. Анкерное колесо находится на неподвижной оси вращения. С анкерным колесом жёстко связан барабан, через который перекинута цепочка, на которой подвешена гиря. Цепочка скользить по барабану не может - на барабане есть зубчики, которые удерживают цепь от проскальзывания. Под тяжестью гири барабан вместе с анкерным колесом "норовит" повернуться по часовой стрелке - как показано на рисунке. Ну и зелёненькая стрелочка, связанная с барабаном, - пусть это будет "как-бы секундная стрелка" часов. Как это всё работает?

Предположим, что маятник находится в своем крайнем левом положении. При этом правый зуб анкера упирается в зубчик a (я его специально выделил красным цветом) анкерного колеса, не давая тем самым анкерному колесу повернуться по часовой стрелке. Маятник начинает свой ход к крайнему правому положению. При этом анкер разблокирует зубчик a и анкерное колесо повернётся на некоторый угол по часовой стрелке. Когда маятник дойдёт до своего крайнего правого положения, левый зуб анкера упрётся в соответствующий зубчик анкерного колеса и не даст ему вращаться по часовой стрелке дальше. И всё повторится снова. Но зубчик a анкерного колеса уже повернулся на определённый угол (а вместе с ним и "секундная стрелка").

Во время зацепления анкерных зубов за зубчики анкерного колеса происходит передача энергии от гири маятнику, которая компенсирует потери. За каждый полупериод колебания маятника анкерное колесо поворачивается на один свой зубчик. Характерный звук часов "тик-так" - это звук соприкосновения зубчиков анкера и анкерного колеса.

---

[23] *От английского **anchor** - якорь.*

Осталось добавить циферблат, часовую и минутную стрелку (подключённые через систему шестерёнок) и кукушку (*шутка*) - получатся настенные *часы с кукушкой*, какие ещё можно встретить в деревенских домах.

Спусковой механизм (анкер и анкерное колесо) являются механизмом управления в этой колебательной системе: они дозированно позволяют маятнику получать энергию от гири, обеспечивая незатухающие колебания. Эта дозированность определяется отрицательной обратной связью: зубец анкера зацепляет зубчик анкерного колеса и не даёт этому колесу разогнаться.

"Так анкер и анкерное колесо и есть мой приборчик Π!" - воскликнул вдумчивый ученик.

В карманных и ручных механических часах вместо гири используется часовая пружина.

Ну вот мы и получили что хотели: в маятнике - гармонические незатухающие колебания, подпитываемые источником постоянной силы - гирей. Когда гиря опустится совсем низко, достаточно её подтянуть вверх (зарядить энергией).

Рассмотренные маятниковые часы - это пример *автоколебательной* системы.

Автоколебания - незатухающие колебания в диссипативной колебательной системе с обратной связью, поддерживающиеся за счёт энергии постоянного внешнего воздействия. Амплитуда и период автоколебаний определяются свойствами *самой автоколебательной* системы.

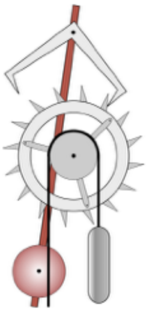
Автоколебательные системы можно разделить на три основных элемента:
1) колебательную систему (маятник в нашем случае с часами);
2) источник энергии, за счет которого поддерживаются автоколебания (гиря);
3) устройство, регулирующее поступление энергии из источника в колебательную систему (анкер и анкерное колесо).

Вот виды рассмотренных нами колебаний по типу внешнего воздействия:
- **Свободные колебания** - это затухающие колебания (поскольку все реальные колебательные системы диссипативны). Их амплитуда зависит от первоначального "толчка", запустившего эти колебания (от начальных условий). Частота зависит от свойств самой колебательной системы.
- **Вынужденные колебания** - это незатухающие колебания под действием внешней периодической силы (воздействия). Их амплитуда и частота определяются этим внешним воздействием.
- **Автоколебания** - это незатухающие колебания, поддерживаемые *постоянным* внешним воздействием. *Амплитуда и частота автоколебаний определяются свойствами автоколебательной системы*.

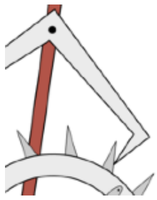
Вот последнюю выделенную фразу надо пояснить.

Если рассматривать самостоятельно колеблющийся маятник тех часов, которые мы с вами обсудили выше, то что про его колебания мы могли бы сказать?

- это свободные затухающие колебания;
- частота этих колебаний (как колебаний *физического маятника*) определяется как $\omega = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$, где I - момент инерции маятника;
- амплитуда этих колебаний определяется начальными условиями: как сильно мы этот маятник отклонили при запуске.

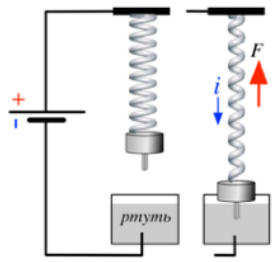


А теперь смотрим на маятник, колеблющийся в составе автоколебательной системы.
Какова амплитуда этих колебаний? Если, например, маятник при запуске отклонить слишком сильно, то потери энергии на трение будут больше, чем поступление энергии от гири через анкер и анкерное колесо, и амплитуда будет уменьшаться. Наоборот, если маятник при запуске отклонить слабо, то избыток энергии от гири заставит амплитуду возрасти. Автоматически установится такая амплитуда, при которой *расход и поступление энергии сбалансированы*. *Наличие обратной связи подстраивает амплитуду!*



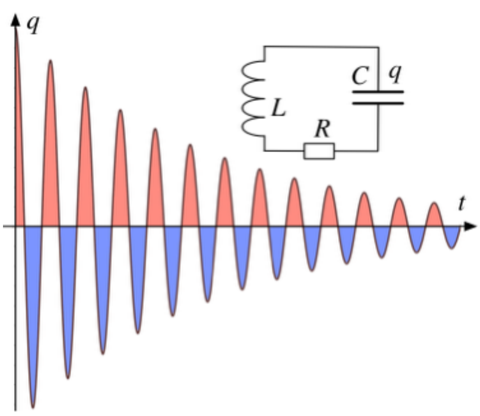
А какова частота этих колебаний? Зубья анкера и зубчики анкерного колеса периодически взаимодействуют. И это не мгновенные взаимодействия: они взаимодействуют определённый интервал времени, пока находятся в зацеплении. Это взаимодействие делает различными колебания самостоятельно колеблющегося маятника и колебания маятника в составе автоколебательной системы. И поэтому частота колебаний маятника в автоколебательной системе не будет равна $\omega \neq \sqrt{\frac{mgd}{I}}$! *Наличие обратной связи изменяет частоту!*

И ещё раз: ***амплитуда и частота автоколебаний определяются свойствами автоколебательной системы в целом***. Автоколебательную систему можно описать уравнениями Теории Автоматического Управления и из них определить все параметры автоколебательной системы (в том числе амплитуду и частоту). *Автоколебания являются практической реализацией незатухающих гармонических колебаний при постоянном внешнем воздействии.*

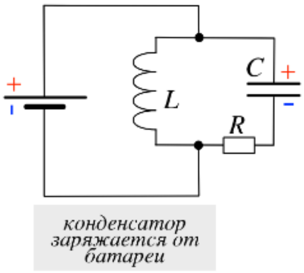


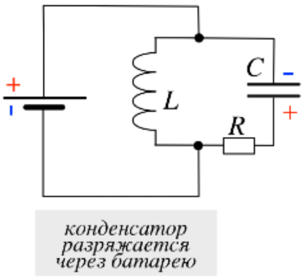
А вот пример электромеханической автоколебательной системы. Груз висит на пружине и его нижний конец погружается при колебаниях в чашечку со ртутью. Один полюс батереи присоединен к пружине наверху, а другой - к чашечке со ртутью. При опускании груза электрическая цепь замыкается и по пружине проходит ток. Витки пружины благодаря магнитному полю тока начинают при этом притягиваться друг к другу, пружина сжимается, и груз получает толчок кверху. Тогда контакт разрывается, витки перестают стягиваться, груз опять опускается вниз, и весь процесс повторяется снова. Кстати, электрический звонок почти так же и устроен.

Ну и наконец рассмотрим чисто электрическую автоколебательную систему - *генератор электрических колебаний*.



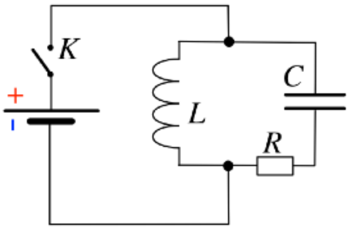
Имеется RLC-контур. Если зарядить его конденсатор, то в контуре начнутся затухающие колебания: пол-периода на конденсаторе будет положительный заряд, а пол-периода - отрицательный. Теплопотери на резисторе будут причиной затухания. Мы хотим сделать эти колебания незатухающими. Для этого у нас есть батарея - источник постоянного напряжения (источник постоянного внешнего воздействия). Как её подключить к нашему RLC-контуру? Попробуем это сделать так, как это показано на рисунке. Тогда в тот полупериод, когда на верхней пластине конденсатора будет положительный заряд (а эта пластина соединена с положительным полюсом батареи), батарея будет подзаряжать конденсатор, пополняя его энергию. Это то, что нам надо. Однако в тот полупериод, когда на верхней пластине конденсатора будет отрицательный заряд, то





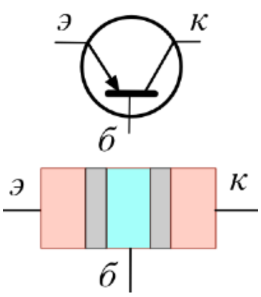
конденсатор будет просто разряжаться через батарею, отдавая ей свою энергию. А вот этого нам не надо: нам энергию контура надо пополнять за счет внешней, а не отдавать. То есть при таком подключении батареи в течение полу-период энергия поступает в контур, а в течение следующей половины периода возвращается в батарею. Не происходит компенсации потерь. *Батарея, постоянно подключенная к контуру, не может поддерживать в нем незатухающие колебания, так же, как постоянная сила не может поддерживать механические колебания.*

Поэтому вывод: *батарея должна подключаться только в те полупериоды, когда верхняя пластина заряжена положительно, а нижняя - отрицательно.* Только в этом случае батарея будет подзаряжать конденсатор, передавая ему энергию.

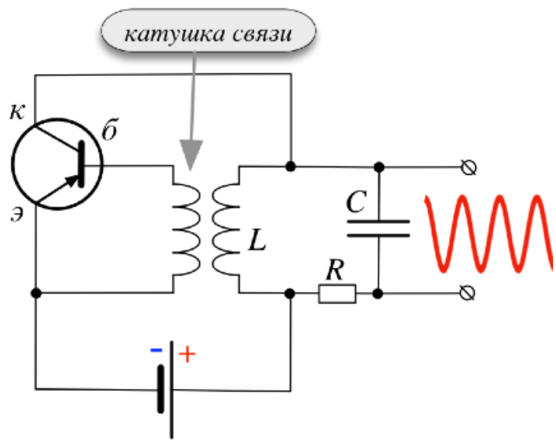


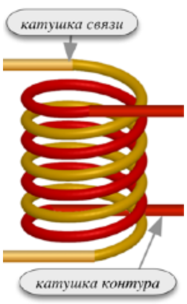
Вот как-то так. Нужен ключ. Да не простой ключ, а умный ключ: он должен отслеживать полупериоды колебаний и подключать батарею только на "правильных" полупериодах. Этот ключ и будет элементом управления с обратной связью в автоколебательной системе.

При высокой частоте колебаний никакой механический ключ не справится с быстрым переключением из-за своей инерционности. Поэтому речь может идти лишь об электронном ключе. А какие мы знаем электронные ключи? Правильно: ламповый триод или полупроводниковый транзистор. Будем рассматривать *биполярный p-n-p транзистор* в качестве ключа (хотя и триод и другие виды транзисторов тоже можно). Биполярный p-n-p транзистор - это два p-n-перехода и три электрода: коллектор, эмиттер и база. Током между эмиттером и коллектором можно управлять с помощью напряжения на базе. Обо всем этом подробно рассказывалось в Истории про Ток.



Включаем транзистор вот так ⇒



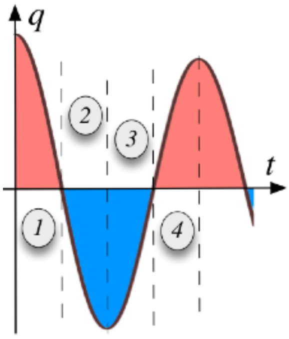


Что это за катушка связи? Объясняю. Выше мы поняли, что транзистор должен следить за полупериодами колебаний в контуре и подключать батарею только на "правильных" полупериодах. Вот через катушку связи транзистор и "подглядывает" за тем, что происходит в RLC-контуре. Катушка связи - это точно такая же катушка, что и катушка контура. Она намотана прямо на витки катушки контура. За счёт *взаимоиндукции*[24] на катушке связи - точно такое же

[24] *Смотри Историю про Магнетизм.*

напряжение (ЭДС индукции), что и на катушке контура[25]. Колебания в контуре возбуждают колебания напряжения на концах катушки связи, а тем самым - и на p-n переходе эмиттер-база.

Теперь смотрим как это всё работает. Будем рассматривать по четвертям периода колебаний.



(1) Первая четверть периода. Положительно заряженная пластина конденсатора, соединенная с коллектором, разряжается. Ток в колебательном контуре возрастает до максимального значения. В катушке связи возникает индукционный ток такого направления, что база имеет отрицательный потенциал относительно эмиттера. p-n переходы база-коллектор и эмиттер-база прямые. Транзистор открыт. Энергия от источника поступает через транзистор в колебательный контур (ключ замкнут).
(2) Вторая четверть периода. Ток в контуре убывает. Верхняя пластина заряжается отрицательно. В катушке связи ток меняет направление. На базе положительный потенциал. p-n переход коллектор-база обратный. Тока в цепи нет (ключ разомкнут).
(3) Третья четверть периода. Конденсатор разряжается. Ток растет до максимального значения, направлен от нижней пластины к верхней. В катушке связи ток направлен так, что база получает положительный потенциал. p-n переход база-коллектор обратный. Тока в цепи нет (ключ разомкнут).
(4) Четвертая четверть периода. Ток в контуре, не меняя направления, убывает. Верхняя пластина заряжается положительно. В катушке связи ток меняется по направлению. Потенциал на базе отрицательный. Переходы база-коллектор и эмиттер-база прямые. Энергия поступает от источника в колебательный контур (ключ замкнут).

Таким образом происходят незатухающие электрические колебания за счет поступления энергии от источника в колебательный контур в течение первой и четвёртой четвертей полупериода. Конденсатор можно подключить к осциллографу и увидеть незатухающую синусоиду.

Генератор электрических колебаний - автоколебательная система: RLC-контур + источник постоянного воздействия (батарея) + управляющее устройство с обратной связью (транзистор и катушка связи). Как и в маятниковых часах, *амплитуда и частота автоколебаний автоматически установятся такой, при которой расход и поступление энергии станут сбалансированы.*

> Генераторы электрических колебаний на транзисторах широко применяются во многих радиотехнических устройствах.

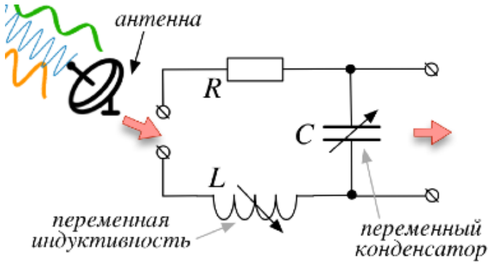
=====================

А теперь - пара задачек.

---

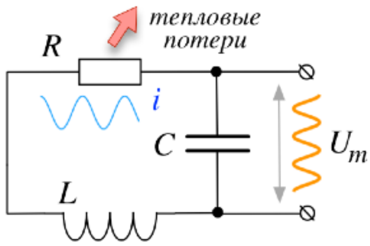
[25] *Главное - подключить выводы катушки связи к p-n-переходу в* ***нужной полярности****.*

Задача 1. В контур включены катушка с переменной индуктивностью от 0,5 до 10 мкГн и конденсатор переменной ёмкости от 10 до 500 пФ. Какой диапазон частот и длин волн можно охватить настройкой этого контура?



Решение: Да, катушки с переменной индуктивностью тоже бывают! Изменяя ёмкость конденсатора и индуктивность катушки, мы меняем *собственную частоту контура* ($\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$). При этом внешний сигнал частоты f ($f = \dfrac{2\pi}{\omega}$) войдёт в резонанс с собственными колебаниями контура и усилится. В этом и заключается настройка контура на внешнюю частоту. То есть $f = 2\pi\sqrt{LC}$. То есть минимальная частота - при минимальных L и C, а максимальная - при максимальных. Таким образом найдём диапазон настраиваемых частот. В диапазон волн можно пересчитать по формуле: $\lambda \cdot f = c$, где c - скорость света.

Задача 2. Контур состоит из катушки индуктивности L, сопротивления R и конденсатора C. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нём поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе было U_m?



Решение: Чтобы в контуре поддерживались незатухающие колебания, надо компенсировать тепловые потери на резисторе. По смыслу задачи предполагаем, что в контуре будут происходить *собственные колебания*, а теплопотери на резисторе будут как-то компенсироваться.

Тогда напряжение на конденсаторе будет иметь вид: $U = U_m \cdot cos(\omega t)$, где U_m - амплитуда напряжения на конденсаторе, ω - собственная циклическая частота колебаний в контуре.

Мгновенное значение тока в контуре будет иметь вид: $i = I_m \cdot cos(\omega t)$, где I_m - амплитуда тока.

Поскольку теплопотери на резисторе будут компенсированы, то энергетически можно записать: $\dfrac{C \cdot U_m^{\ 2}}{2} = \dfrac{L \cdot I_m^{\ 2}}{2}$ (максимальная энергия заряженного конденсатора будет "перетекать" в максимальную энергию катушки индуктивности). Откуда $I_m = \sqrt{\dfrac{C}{L}} \cdot U_m$.

Мгновенная мощность теплопотерь на резисторе $p = i^2 \cdot R$. Поскольку ток i - переменный, то и мгновенная мощность будет меняться. Как быть?

А надо вспомнить понятие *"действующего значения силы переменного тока"*[26]:

Действующее значение переменного тока равно такому постоянному току, при котором в одном и том же проводнике выделяется одинаковая тепловая мощность.

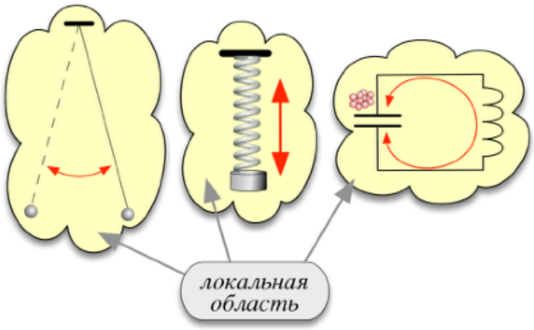
И для тока, изменяющегося по гармоническому закону, действующее значение тока равно: $I_d = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$. И тогда действующая мощность теплопотерь равна: $P_d = I_d^{\ 2} \cdot R$. Вот её и надо компенсировать. В итоге: $P_d = \dfrac{C \cdot R}{2L} U_m^{\ 2}$.

---

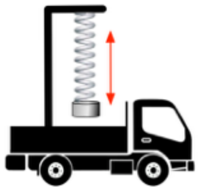
[26] *Смотри Историю про Ток - раздел Переменный ток.*

Волны

Выше мы рассмотрели с вами механические и электрические ***колебания***. Что для них было характерно: они происходили в небольшой локальной области пространства. Здесь же происходили превращения энергий, связанные с колебаниями. И ни в какие другие области пространства эти энергии не попадали[27].



Теперь же мы с вами рассмотрим ***волны*** *- процесс распространения колебаний в пространстве.*



Нет, мы не будем возить колеблющийся пружинный маятник на грузовичке из Москвы в Мытищи. Волны - это нечто иное.

Волна - это процесс распространения в пространстве с течением времени возмущения физической величины. ***Волна = колебание + распространение.***

Волны могут иметь самую разнообразную физическую природу:

- механические волны (в том числе и звуковые);
- электромагнитные волны (в том числе и свет);
- гравитационные волны (как следствие общей теории относительности);
- волны вероятности в квантовой механике;
- и другие.

Как видите, различные по своей физической природе волны описываются различными разделами физики. Ограничимся той частью физики, которую мы изучаем в нашем курсе, и будем рассматривать *механические* и *электромагнитные* волны.

Механических колебания - это колебательное движении частиц какой-либо твердой, жидкой или газообразной среды, а распространение колебаний (волна) означает передачу колебаний от одних частиц среды к другим. Передача колебаний обусловлена тем, что смежные участки среды связаны между собой. Эта связь может осуществляться различно. Она может быть обусловлена силами упругости, возникающими вследствие деформации среды при ее колебаниях. В результате колебание, вызванное каким-либо образом в одном месте, влечет за собой последовательное возникновение колебаний в других местах, все более и более удаленных от первоначального, и возникает волна.

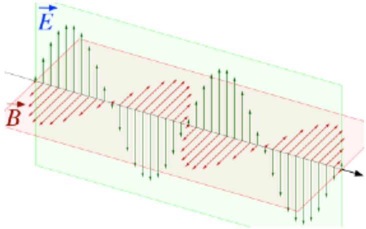
К механическим волновым явлениям относится распространение звуковых колебаний, обусловленное упругостью окружающего нас воздуха. Благодаря упругим волнам мы можем слышать на расстоянии. Определенный диапазон частот механических колебаний воспринимается нашим ухом и дает нам ощущение звука.

Круги, разбегающиеся на поверхности воды от поплавка, мелкая рябь на поверхности озера и огромные океанские волны - это тоже механические волны, хотя и иного типа. Здесь связь смежных участков поверхности воды обусловлена не силой упругости, а силой тяжести или же силами поверхностного натяжения. В воздухе могут распространяться не только звуковые волны, но и взрывные волны от разрывов снарядов и бомб. Сейсмические станции записывают колебания почвы, вызванные землетрясениями, происходящими за тысячи километров. Это возможно только потому, что от места землетрясения распространяются сейсмические волны - колебания в земной коре.

---

[27] Рассеяние тепловых потерь, естественно, не ограничивается локальной областью, но мы сейчас не об этом.

Электромагнитные волны представляют собой передачу из одних мест пространства в другие колебаний электрического и магнитного полей, создаваемых электрическими зарядами и токами. Связь между соседними участками электромагнитного поля обусловлена тем, что всякое изменение электрического поля вызывает появление магнитного поля, а всякое изменение магнитного поля создает электрическое поле[28]. Твердая, жидкая или газообразная среда может сильно влиять на распространение электромагнитных волн, но наличие такой среды для этих волн ***не необходимо***. Электромагнитные волны могут распространяться всюду, где может существовать электромагнитное поле, а значит, и в вакууме, то есть в пространстве, не содержащем атомов.



Свет - это электромагнитная волна. Определенный (очень узкий) диапазон частот электромагнитных колебаний воспринимается нашим глазом и дает нам ощущение света.

И у механических и у электромагнитных волн есть общее свойство:

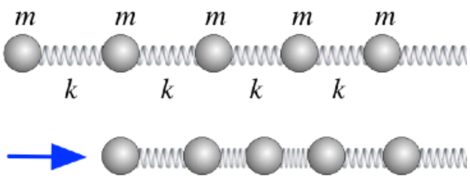
- механическая волна *не переносит массу*, а ***переносит энергию и импульс***;
- электромагнитная волна *не переносит заряд*, а ***переносит энергию и импульс***.

И в связи с этим ещё одно важное замечание про волны: *волны - один из двух путей переноса энергии в пространстве* *(другой путь - при помощи частиц).*

*В Истории про Магнетизм и в Истории про Оптику (раздел "Волновая оптика") мы подробно рассматриваем электромагнитные волны. Поэтому здесь **будем говорить о механических волнах**.*

Механические волны

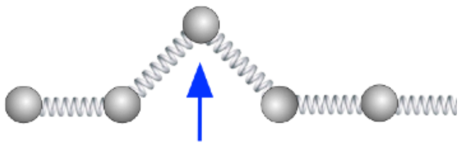
Механические волны могут распространяться только в какой-либо среде. В космическом вакууме кричи-не кричи - никто вас не услышит: звуку (механическим волнам) негде распространяться. Для механических волн обязательно нужна среда, обладающая способностью запасать кинетическую и потенциальную энергию. Следовательно, среда должна обладать инертными и упругими свойствами. В реальных средах эти свойства распределены по всему объему. Так, например, любой малый элемент твердого тела обладает массой и упругостью. В простейшей одномерной модели твердое тело можно представить как совокупность шариков и пружинок. В этой модели инертные и упругие свойства разделены. Шарики обладают массой m, а пружинки – жесткостью k.



Если на такую систему подействовать ***вдоль*** цепочки шариков-пружинок, то шарики будут смещаться вдоль цепочки, а пружинки растягиваться-сжиматься. Такая деформация называется *деформацией растяжения или сжатия*. В жидкостях или газах деформация такого рода сопровождается *уплотнением или разрежением*. И это пример распространения ***продольной волны***.

> ***Продольные*** механические волны могут распространяться в любых средах - твердых, жидких и газообразных.

[28] *В Истории про Магнетизм это подробно рассмотрено.*

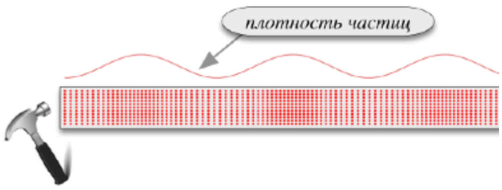


Если один или несколько шариков сместить в направлении, перпендикулярном цепочке, то возникнет деформация сдвига. Деформированные при таком смещении пружины будут стремиться возвратить смещенные шарики в положение равновесия. При этом на ближайшие несмещенные шарики будут действовать упругие силы, стремящиеся отклонить их от положения равновесия. В результате вдоль цепочки побежит *поперечная волна*.

В газах и внутри жидкостей упругая деформация сдвига не возникает. Но на границе жидкости и газа появляется сила поверхностного натяжения, которая вместе с силой тяжести стремится возвратить смещенные шарики в положение равновесия.

> ***Поперечные*** механические волны могут распространяться либо в твёрдой среде, либо на границе жидкой и газообразной сред.

Вот примеры. Если по металлическому стержню три раза ударить молотком (можно пять), то по нему пробежит ***продольная*** механическая волна. Изменяющийся при этом физический параметр среды - это расстояние между соседними атомами кристаллической решетки металла. Эти изменяющиеся расстояния можно пересчитать в плотность атомов в данной точке. Синусоида на рисунке и отражает изменение этой плотности при прохождении волны. *Все звуковые волны - это продольные волны*.



А вот примеры ***поперечных*** волн: волна, проходящая по гитарной струне и волны на поверхности моря. Кстати, электромагнитная волна является поперечной.

Скорость распространения волн

Среда	Скорость, м/с	Среда	Скорость, м/с
Воздух	340	Медь	3660
Водород	1260	Сталь	4980
Вода	1435	Стекло	5200

Всякая механическая волна распространяется из одной точки пространства (среды) в другую не мгновенно, а с определенной скоростью.

Вот примеры скоростей распространения механических волн (в том числе и звука) в некоторых средах. Точности ради надо сказать, что скорости эти зависят от температуры среды, а для газов важно ещё и давление. Для воздуха же имеет значение ещё и влажность.

> Скорость распространения механической волны - это характеристика среды, в которой волна распространяется! ***Именно среды***, а не волны!

> *Любое механическое воздействие передаётся со скоростью звука в среде!*

$$\Delta t=\frac{l}{v}$$

Вот вы ударили молотком по гвоздю. И это механическое воздействие дойдёт через гвоздь до куска дерева через время $\Delta t = \frac{l}{v}$, где l - длина гвоздя, а v - скорость звука в железе (гвозде).

Будем считать, что среда однородна[29] и бесконечна во всех направлениях.

Выше мы сказали, что механическая волна не переносит массу, а переносит энергию и импульс. Значит есть выделенное направление (направления) такого переноса. *Это направление и называют направлением распространения волны.*

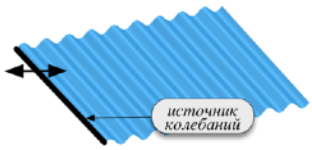
Итак, механическая волна - это процесс изменения во времени и в пространстве какого-либо параметра среды. А какие могут быть эти параметры? Для продольных волн - это плотность среды, для поперечных - отклонение от равновесного состояния.

Акустические (в том числе и звуковые) и многие другие механические волны, распространяющиеся в однородной среде, а также волны, возникающие от колебаний тонкой мембраны или струны являются *гармоническими* - описываются гармоническим законом.

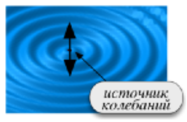
Виды геометрий волн и волновое уравнение

Какие геометрии волн можно перечислить:

- самая простая - это *плоская волна на поверхности*. Она возникает от колебаний протяжённого источника вдоль поверхности;



- *радиальная волна на поверхности*. Она возникает от колебаний точечного источника в направлении, перпендикулярном поверхности;



- *сферическая волна*. Она возникает от объёмных колебаний сферического источника.

Ограничимся ими.

Одним из основных уравнений математической физики является общее ***волновое уравнение***, описывающее распространения-колебания широкого класса волн. Это - дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных и выглядит оно вот так страшно: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где $u(x,y,z,t)$ - изменяющийся во времени и пространстве параметр волны (смещение от равновесного состояния, плотность среды и пр.) В разделе *Колебания* мы уже научились не бояться дифференциальных уравнений, хотя и не умея их точно математически решать.

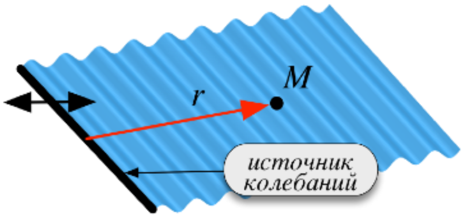
> *И в зависимости от того, какую волну мы рассматриваем, мы получаем различные решения* ***волнового уравнения*** *для каждой геометрии волны.*

---

[29] *Это значит, что её свойства (в том числе и скорость распространения механических волн) одинаковы в любой точке среды.*

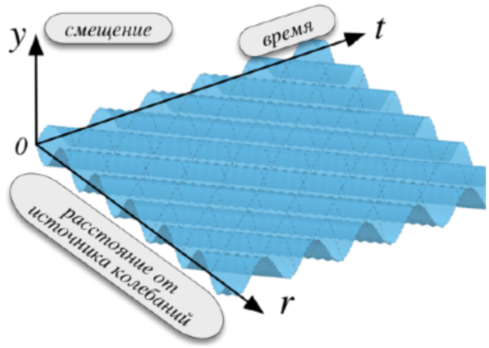
Волны на поверхности воды (плоские волны)

В качестве простейшего примера рассмотрим поперечные волны, образующиеся на поверхности воды от колебаний протяженного источника. Интуитивно понятно как будет выглядеть картина таких волн: от протяженного источника волны будут расходиться параллельно - такая волна называется *плоской*.



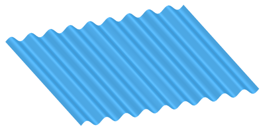
Пространственно плоская волна будет изменяться только по одному направлению - перпендикулярному протяженному источнику.
И решение волнового уравнения (закон распространения-колебания) для ***плоской поперечной гармонической волны*** на поверхности воды будет выглядеть вот так:
$y(r,t) = A \cdot cos(\omega t - kr)$[30], где $y(r,t)$ - волновой параметр - смещение частиц среды от равновесного положения[31], A - амплитуда этого смещения (***амплитуда постоянна!***), t - время, r - расстояние от источника колебаний до описываемой точки поверхности M, $\omega t - kr$ - пространственно-временная фаза волны, что такое ω и k - чуть позже.

Это уравнение - функция двух переменных: пространственной переменной r (описывающей ***распространение*** волны) и временной переменной t (описывающей ***колебание*** волны). Функцию двух переменных графически надо представлять в трёхмерном пространстве. И выглядеть график гармонического закона распространения плоской волны будет вот так ⇒



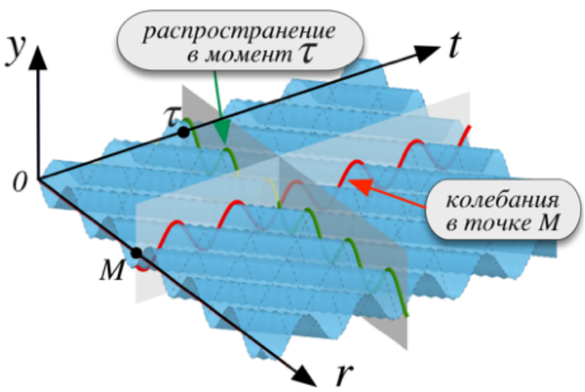
А если надо описать такую же волну, но двигающуюся в противоположную сторону (против положительного направления оси r), то её уравнение будет выглядеть так: $y(r,t) = A \cdot cos(\omega t + kr)$.

"А почему этот график выглядит повернутым и бесконечным по r и t?" - спрашивает вдумчивый ученик.



Да потому, что вид графика и то, что мы видим на поверхности воды, - это совершенно разные вещи. Давайте разбираться.

Во-первых, глядя на водную поверхность с плоскими волнами, в каждый момент времени мы видим "моментальную фотографию". На графике же показано *всё время жизни волны*.
Во-вторых, глядя на водную поверхность с плоскими волнами, мы видим волны во всех точках поверхности. На графике же отображается распространение волны *только в одном направлении* от источника колебаний (на остальных параллельных направлениях будет то же самое, поскольку волна - плоская).



Возвращаемся к нашему графику. Если найти пересечения этого трехмерного графика с плоскостями, соответствующими фиксированной точке M или фиксированному моменту τ (как на рисунке), то мы получим в первом случае - картину

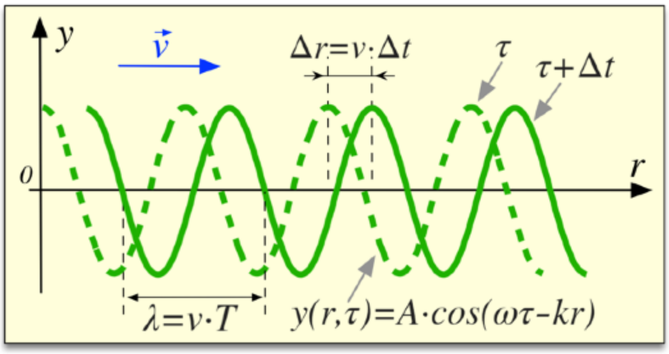
---

[30] *По сути - это уравнение движения волны (в кинематическом смысле).*

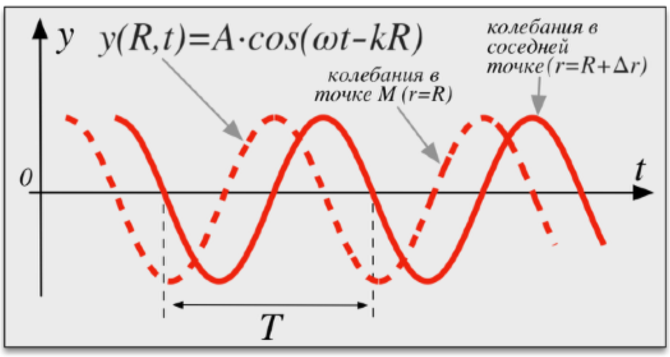
[31] *У продольных плоских волн изменение плотности среды описывается аналогично.*

колебаний в фиксированной точке M, а во втором - "моментальную фотографию" распространения волны в момент τ.

Давайте рассмотрим две "моментальные фотографии" распространения волны: в моменты τ и $\tau + \Delta t$. Зафиксировав момент τ, мы получаем уравнение распространения волны в



момент τ: $y(r, \tau) = A \cdot cos(\omega\tau - kr)$, где $\omega\tau - kr$ - пространственная фаза волны. Из этого графика наглядно видно что такое **длина волны λ** - это расстояние между двумя ближайшими друг к другу точками, в которых колебания происходят в одинаковой фазе. *Длина волны - это характеристика **распространения** волны. Или говорят, что длина волны - это пространственный период волнового процесса.* За интервал времени Δt волна распространится на расстояние $\Delta r = v \cdot \Delta t$, где v - скорость распространения волны в среде. Такие волны называются **бегущими волнами** (в отличие от стоячих волн, о которых - чуть позже).

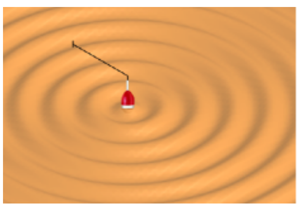


Теперь взглянем на картину колебаний в точке M, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $r = R$, и в соседней точке $r = R + \Delta r$. Уравнение колебаний волны в точке M будет иметь вид: $y(R, t) = A \cdot cos(\omega t - kR)$, где $\omega t - kR$ - временная фаза волны.

А из этого графика видно что такое **период волны T** - это наименьший интервал времени колебаний волны, за который она возвращается в то же состояние. *Период волны - это характеристика **колебаний** волны.*

Очевидно, что расстояние, равное длине волны λ, волна пробегает за период T, следовательно $\lambda = v \cdot T$, где v - скорость распространения волны в среде. *Эта простенькая формула связывает характеристику распространения волны (длину λ) с характеристикой колебаний волны (периодом T) через характеристику среды (скорость распространения волны в среде v).*

Ну а теперь можно кое-что вспомнить из раздела *Колебания*: $f = \dfrac{1}{T}$ - частота колебаний, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ - циклическая частота колебаний. А $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{v}$ - волновое число.



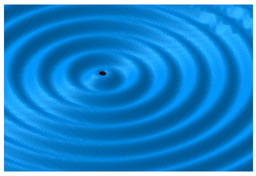
Зачастую волны порождаются каким-либо колеблющимся источником колебаний[32] (принудительно колеблющийся поплавок на поверхности воды, колеблющиеся голосовые связки при произнесении нами слов). В этих случаях порожденная волна имеет ту же частоту, что и породивший её источник. Ну а длина этой порожденной волны будет определяться средой распространения: $\lambda = v \cdot T$.

И тогда, глядя на закон распространения-колебания бегущей плоской гармонической волны $y(r, t) = A \cdot cos(\omega t - kr)$, можно сказать, что такая волна *обладает двойной*

[32] *Это не всегда так. Например, морские волны порождаются из-за резонансных явлений взаимодействия ветра и поверхности моря.*

периодичностью - во времени и пространстве. Временной период равен периоду колебаний T частиц среды, пространственный период равен длине волны λ. Волновое число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ является пространственным аналогом циклической частоты $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

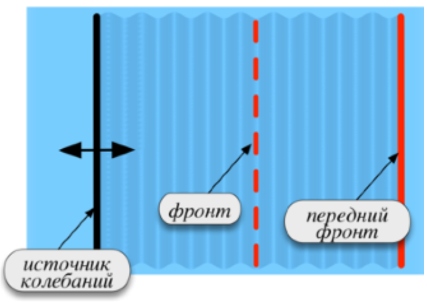
Волны на поверхности воды (радиальные волны)



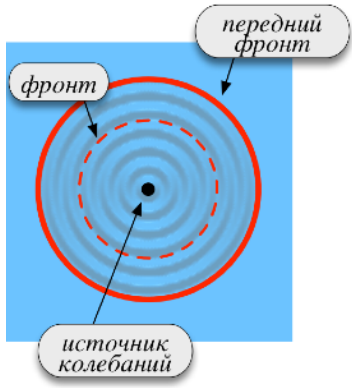
Бросим в воду камешек (мы это делали десятки раз в своей жизни). От точки падения по поверхности воды начнут расходиться концентрические волны-окружности. Такие поверхностные волны называются *радиальными:* их колебания одинаковы по всем радиальным направлениям, налицо плоская радиальная симметрия колебаний.

Хоть картинка радиальных волн является для нас привычной и кажется, что она не особо сложнее картинки плоских волн, но точное математическое решение волнового уравнения для радиальной волны на поверхности воды *не является гармоническим*, а является достаточно громоздким (с использованием гиперболических тригонометрических функций). И я вас им пугать не буду. Скажу лишь одно: амплитуда волны будет уменьшаться по мере удаления от источника.

Вот важное понятие: *волновой фронт* - это поверхность, на всех точках которой волна имеет в данный момент времени одинаковую фазу. А ***передним фронтом*** называют *поверхность, до которой дошёл волновой процесс к данному моменту времени*.



У ***плоской волны*** её фронты - это прямые (отрезки прямых), параллельные источнику.
У ***радиальной волны*** - это концентрические окружности с центром на источнике колебаний. А передний фронт - это концентрическая окружность наибольшего радиуса.



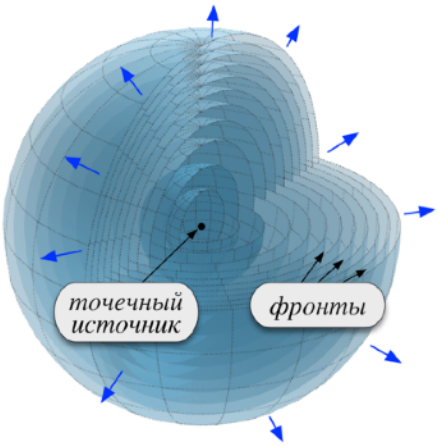
На достаточно большом расстоянии от источника небольшой участок любого фронта можно считать ***плоским***.

Оновные свойства волновых фронтов:
- волновые фронты не пересекаются между собой;
- через каждую точку пространства проходит только один волновой фронт.

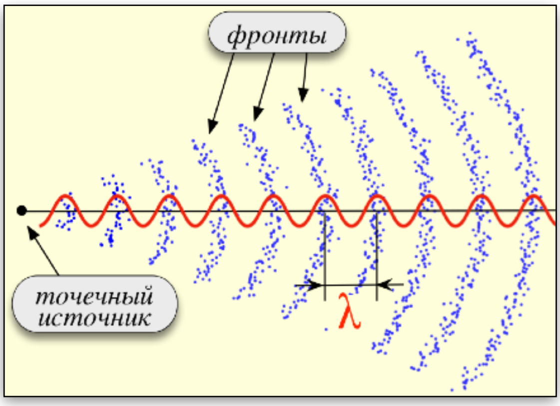
Акустические волны (сферические волны)

А теперь от привычной нам картины двумерных волн на поверхности воды перейдём к *сферическим акустическим волнам*. Что это такое? Это механические волны, возникающие и распространяющиеся ***внутри*** объёма среды (твёрдой, жидкой, газообразной). Это - *сферические* (трёхмерные) *продольные бегущие волны*. А каков параметр распространения-колебания акустических волн? При распространении внутри твёрдой среды - это деформации растяжения-сжатия, при распространении внутри жидкой или газообразной среды - это уплотнения-разрежения (изменения плотности среды). Звуковые волны - это акустические волны с частотами из воспринимаемого нашими ушами диапазона. Вот почему акустические волны нам интересны.

Для определённости будем рассматривать акустические волны от ***точечного*** источника[33], распространяющиеся в однородном[34] воздухе.



Вот я условно изобразил 3D-картинку такой акустической волны (вырез на рисунке сделан для наглядности), обозначив несколько её фронтов. Под фронтом акустической волны мы понимаем, как и ранее, поверхность, на всех точках которой волна имеет в данный момент одну фазу. Картина распространения такой волны трёхмерно-радиально симметрична.



Если сделать "мгновенную фотографию" сечения такой волны и изобразить некоторый угол её распространения, то можно увидеть такую картинку. Точечками я условно изобразил молекулы воздуха. И мгновенная плотность этих молекул и есть волновой параметр акустической волны. Через малый интервал времени эта картинка сместится в направлении распространения волны.

И решение волнового уравнения (закон распространения-колебания) для *акустической волны* выглядит так: $y(r,t) = \frac{A}{r}cos(\omega t - kr)$, где $y(r,t)$ - волновой параметр - мгновенная плотность частиц среды, A - амплитуда колебаний источника, t - время, r - длина радиус-вектора, идущего от источника колебаний к описываемой точке воздуха, $\omega t - kr$ - пространственно-временная фаза волны, ω - циклическая частота колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$, и k - волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$, T - период колебаний, f - частота колебаний $f = \frac{1}{T}$, λ - длина волны, $\lambda = v \cdot T$, где v - скорость распространения волны в воздухе.

Поскольку акустическая волна радиально-симметрична в пространстве, то по любому радиальному направлению уравнения распространения-колебания будут одинаковы.

Как видите, уравнение ***сферической*** волны $y(r,t) = \frac{A}{r}cos(\omega t - kr)$ отличается от уравнения ***плоской*** волны $y(r,t) = A \cdot cos(\omega t - kr)$:

- уравнение плоской волны содержит одну пространственную координату r, поскольку все волновые процессы идут вдоль одного направления пространства.
- у уравнении сферической волны r - это пространственный радиус-вектор. Волновые процессы идут в пространстве, хотя они и пространственно радиально-симметричны.
- плоская волна описывается чисто гармонической функцией (косинусом), амплитуда распространения плоской волны постоянна.

[33] *Источники можно рассматривать как точечные на расстояниях, многократно превышающих их размеры.*

[34] *Или, как говорят,* ***анизотропном****.*

- в уравнении описания сферической волны помимо гармонической функции (косинуса) присутствует ещё и элемент $\frac{A}{r}$ - амплитуда сферической волны уменьшается обратно пропорционально расстоянию до источника. И это не за счёт потерь энергии. Убывание амплитуды по мере удаления от источника объясняется возрастанием поверхности фронта с ростом r, в результате энергия волнового движения распределяется на все большее число частиц. Но *по времени сферическая волна является гармонической*.
- плоская волна обладает двойной периодичностью - во времени и пространстве.
- *сферическая волна периодична во времени, частота колебаний и длина волны у неё постоянны.*

Перепишем уравнение сферической волны в виде: $y(r,t) = \frac{A}{r} cos(2\pi f(t - \frac{1}{v} r))$. В нём параметры A (амплитуда колебаний источника) и f (частота колебаний) определяются источником колебаний, а v (скорость распространения) - средой.

Энергия акустической волны

Известна такая легенда: великий русский певец Фёдор Иванович Шаляпин мог своим голосом расколоть стеклянный стакан. Физику этого "чуда" мы с вами понять можем: великий русский певец своим могучим голосом (большая амплитуда колебаний) издавал звуки, порождая акустические волны. Диапазон низких (басовых) частот издаваемых звуков был широк (чем Шаляпин и славился). Акустические волны доходили до стакана и возбуждали в нём вынужденные колебания разных частот. Те вынужденные колебания, частота которых совпадала с собственной частотой стакана (десятки Герц), приводили к резонансу, отчего амплитуда таких колебаний резко возрастала и стакан разбивался. Энергетически же следует рассуждать так: энергия голосовых связок великого русского певца Фёдора Ивановича Шаляпина передавалась акустическим волнам, этими связками порождаемыми, акустические волны эту энергию переносили и передавали её стакану. Полученная стаканом энергия и совершала работу по его разрушению.

Всё, вроде, правильно, но... Мы привыкли говорить о механической энергии материальной точки или тела, о тепловой энергии объёма газа, об энергии электрического поля заряженного конденсатора, об энергии магнитного поля катушки с током. Во всех этих случаях энергия в том или ином виде была сосредоточена в локальной области пространства. И если она изменялась, то она изменялась тоже в локальной области пространства. Но в случае волны, которая и колеблется и распространяется, как описать её энергию?

Механическая волна, распространяясь, меняет механическую энергию среды. Важное утверждение: *Под энергией механических волн понимают механическую энергию среды, обусловленную распространением этих волн*[35].

Будем рассматривать энергетику *сферической волны*, потому что "из всех механических волн важнейшим для нас является звук".

---

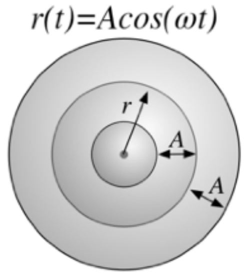
[35] *А вот энергетику электромагнитных волн рассматривают совсем по другому - как энергетику электромагнитного поля волны. Смотри об этом Историю про Магнетизм.*

Поскольку волна - это *процесс и во времени и в пространстве*, то есть два пути:

- точно так же, как уравнение распространения-колебания сферической волны $y(r,t) = \dfrac{A}{r}cos(\omega t - kr)$ описывает волновой параметр (смещение от положения равновесия или мгновенную плотность среды), - описывать *мгновенные значения энергии* точек среды аналогичным уравнением;
- поскольку уравнение распространения-колебания сферической волны является гармоническим по времени, то логично определять некоторую энергетическую характеристику ***как среднюю за период волны*** (тем самым мы уберём *время* из её определения) ***и как плотность*** такой энергетической характеристики.

Первый путь очевиден и достаточно прост, но он не несёт в себе возможности *сравнения*. А вот второй путь даёт такую возможность: а) сравнивать энергетику одной и той же волны в разных её состояниях и б) сравнивать энергетику различных волн (что ещё более важно). Пойдём по второму пути.

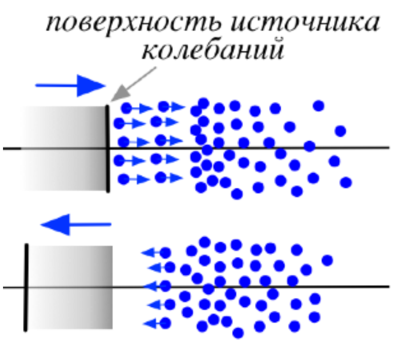
Итак: при распространении волны от источника происходит и распространение энергии. Частицы воздуха, вовлекаемые в колебательное движение, получают энергию от волны.



Предположим, что наш источник - пульсирующий шарик, изменяющий свой радиус по гармоническому закону $r(t) = Acos(\omega t)$. Колебаться его заставляет некая вынуждающая сила, природа которой нам в данном случае не важна.

Поверхность шарика заставляет колебаться частицы воздуха и в нём (воздухе) распространяется акустическая волна.

Энергия поверхности шарика есть энергия её движения, то есть кинетическая энергия. Воздух, в котором распространяется волна, будем считать идеальной, не поглощающей волну средой[36]. Поскольку шарик колеблется по гармоническому закону, его кинетическая энергия также будет периодически меняться со временем, но с удвоенной частотой (энергия пропорциональна квадрату скорости). Следовательно, энергия шарика будет поступать в воздух циклически с частотой, в два раза большей частоты колебаний шарика.

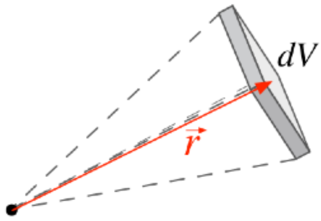


Какие формы принимает энергия волны? Во-первых, это кинетическая энергия частиц воздуха, пришедших в движение; во-вторых, поскольку среда упругая, это потенциальная энергия деформации воздуха. Причём и кинетическая, и потенциальная энергия в любой точке пространства изменяются абсолютно синхронно во времени: когда кинетическая энергия достигает максимума, то и потенциальная энергия максимальна, и наоборот. В самом деле, проследим за слоем воздуха непосредственно перед поверхностью шарика: когда скорость поверхности шарика максимальна, максимальна и скорость частиц воздуха[37], но при этом мы имеем и максимальное сжатие воздуха. Когда скорость поверхности шарика равна нулю, то и её энергия равна нулю, в волну в эти моменты энергия не поступает.

---

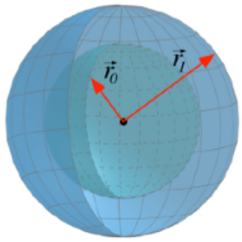
[36] *Это справедливо для небольших участков пространства, в пределах которых рассеиванием энергии можно пренебречь*

[37] *Не следует забывать, что молекулы воздуха участвуют и в тепловом хаотическом движении. Кстати, средняя "тепловая" скорость молекул воздуха при нормальных условиях - 460 м/с. А скорость звука в воздухе - 340 м/с.*



Выделим в какой-либо точке воздуха малый объём dV. Посчитаем ***среднюю за период объёмную плотность энергии сферической волны***. Расчеты, которых мы здесь приводить не будем, показывают, что средняя за период объёмная плотность энергии ***сферической*** волны равна: $w = \frac{\overline{dW}}{dV} = \frac{1}{2}\varrho \cdot \frac{A^2}{r^2} \cdot \omega^2$, где ϱ - плотность воздуха (невозмущённого волной), A - амплитуда колебаний источника, ω - циклическая частота колебаний волны, r - расстояние до источника. Объёмная плотность энергии w уменьшается обратно-пропорционально квадрату расстояния до источника - по мере удаления от источника энергии в единице объёма будет всё меньше и меньше! Если подумать логически, то это и понятно: источник за каждый период своего колебания передаёт одинаковую энергию сферической волне. Волна, распространяясь, расширяется, занимая всё бОльший объём. Вот средняя за период плотность энергии и уменьшается.

Важные соображения. Повторюсь: источник за каждый период своего колебания передаёт одинаковую энергию сферической волне. Эта энергия волной радиально-сферически распространяется в пространстве. Энергия "по дороге" нигде не теряется (таково условие нашей модели). Значит *через любой фронт за каждый период колебаний проходит одинаковое количество энергии*. В этом утверждении выражается условие *неразрывности потока энергии*. А если ещё подумать, то можно сформулировать и так: через два фронта сферической волны, радиусы которых различаются на кратную длине волны величину (на картинке $r_1 - r_0 = k \cdot \lambda$), проходит одинаковое количество энергии.



И тогда возникает мысль о другом способе оценки энергии волны: не через *объёмную плотность*, а через ***поверхностную плотность*** энергии волны, проходящей через фронт. То есть энергию делим на площадь сферы фронта.

Интенсивностью волны I называется среднее за период значение поверхностной плотности потока энергии волны. Опуская вывод, приведу формулу интенсивности сферической волны: $I = \frac{1}{2}\varrho \cdot \frac{A^2}{r^2} \cdot \omega^2 \cdot v$. Выражается в [*Вт/м²*] - "мощность делить на площадь".

Заметьте, интенсивность волны в данной точке характеризуется как источником волны (амплитуда источника и частота его колебаний), так и средой распространения волны (плотность среды и скорость звука в ней) и расстоянием до источника.

И тогда можно сравнить интенсивности одной и той же волны на разных расстояниях от источника: $\frac{I(r_0)}{I(r_1)} = \frac{r_1^2}{r_0^2}$ - они обратно пропорциональны отношению квадратов расстояний до источника.

"Ну и что нам с этой интенсивностью делать?" - спрашивает вдумчивый ученик.

Ах, вдумчивый ученик, твои вопросы бывают так незатейливы! *Интенсивность волны - важнейший энергетический параметр её оценки.*

Вот вам пример. Когда мы говорим "этот звук громче, чем этот", мы сравниваем что? Мы сравниваем наши восприятия звуков. А наше восприятие громкости звука от какого параметра звуковой волны зависит?

Если быть точным, то следует сказать, что наше восприятие громкости звука зависит от давления воздуха на барабанную перепонку уха[38], которое создаётся звуковой волной. Но *давление звуковой волны пропорционально её интенсивности*! Поэтому *интенсивность звуковой волны и определяет наше восприятие громкости звука*.

Поэтому, глядя на формулу интенсивности, можно вот что сказать:
- "чем дальше - тем в квадрат тише" (совсем упрощённая формулировка обратной квадратичной зависимости);
- громче слышно в более плотном воздухе (и за счёт бОльшей его плотности и за счёт возрастающей в более плотной среде скорости распространения звука). Вы замечали, что вечером, когда воздух охлаждается и становится более плотным, звуки проезжающих по дороге машин становятся громче?
- звуки более высоких частот воспринимаются нами как более громкие.

Аналогично интенсивность звука определяет то, как этот звук "воспринимают" микрофоны, акустические радары - сонары, эхолоты и пр.

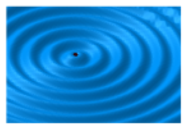
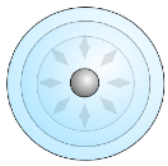
А ты спрашиваешь, вдумчивый ученик, "что с интенсивностью делать?" Использовать.

Затухание акустических волн

Поговорим теперь о затухании волн в реальных условиях. Именно волн, а не колебаний от источника. Будем предполагать, что источник "выдаёт" незатухающие колебания, а *затухание волны происходит вследствии её распространения*.

Под затуханием акустической волны понимается уменьшение её ***интенсивности*** *(а для гармонической волны - и уменьшение амплитуды) по мере её распространения.*

Основных причин затухания три:
- расхождение волны;
- рассеяние волны;
- поглощение волны.

Расхождение волны - это чисто геометрическая причина. Энергия волны никуда не "теряется" - она просто "размазывается" в пространстве по мере распространения и её плотность (а, следовательно, и интенсивность) становится меньше.

У простейшей плоской волны на поверхности воды такой проблемы вообще нет: она распространяется строго в одном направлении, поток её энергии постоянен, интенсивность постоянна. А у радиальной волны на поверхности воды и у акустической (сферической) волны эта причина проявляется: на бОльших расстояниях от источника поток энергии по мере распространения распределяется на всё увеличивающуюся длину (в случае радиальной волны) или площадь (в случае радиальной волны) фронта и, соответственно, уменьшается интенсивность волны. Мы уже знаем, что у акустической (сферической) волны интенсивность обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника: $I \sim \dfrac{1}{r^2}$.

А вот *рассеяние* и *поглощение* связаны со *взаимодействием волны со средой* распространения.

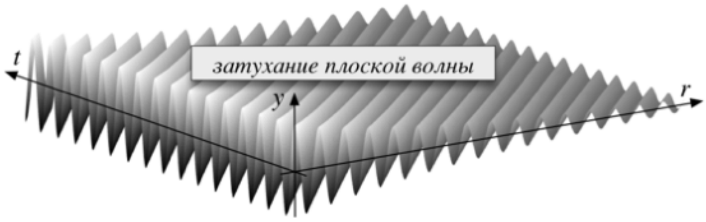
[38] *Все в курсе, что у нас в ухе есть барабанная перепонка?*

Рассеяние акустической (сферической) волны происходит на препятствиях в среде, на её неоднородностях, размеры которых малы или сравнимы с длиной волны. Это приводит к уменьшению потока энергии - интенсивности *в первоначальном направлении* распространения. То есть часть энергии волны *перенаправляется* в пространстве. Характерными рассеивателями в газах являются жидкие капли (туман) или частицы твёрдых веществ (аэрозоли), в жидкости - пузырьки воздуха.

Поглощение волны - это необратимый переход части энергии волны в тепловую (в основном) энергию среды. Это как-бы "трение" волны о среду распространения. Большую роль в поглощении играют вязкость и теплопроводность среды.

Уравнение распространения-колебания для плоской волны при наличии рассеяния-поглощения в среде будет выглядеть вот так: $y(r,t) = A \cdot e^{-\alpha r} \cdot cos(\omega t - kr)$, где α - коэффициент, характеризующий рассеяния-поглощения в данной среде.

Трёхмерный график этого уравнения показан на рисунке.



Для акустической (сферической) волны уравнение будет таким:
$y(r,t) = \dfrac{A}{r} \cdot e^{-\alpha r} \cdot cos(\omega t - kr)$.
Рассеяние-поглощение происходят "по экспоненте".

А в каких единицах выражают затухание волны?

Ну вот представьте картинку: есть источник звука (ваш непрерывно кричащий товарищ) и есть два ваших приятеля, которые находятся на разном расстоянии и внимательно слушают кричащего. А у вас в руках есть приборчик, которым можно измерить интенсивность звука в любом месте. Вы измеряете приборчиком интенсивность звука у уха первого приятеля, потом бежите ко второму и меряете интенсивность звука у его уха. Ага, есть два значения интенсивности I_1 и I_2. И они, естественно, разные и I_1 больше I_2. Пусть для определённости I_1=10 Вт/м² , а I_2=1 Вт/м². Поэтому можно было бы сказать, что акустическая волна (от вашего непрерывно кричащего товарища) от уха первого приятеля до уха второго приятеля "затухла" в $\dfrac{I_1}{I_2}$=10 раз.

Но в физике и технике принято немного иначе. Отношение двух *энергетических величин* (мощность, энергия, плотность энергии, интенсивность) принято определять как $D = 10 \cdot lg\dfrac{I_2}{I_1}$ и выражать в децибелах [*дБ*]. Вместо отношения значений используется логарифм этого отношения. Здесь нет никакой глубокой физики или математики. Не вдаваясь в детали, могу сказать: в этом есть практическое удобство. И тогда про наш случай говорят, что *затухание акустической волны от уха* 1 *до уха* 2 *составило -10 децибел* (подставьте циферки сами и проверьте).

С децибелами мы ещё встретимся, когда будем говорить о *Звуке*.

■ Взаимодействие механических волн

Выше мы говорили про волну в отдельности: волна порождалась источником колебаний и распространялась в пространстве. Рассмотрели кинематику волны. Рассмотрели энергетику волны. А говоря о затухании волн (а именно о рассеянии и поглощении), мы увидели, что волна ещё "умеет" взаимодействовать со средой, в которой распространяется.

Поэтому логично сформулировать вот какие вопросы:
- как взаимодействуют две механические волны?
- как механическая волна взаимодействует с твёрдой поверхностью?
- а если механическая волна, распространявшаяся в воздухе, вдруг попадает в воду, то как она себя поведёт?
- как механическая волна взаимодействует с маленьким препятствием?

То есть это всё вопросы про взаимодействие механической волны либо с другой волной, либо со средой. А взаимодействие - это уже *динамика*.

В начале нашего разговора о волнах я сказал, что электромагнитные волны мы подробно рассматриваем в *Истории про Оптику* (раздел *"Волновая оптика"*). Там же рассмотрены все вопросы взаимодействия электромагнитных волн друг с другом, со средой и со всевозможными препятствиями. А поскольку свет - это электромагнитная волна, то понятия отражения света, преломления света, наложения света (интерференция) нам интуитивно знакомы и понятны. И объяснение этих явлений естественно и наглядно.

И что замечательно: *несмотря на свою разную физическую природу, механические волны и электромагнитные волны подчиняются одним и тем же физическим принципам, схоже себя ведут при взаимодействии и их поведение описывается одинаковыми уравнениями.*

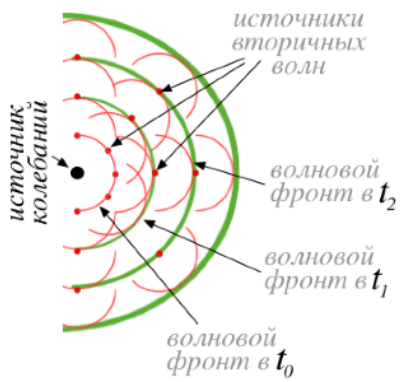
А посему, рассказывая о взаимодействии механических волн, я буду здесь обозначать основные принципы и давать *ссылку на раздел "Волновой оптики" Истории про Оптику*[39], в котором то или иное понятие подробно и наглядно рассматривается. Чтоб не повторяться.

Итак, поговорим о взаимодействиях механических волн.

Базовые принципы

Основным постулатом волновой теории, описывающим и объясняющим механизм распространения волн, является ■ *Принцип Гюйгенса-Френеля*. Этот принцип описывает движение волн любого вида (звуковых, волн на поверхности вода, световых и пр.) Вот краткая его формулировка (полную формулировку и подробные пояснения смотри в разделе "Принцип Гюйгенса-Френеля" *ВО*):

> *Любая точка, принадлежащая волновому фронту, превращается в источник* ***вторичных*** *волн, которые взаимодействуют (интерферируют).*



Суть идеи: волновой фронт в каждый момент времени генерирует новый волновой фронт как результат взаимодействия (интерференции) своих точечных элементов (источников вторичных волн). Процесс непрерывен. В этом и состоит распространение волны.

[39] *Далее раздел "Волновая оптика" Истории про Оптику я буду обозначать как ВО.*

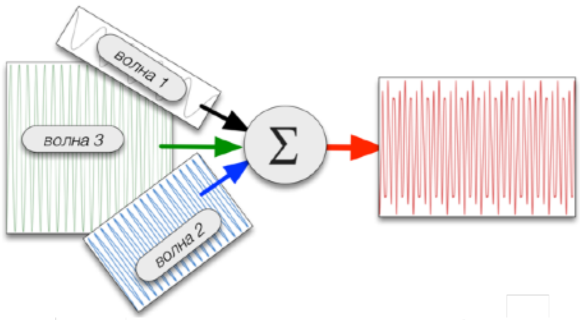
С помощью принципа Гюйгенса-Френеля описывается распространение волн, огибание ими препятствий, проникновение в отверстия, отражение и преломление. Механических волн - в том числе.

- *Принцип суперпозиций* - один из самых общих законов во многих разделах физики. Одна из его формулировок, приложимых к механике: *результат воздействия на частицу нескольких внешних сил есть векторная сумма воздействия этих сил*. А вот и другая: *любое сложное движение можно разделить на два и более простых*.

Принцип суперпозиций - это не фундаментальный закон природы, а следствие ***линейности фундаментальных уравнений*** той теории, где он проявляется. А в механике и электродинамике он и проявляется.

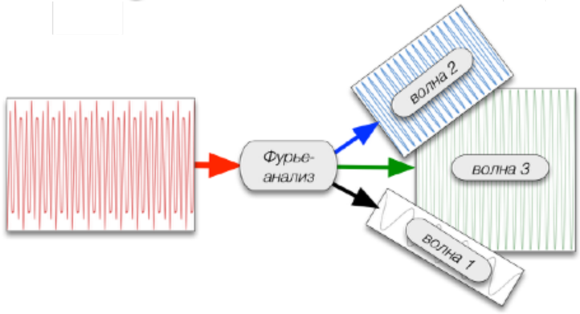
Применительно к волнам принцип суперпозиции состоит в том, что *в однородной среде волны от разных источников распространяются независимо, и накладываясь, не изменяют друг друга. Результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые частица получит, участвуя в каждом из слагаемых волновых процессов*. Накладываться друг на друга без взаимного искажения могут волны любой формы. В результате наложения волн результирующее колебание каждой частицы среды может происходить по любому сложному закону.

Два вывода из вышесказанного:



1) когда несколько волн встречаются в пространстве - они геометрически складываются. Если писать уравнения такого сложения, то это будут пространственные уравнения сложения нескольких синусоид.

2) любую сложную волну можно разложить на сумму более простых. И инструментом такого разложения является Фурье-анализ, о котором я говорил выше. А для чего её раскладывать? Чтобы проще анализировать.



Начинаем отвечать на вопросы, сформулированные выше.

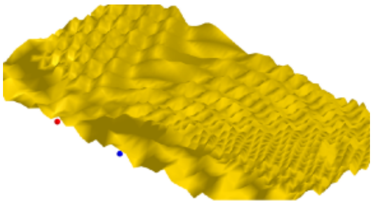
Как взаимодействуют две механические волны?

А что понимать под "взаимодействуют" в отношении волн? А понимать надо следующее: каждая механическая волна - это распространение колебаний среды в пространстве. Когда несколько волн встречаются в одной точке пространства, то результирующее колебание среды и есть результат их взаимодействия.

Так как взаимодействуют-то? Ответ на этот вопрос был сформулирован на предыдущей странице: механические волны взаимодействуют друг с другом, исходя из принципа суперпозиций. Они накладываются друг на друга, геометрически складываясь.

Взаимодействуют любые механические волны с любыми механическими волнами[40].

[40] *Взаимодействие механических волн с электромагнитными мы в нашем курсе не рассматриваем.*



Наглядно взаимодействие механических волн удобно рассматривать на поверхности воды. Вот две картинки такого взаимодействия. Слева - модель взаимодействия двух механических волн на поверхности "воды" от двух источников с ***разной*** частотой колебаний. Картинка нерегулярна, постоянно хаотически меняется во времени и особого физического интереса не представляет. Ну взаимодействуют себе две ***разные*** волны, ну и пусть себе взаимодействуют. Представьте себе гул стадиона - это взаимодействуют звуковые волны 50 тысяч ***разных*** голосов болельщиков.

А вот справа - картинка взаимодействия двух ***одинаковых*** радиальных волн на поверхности воды. Два одинаковых камушка одинаково бросили в воду и получили две одинаковые волны - вот эти две волны и взаимодействуют. И эта картинка регулярна в пространстве и не изменяется хаотически во времени. Вот подобные устойчивые картины взаимодействия волн и представляют интерес для физики.

Вспомним: *механической гармонической волной* мы называли волну, у которой уравнение колебания-распространения выглядит так: $y(r, t) = A \cdot cos(\omega t - kr)$ - есть "синус-косинус" и присутствует только одна частота. Радиальные волны на поверхности и акустические волны - гармонические. *Аналог механической гармонической волны - электромагнитная монохроматическая волна.*

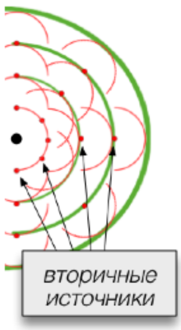
Определения:

Две механические гармонические волны *когерентны*, если у них одинакова частота (длина волны) и постоянна разность фаз.

Интерференция - сложение в пространстве двух (или нескольких) волн, при котором в разных его точках получается устойчивое во времени и пространстве усиление или ослабление амплитуды результирующей волны. *Устойчивую интерференционную картину можно получить только от когерентных волн.*

Так вот, интерференция механических волн - это взаимодействие ***когерентных*** механических волн. А где их взять - когерентные механические волны?

Можно, конечно, попытаться создать два абсолютно одинаковых механических источника колебаний, которые и будут синхронно (с одинаковой разностью фаз) испускать когерентные волны. Но что значит "два абсолютно одинаковых механических источника колебаний"? В нашем "неточном" мире это невозможно[41]. Как быть?



А давайте вновь обратимся к принципу Гюйгенса-Френеля: волновой фронт в каждый момент времени генерирует новый волновой фронт как результат взаимодействия своих точечных элементов. *Но так эти точечные элементы волнового фронта и являются когерентными источниками!* Они принадлежат фронту одной и той же волны: у них одинакова частота и фаза. И эти когерентные источники и интерферируют, образуя устойчивую интерференционную картину порождаемого нового фронта. И так непрерывно. Вот она идея: *для создания когерентных волн использовать одну и ту же волну!* Кстати, для создания когерентных электромагнитных волн используют эту же идею.

---

[41] И не только по причине вероятностного характера физики на микро-уровне. А и по причине того огромного количества факторов, влияющих на изготовление и функционирование "двух абсолютно одинаковых механических источника колебаний", которые учесть мы просто не сможем практически.

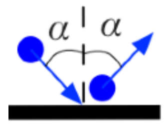
Ну а за деталями про интерференцию - милости просим в раздел "*Интерференция*" ВО.

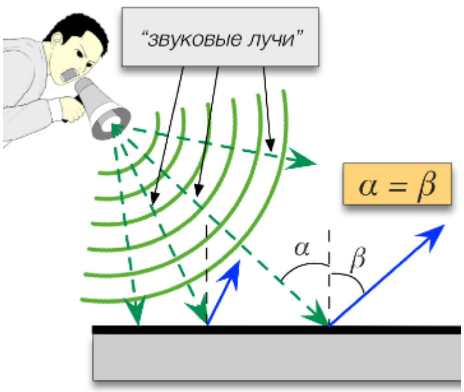
Как механическая волна взаимодействует с твёрдой поверхностью?

"Отражается от неё!" - лихо вскрикнет вдумчивый ученик. Ну да, тут не надо быть вдумчивым учеником, чтобы на основе своего житейского опыта это сказать. Особенно про привычные нам звуковые волны. А как отражается? "Угол падения равен углу отражения, как у света!" - не унимается вдумчивый ученик. Правильно, но не будем спешить.

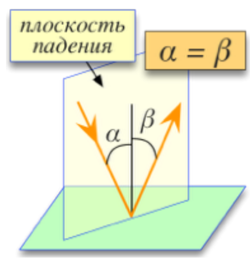
Что такое звуковая волна? Это много частиц среды, колеблющихся по определённому (волновому) закону. Как мы себе представляем сферическую звуковую волну в голове? Ну, например, как концентрически расходящиеся сферы-фронты. На самом деле никаких сфер нет - это лишь образ, который мы для себя сформировали для лучшего понимания. А давайте изменим этот образ и будем представлять звуковую волну как бесконечное множество радиально-расходящихся в пространстве *"звуковых лучей"*, вдоль которых переносится энергия звуковой волны. И этот новый образ нам поможет понять как звуковая волна взаимодействует с твёрдой поверхностью.

И давайте вспомним: как материальная точка *абсолютно упруго* взаимодействует с твёрдым телом? Из законов сохранения импульса и энергии следует: материальная точка налетает на твёрдое тело и отскакивает от него под тем же углом.

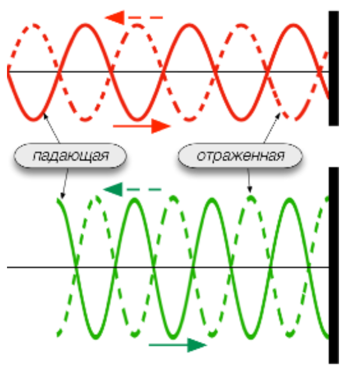




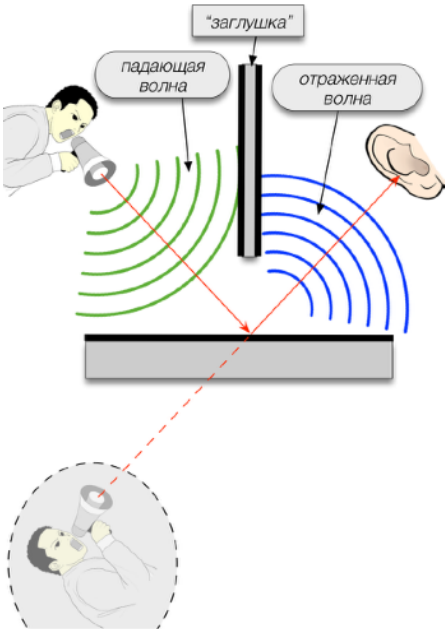
Ага, теперь рассмотрим взаимодействие "звукового луча" с твёрдой поверхностью. "Звуковой луч" - это узенький поток звуковой энергии, которой обладают частицы среды. Поскольку каждая частица "звукового луча" при взаимодействии с твёрдой поверхностью будет абсолютно упруго (таковы предположения нашей модели) отскакивать от поверхности под тем же углом, что и налетала на неё, то можно сказать, что узенький поток энергии отскочивших частиц будет просто перенаправлен под углом отскока. То есть сам "звуковой луч" отразится под тем же углом, что и падал на твёрдую поверхность. И все "звуковые лучи", достигшие твёрдой поверхности сделают то же самое - отразятся от твёрдой поверхности под теми же углами, что и падали. А все отраженные "звуковые лучи" - это отраженная звуковая волна.



Отсюда *"закон отражения звука"* - падающий и отраженный "звуковые лучи", а также перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, ***лежат в одной плоскости*** (плоскости падения). Угол отражения β равен углу падения α. Ну и вцелом можно сказать, что *"звуковая волна" отражается под углом падения"*. *Углы отсчитываются от перпендикуляра!*



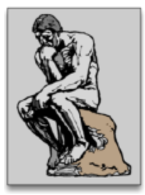
И ещё важный факт про отражение: *отраженная волна распространяется в противофазе к падающей волне* (разность их фаз $\varphi = \pi$).



Если между нашим ухом и источником звука поставить "заглушку" так, чтобы в ухо попадали только отражённые звуковые волны, а прямые "заглушкой" гасились, то нам будет казаться, что источник звука расположен не там, где он фактически есть, а зеркально относительно твёрдой поверхности.

"Ну так это в точности как у света с его световыми лучами, законом отражения света и плоскими зеркалами!" - опять воскликнул вдумчивый ученик. "Коль вы так любите ссылаться на *Историю про Оптику*, ну так и сослались бы сейчас, чего лишний раз повторяться?"

Сарказм про "сослаться" принят. Да, звуковые и световые волны одинаково отражаются-преломляются, одинаково ведут себя при интерференции, дисперсии и дифракции. Однако вот в чём дело: свет - это ***не*** колебание частиц среды, это - колебание электромагнитного поля. И закон отражения света (да и преломления) выводится из волнового Принципа Ферма (кстати, смотри *Историю про Оптику*, раздел *Геометрическая оптика*). Здесь же я чисто "на пальцах" объяснил принципы отражения звука, исходя из механического поведения частиц среды.



И ещё "на подумать". Вот посмотрите - две разные физические сущности: молекулы воздуха и электромагнитное поле. В общем случае они описываются совершенно разными физическими законами. Ну скажите, что общего между статистическими по своей сути уравнениями молекулярно-кинетической теории газа и математически выверенными уравнениями Максвелла? Ничего. Но как только возникает волновой процесс, то колеблющиеся молекулы воздуха и колеблющееся электромагнитное поле начинают подчиняться общим волновым законам и сходно себя вести: волновое поведение "давит" разницу в физической природе.

Общее замечание про звук и свет. У нас зрение - основной канал информации, которым мы постигаем мир. На физиологическом уровне мы хорошо различаем глазами цвета, точно определяем направление на источник света, оцениваем расстояние до него, формируем зрительные образы из увиденного. Со звуком у нас похуже. Не очень широкая воспринимаемая нашим ухом полоса частот, очень грубая способность определять направление на звук и расстояние до его источника. Этим и объясняется то, что в курсе физики световые явления для нас "ближе и родней", чем звуковые. Они нагляднее и интуитивно понятнее для объяснения.

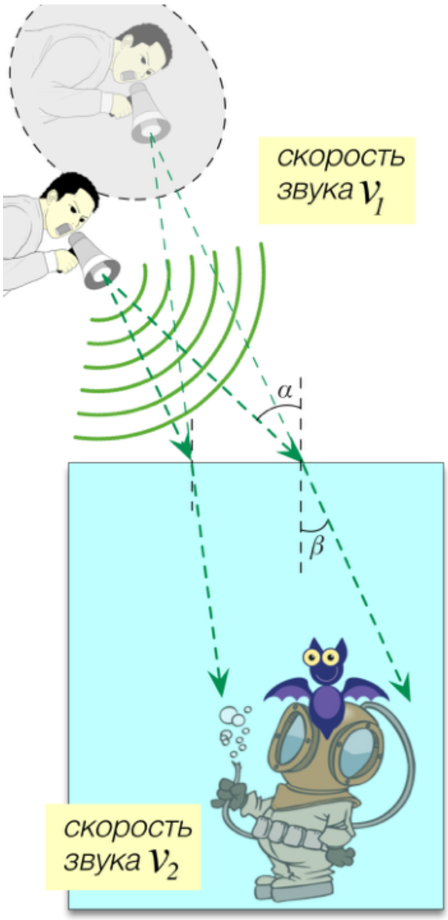
А вот у летучих мышей всё наоборот: при минимальном зрении они - "короли" слуха. Я в своё время был поражён, узнав, что, охотясь ночью, летучая мышь способна услышать шевеление (именно шевеление, а не продолжительное махание) крыла сидящей бабочки и абсолютно точно определить где она находится. Поэтому в будущем курсе физики для летучих мышей я буду рассматривать звуковые явления подробнее, чем световые.

Ну это всё субъективные причины нашего восприятия. Но есть и объективная причина почему "мы любим свет больше, чем звук". Какова длина волны у ультразвука частотой 1 МГц (самого высокочастотного из генерируемых) в воздухе? Подставив в формулу $\lambda = \dfrac{v}{f}$ значения, получим $\lambda = 0{,}34$ мм. Длина волны зелёного цвета равна 550 нанометров - в

1620 раз меньше, чем у ультразвука 1 МГц. А значит, *свет - гораздо более тонкий инструмент для применения*. Ну действительно, для того, чтобы открутить маленький винтик нужна маленькая отвёртка, большой не получится.

Как механическая волна переходит из одной среды в другую?

Вот представьте ситуацию: водолаз стоит на дне озера, а с берега его начальник даёт команды. Как звук голоса начальника будет достигать водолаза?



Как и выше, представляем звуковую волну как множество "звуковых лучей". Ход каждого "звукового луча" при переходе границы "воздух-вода" можно описать отдельно. Не вдаваясь в детали, приведу результат: "звуковой луч" будет изменять угол своего распространения по закону: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$, где v_1 - скорость звука в воздухе, v_2 - скорость звука в воде. То есть на границе "воздух-вода" "звуковой луч" будет *преломляться*. Преломляться будут все "звуковые лучи", а следовательно и звуковая волна в целом. И в результате водолазу будет казаться, что его начальник находится в другом месте, чем на самом деле.

На самом деле водолазу с нашим неточным человеческим слухом вряд ли удасться точно определить изменение направления звука. А вот летучая мышь это бы сделала запросто. Правда для этого надо летучую мышь засунуть в водолазный скафандр и отправить на дно озера. Но кто этим будет заниматься?

Преломление "звуковых лучей" происходит по точно таким же законам, что и преломление света - смотри *Историю про Оптику* раздел Преломление света. Точно так же, как и у световых лучей, у "звуковых лучей" наблюдается *дисперсия* - "звуковые лучи" преломляются по-разному в зависимости от длины своей волны.

Но вопросы преломления звуковых волн при переходе границы "воздух-вода" в общих курсах физики не рассматриваются[42]. По причинам, о которых я говорил выше.

Как механическая волна взаимодействует с маленьким препятствием?

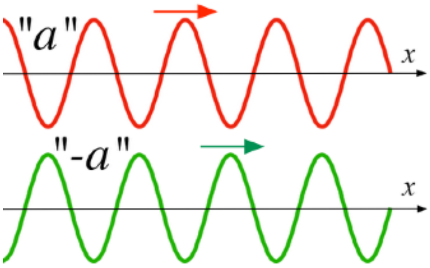
Под "маленьким" понимается "сравнимым с длиной волны".

От большого препятствия звуковая волна отражается, а при встрече с маленьким возникает явление ***дифракции***. Точно так же, как и в случае со световыми волнами (смотри раздел *Дифракция света ВО*).

В дальнейшем нам потребуются два вида взаимодействий волн: интерференция и отражение.

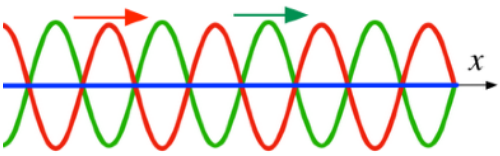
[42] *В прикладных технических дисциплинах преломления звуковых волн при переходе границы двух сред конечно приходится учитывать.*

Рассмотрим два частных случая взаимодействия двух волн.



Первый частный случай. Пусть у нас имеются две когерентные плоские гармонические механические волны с одинаковыми амплитудами и частотами. ***Эти две волны распространяются в одном направлении.*** Но распространяются они в *противофазе* - разность их фаз $\varphi = \pi$. По сути у нас две волны: a и $-a$ (уравнения будут отличаться только наличием минуса). Что произойдёт, когда эти волны встретятся в пространстве?

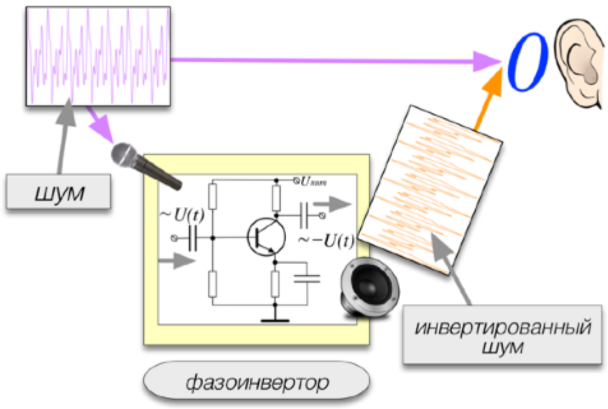
Когда эти волны встретятся, то они начнут интерферировать. И в соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля их совместное действие на каждую точку среды будет равно геометрической сумме воздействий каждой из волн. И какова будет сумма? Тут даже не



надо писать уравнений - эти волны будут гасить друг друга. *Эти волны движутся синхронно в одном направлении и* ***в каждой точке в каждый момент времени их сумма равна нулю***. Результат будет ***ноль*** - "голубенькая" горизонтальная результирующая. Эти рассуждения справедливы и для случая сферических звуковых волн. Этот, вроде бы, тривиальный результат лежит в основе идеи систем *шумоподавления*.

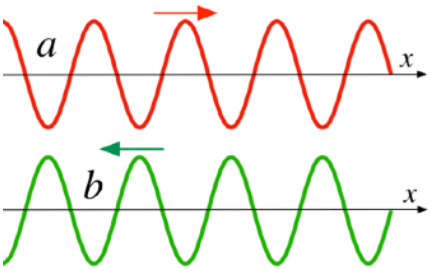
Представьте: есть у нас внешняя звуковая волна, которую нам не хотелось бы слышать. Шум города за окном, гул авиадвигателя в салоне самолёта и так далее[43]. И как нам её "не слышать"? А вот так же, как только что мы обсудили: надо "сделать" вторую звуковую волну точно такую же, как и исходная, но "перевернуть" её (говорят - *"инвертировать"*) - изменить её фазу на π. А потом наложить эту инвертированную волну на исходную - они взаимно погасятся.

Так и поступают. Прибор под названием *фазоинвертор* весьма прост в смысле электроники (на картинке я даже нарисовал его простейшую схему). На его вход через микрофон поступает шум, фазоинвертор "переворачивает" его и выдаёт на выход "инвертированный шум". Шум и "инвертированный шум" интерферируют в пространстве возле нашего уха и взаимно гасятся. Мы слышим ***ноль*** - тишину. Конечно, как и во всяком практическом применении, есть тонкости и нюансы реализации, но это работает!



И такие системы шумоподавления используют и в музыкальных студиях записи (чтобы погасить внешние вредные шумы), и в салонах самолётов и автомобилей (гасятся звуки работающих двигателей), и даже в привычных для нас наушниках (гасится посторонний внешний шум, мешающий слушать музыку).

[43] *Можно было бы добавить "... и голос надоевшего учителя", но это непедагогично.*



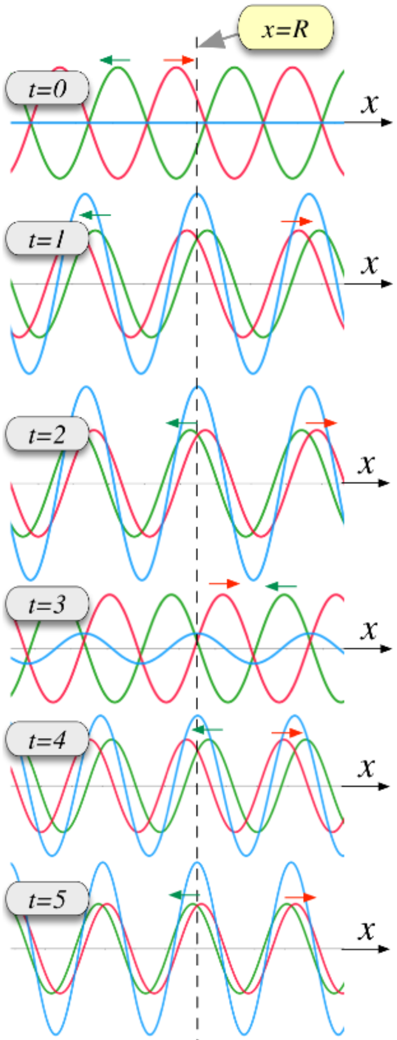
Второй частный случай. Пусть у нас имеются такие же две когерентные плоские гармонические механические волны с одинаковыми амплитудами и частотами. Так же, как и в предыдущем случае, они распространяются в *противофазе* ($\varphi = \pi$). *Но эти две волны распространяются в противоположных направлениях!*

Чем отличается картинка этих волн от картинки волн в первом частном случае? Лишь противоположным направлением "зелёненькой" стрелочки. Но именно это противоположное направление "зелёненькой" стрелочки не позволяет нам так же ловко сказать, что $a = -b$. Вопрос прежний: что произойдёт, когда эти волны встретятся в пространстве?

Отвечать начнём со знакомого "припева": когда эти волны встретятся, то они начнут интерферировать. А вот дальше придётся писать формулы - без них картинками не обойтись.

Уравнение "красненькой" волны a выглядит как обычно: $a(x,t) = A \cdot cos(\omega t - kx)$. Уравнение "зелёненькой" волны b выглядит вот так: $b(x,t) = A \cdot cos(\omega t + kx + \pi)$. "Плюс" перед kx означает, что "зелёненькая" волна движется против положительного направления оси x. И уравнение результирующей интерференционной волны будет выглядеть вот так: $a + b = A \cdot \left(cos(\omega t - kx) + cos(\omega t + kx + \pi)\right)$. А теперь вспоминаем горячо нами любимую тригонометрию, а именно - формулу суммы косинусов, и в результате получаем[44]:

$a + b = 2A \cdot sin(\omega t) \cdot sin(kx)$ [1].



Ага, результирующая волна - тоже гармоническая волна. Будет ли она колебаться во времени? Да, поскольку в её уравнении есть сомножитель $sin(\omega t)$. Будет ли она распространяться в пространстве? Да, поскольку в её уравнении есть сомножитель $sin(kx)$. Но эти колебания и распространения будут происходить *независимо* (t и x - в разных синусах). К чему приводит независимость колебаний по t и x?

Вот перед вами картинка. С помощью математической программы GeoGebra я построил графики распространения (по x) наших исходных "красненькой" и "зелёненькой" волн и результирующей интерференционной "голубенькой" волны. И построил их для шести последовательных моментов времени.

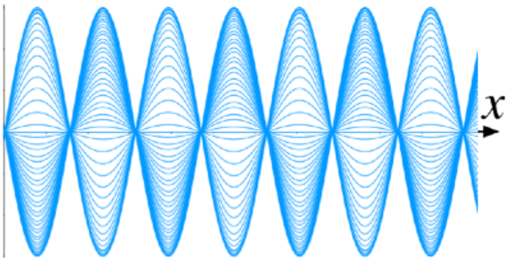
Что можно сказать про поведение "красненькой" и "зелёненькой" волн? Они *распространяются* каждая в своем направлении: то есть со временем они в каждой точке пространства соответственно меняют свои пространственную фазу и волновой параметр. Здесь ничего нового нет.

А теперь внимательно смотрим на поведение результирующей интерференционной "голубенькой" волны. Зафиксируем одну пространственную точку ($x = R$) и посмотрим что в ней происходит.

В момент $t = 0$ обе исходные волны находятся в противофазе и вся "голубенькая" волна обращается в ноль (как и в первом

[44] *Увлекательные тригонометрические преобразования сделайте сами.*

частном случае). К моменту $t = 1$ обе исходные волны "разошлись" друг с другом, а у "голубенькой" волны возник локальный максимум. В моменты $t = 2,3,4,5$ у исходных волн разная пространственная фаза, а у "голубенькой" волны - всё тот же локальный максимум. То есть в точке $x = R$ (как и во всех остальных точках) *у "голубенькой" волны со временем не меняется пространственная фаза*.



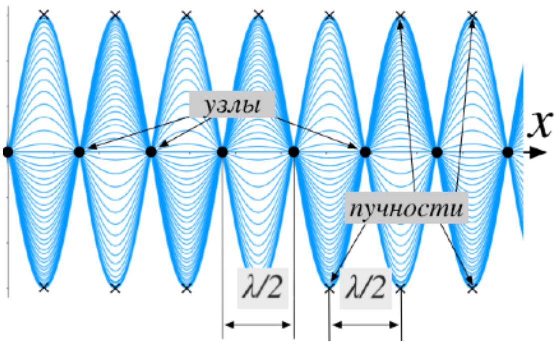
И как иллюстрацию этого факта я наложил несколько временных состояний "голубенькой" волны на одном графике распространения. Она стоит! Гребни и впадины не перемещаются в пространстве.

Такая волна называется **стоячей волной.**

Можно дать определение:

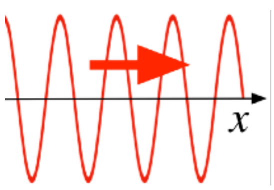
Стоячая волна - это результат интерференции двух имеющих одинаковую частоту и амплитуду волн, движущихся во встречных направлениях в противофазе (разность их фаз равна π).

Заменим в формуле [1] $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ и получим $a + b = 2A \cdot sin(\omega t) \cdot sin(\dfrac{2\pi}{\lambda}x)$ - *уравнение стоячей волны*. Это уравнение приятно анализировать:

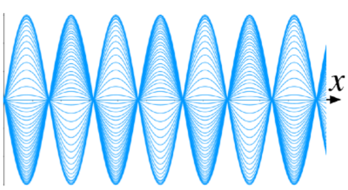


Точки, для которых $sin(\dfrac{2\pi}{\lambda}x) = 0$ называют ***узлами*** стоячей волны. В узлах амплитуда колебаний стоячей волны *постоянно равна нулю*. Из $sin(\dfrac{2\pi}{\lambda}x) = 0$ следует: $x = \dfrac{\lambda}{2}k \quad (k = 0,1,2,3,...)$ - координаты узлов стоячей волны. Расстояние между узлами равно $\lambda/2$.

Точки, для которых $\left|sin(\dfrac{2\pi}{\lambda}x)\right| = 1$ называют ***пучностями*** стоячей волны. В ***пучностях*** амплитуда колебаний стоячей волны *постоянно равна* $2A$. Из $\left|sin(\dfrac{2\pi}{\lambda}x)\right| = 1$ следует: $x = \dfrac{\lambda}{2} \cdot (k + \dfrac{1}{2}) \quad (k = 0,1,2,3,...)$ - координаты пучностей стоячей волны. Расстояние между пучностями равно $\lambda/2$.



И вот что ещё очень важно. Механические волны - это переносчики энергии (но не массы). Можно даже поэтично сказать, что волна - это "мчащаяся чистая энергия". Когда мы изображаем обычную ***бегущую*** волну, то указываем стрелочкой направление её распространения. Это - направление переноса волной энергии.

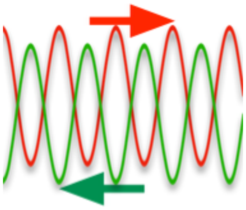


Внимание, вопрос! Стоячая волна обладает энергией? Да, конечно: ведь частицы среды, в которой стоячая волна существует, движутся. Хорошо.

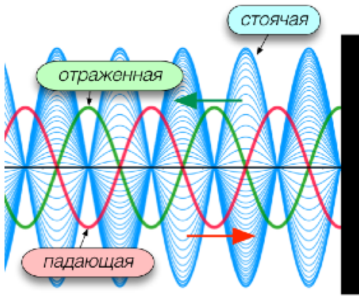
Второй вопрос: куда переносится энергия стоячей волной?

А *энергия стоячей волной не переносится - она остаётся на своём месте!*

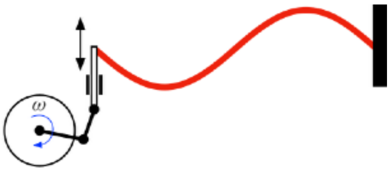
Ну посудите сами: две одинаковые (с точностью до фазы) волны пытаются перенести в противоположные стороны одинаковые (поскольку волны одинаковы) энергии. Из соображений симметрии (хотя бы) энергия результирующей стоячей волны никуда переноситься не будет.



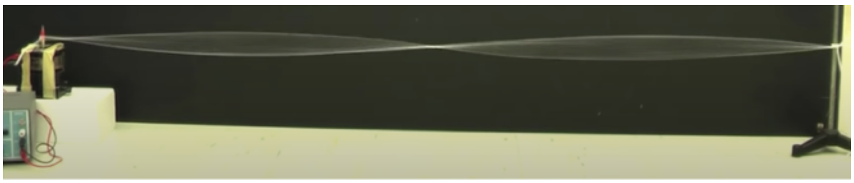
Хорошо, это мы обсудили теорию стоячей волны. А как бы нам на это чудо взглянуть своими глазами? Где взять волну, которая была бы "один в один" похожа на исходную, только бы двигалась в противофазе навстречу? А ведь мы совсем недавно выяснили, что *отраженная волна распространяется в противофазе к падающей волне*. Вот решение: надо, чтобы прямая волна наложилась на отраженную! Только поверхность должна располагаться ***перпендикулярно падающей волне***, чтобы отраженная волна распространялась точно навстречу падающей. И тогда возникнет стоячая волна!



Вот пример, который любят повторять во многих учебниках физики: прикрепить к стенке верёвочку одним концом, а другой конец туда-сюда быстро мотать рукой, изображая колебания. Среда распространения волны - сама верёвочка. По ней пойдет прямая волна к стенке, а в точке крепления возникнет отраженная волна. Она побежит обратно по той же верёвочке. Волны сложатся и в результате в верёвочке возникнет стоячая волна. Теоретически всё верно. Но я потратил в жизни не одну верёвочку и не один год, пытаясь получить таким образом "приличную" стоячую волну - не удалось. И всегда хочу спросить авторов учебников, приводящих этот пример: "А вы сами-то пробовали?"



А вот такая схема - вполне рабочая. К электродвигателю через шарнир подсоединен вертикально перемещающийся штырь. К концу штыря привязан конец нашей верёвочки. Меняем частоту вращения электродвигателя - меняем частоту вертикального перемещения штыря. Меняем частоту вертикального перемещения штыря - меняем длину волны ($\lambda = v \cdot \frac{2\pi}{\omega}$). Когда расстояние между стенкой и штырём станет кратной длине полуволны (почему так - смотри чуть ниже) - возникнет стоячая волна.

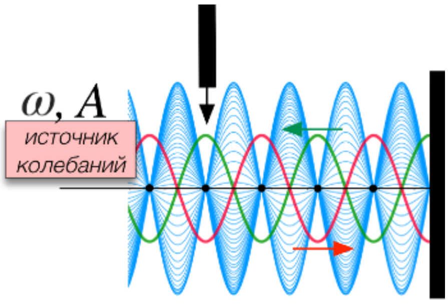


При наличии такого "аппарата" впору открывать "завод по производству стоячих волн".

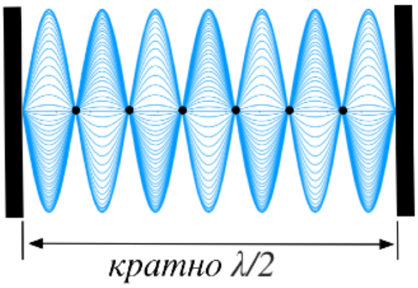
Но гораздо интереснее наблюдать стоячие волны у берега реки или моря.

А вы что-нибудь слышали про *квадратные стоячие волны*? А они бывают. Мать-природа-шалунья не даёт заскучать. Желающие могут разобраться с этим самостоятельно.

Итак, у нас есть источник колебаний, который задаёт частоту и амплитуду волны. Порожденная источником волна распространяется, достигает "стенки", отражается от неё и порождает отраженную волну. Отраженная волна мчится навстречу и "улетает в бесконечность". Падающая и отраженная волны формируют стоячую волну. А источник непрерывно продолжает генерировать падающую волну и всё повторяется. Всё правильно?



А что, если между источником и "стенкой" в момент, когда стоячая волна уже сформировалась, взять и вставить ещё одну стенку прямо в месте узла стоячей волны? Тогда отраженная волна отразится от этой стенки и повернет к старой "стенке" и станет для неё падающей. И непрерывный процесс формирования стоячей волны продолжится, несмотря на то, что новой стенкой мы "отсекли" источник (его в этом случае вообще можно убрать).

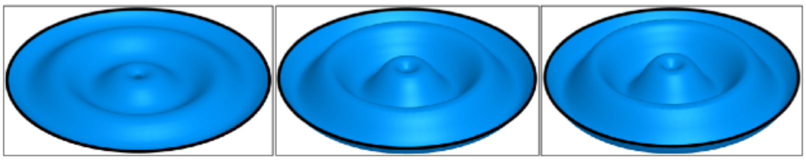


Стоячая волна останется на месте! *Мы поймали стоячую волну!* Та энергия, которая была у стоячей волны в момент, когда мы вдвинули новую стенку, окажется "запертой" между стенками (как и сама стоячая волна).

"ЗдОрово!" - воскликнет вдумчивый ученик. "А если вставить стенку не в узел, а в произвольном месте? Что будет?"

А тогда стоячая волна может перестать быть стоячей и "поползти" - разность пространственных фаз начнёт меняться со временем. *Условие существования стоячей волны: расстояние между стенками должно быть кратно длине полуволны*.

Вот опять же с помощью программы GeoGebra я смоделировал (с помощью уравнения $2A \cdot sin(\omega t) \cdot sin(\frac{2\pi}{\lambda}x)$) двумерную стоячую волну в "блюдечке" с водой: чёрная окружность - это края "блюдечка". И показал три последовательные во времени фазы колебания стоячей волны. И здесь условием существования стоячей волны должна быть кратность диаметра "блюдечка" полуволне.

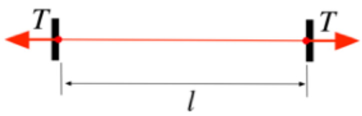


Можно самим попытаться создать стоячую волну в тарелке с водой. Как запустить волну в спокойной воде тарелки? Либо быстро сунуть в воду и убрать палец точно по центру тарелки, либо капнуть точно по центру каплю воды. Частота возникшей после этого волны будет зависеть от скорости, с которой вы сунули/убрали палец или с которой капля вошла в воду. А длина волны жёстко связана с частотой: $\lambda = v \cdot \frac{2\pi}{\omega}$. И когда, меняя скорости пальца/капли, и, тем самым, длину волны, диаметр тарелки станет кратным длине полуволны, возникнет стоячая волна.

"Да, необычно и красиво. Но почему мы так много говорим про стоячие волны?" - вдумчивый ученик неутомим.

- Во-первых, стоячая волна - это простейший пример интерференции двух волн. И на этом примере полезно подробно разобраться что же всё-таки при интерференции происходит.
- Во-вторых, подробно обсудив стоячие волны в общем, мы стали готовы поговорить о колебаниях струн. А струны - вокруг нас: наши голосовые связки - это струны, струны - во всех музыкальных инструментах[45] (кроме деревянных ложек), в конце концов, мост и колонны - это те же струны.
- Ну и в третьих, подробными рассуждениями о волнах я пытаюсь ещё раз подчеркнуть, что волна - это самостоятельная физическая сущность, живущая по своим законам.

Колебания струн

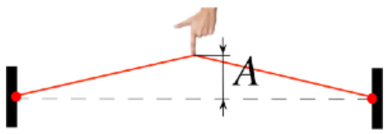


Под струной давайте понимать жестко закреплённую с двух сторон и натянутую проволоку. Будем считать для определённости, что струна у нас стальная. В струне могут распространяться упругие механические волны. С какой скоростью?

"Если проволока стальная, то со скоростью звука в стали" - скажете вы.

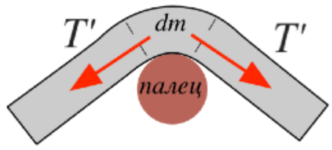
Это так, но скорость звука в стали от чего зависит? Помните, когда мы говорили о скорости звука в среде, мы сказали, что, например, скорость звука в более плотном воздухе больше, чем в менее плотном. Так же и в случае стали: скорость звука в стальной струне зависит от её натяжения. Для стальной струны существует формула, определяющая скорость звука в ней: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\varrho \cdot S}}$, где T - натяжение струны, S - площадь поперечного сечения струны, ϱ - объёмная плотность материала струны (в нашем случае - стали). Для данной струны S и ϱ - постоянные. Поэтому, изменяя натяжение струны, мы меняем скорость распространения звука в ней.

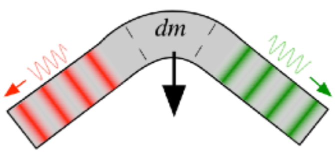
Вот чем занимаются гитаристы, подтягивающие струны с помощью колков на грифах своих гитар, или настройщики, подтягивающие струны на деках роялей. Они меняют скорость звука в струне!



Давайте разберёмся, что происходит со струной, когда мы её оттягиваем пальцем из положения равновесия и отпускаем. Оттянув струну, мы:

- задали некоторую амплитуду A будущих её колебаний;
- увеличили её натяжение;
- "зарядили" её энергией.





Вот на картинке я показал, что на маленький элемент струны dm под действием нашего пальца будут действовать увеличившиеся (по сравнению с состоянием равновесия) силы натяжения T'. Теперь мы палец убираем. Что произойдёт? Элемент струны dm (как и все другие элементы струны) под действием сил натяжения начнёт

[45] *Я под струнами в широком смысле понимаю не только натянутые стальные струны гитар, скрипок и фортепиано, но и воздушные резонаторы духовых инструментов, мембраны барабанов.*

двигаться к своему состоянию равновесия. Силы натяжения начнут уменьшаться. А коли силы натяжения начнут уменьшаться, то внутри струны возникнут две механические волны ("красненькая" и "зелёненькая"), которые помчатся в противоположные стороны к точкам крепления струны. Волны эти одинаковы по частоте и амплитуде. Ещё раз: *изменяющиеся силы натяжения порождают* ***в струне*** *механические волны*. Элемент струны dm (как и все другие элементы струны) будет стремиться к положению равновесия, но за счёт своей инерционности проскочит его и возникнет колебание струны в целом.

Для маленького элемента струны dm можно записать второй закон Ньютона в виде дифференциального уравнения (а мы же любим дифференциальные уравнения!) и, решив его, найти закон движения любого элемента струны. Успокою вас: мы этим заниматься не будем. Задачка эта - нетривиальная. В своё время (в 18-м веке) она породила так называемый "спор о струне", в который были вовлечены Эйлер, д'Аламбер, Лагранж, Бернулли, Фурье[46]. Этот спор привёл ко многим важным результатам как в физике, так и в математике. И одним из важнейших стала формулировка ***волнового уравнения***, о котором я говорил выше.

Итак, *а)* внутри самой струны распространяются механические волны и *б)* сама струна в целом колеблется.

Мы уже знаем, что пружинный маятник колеблется по гармоническому закону ("по синусу-косинусу"). Мы уже знаем, что механические упругие волны распространяются в среде по гармоническому закону. А значит и механические упругие волны в струне тоже распространяются по гармоническому закону. Струна в целом - это не среда. Струна в целом - это протяжённое гибкое физическое тело, каждая точка которого движется под действием изменяющихся внутренних сил натяжения. Так как же колеблется струна в целом? Может быть вот так?

Нет, *колебания струны в целом подчиняются тоже гармоническому закону!* И это удивительно! Это ещё раз показывает насколько глубоко гармоническое волновое поведение присуще разным физическим явлениям.

"А чего тут особо удивляться-то? Ведь в свободном положении струна висит тоже "по синусу". Или по параболе?" - вдумчивый ученик не любит удивляться.

Ну, во-первых, в свободном состоянии струна, как любая верёвка, цепь или нить висит по так называемой ***цепной линии***. Её формула: $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$. Во-вторых, параболы, гиперболы, эллипсы как линии траекторий движения появляются при решении уравнений движения в гравитационном поле: вспомните камень, брошенный под углом к горизонту, или траектории ракет при разных космических скоростях[47]. А вот синусы-косинусы появляются при решении волнового уравнения.

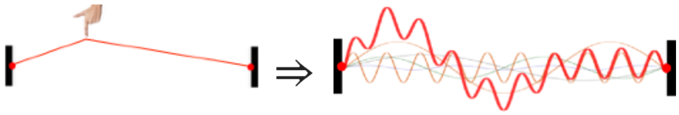
Давайте по порядку. Волновое уравнение для струны в целом будет иметь вид: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где $u(x, t)$ - это смещение точки струны с координатой x в момент времени t.

---

[46] *Надеюсь, эти имена хоть что-то вам говорят.*

[47] *Смотри Историю про Гравитацию.*

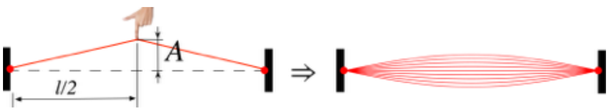
В *ОБЩЕМ* случае его решение выглядит вот так страшно:
$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot sin\frac{\pi k x}{l} \cdot sin(\omega_k t + \varphi_k)$, где l - длина струны, k - целое число. Перевожу на русский язык: *струна в целом ведёт себя как волна, являющаяся суммой (результатом интерференции) гармонических волн* вида $A_k \cdot sin\frac{\pi k x}{l} \cdot sin(\omega_k t + \varphi_k)$. Величины A_k, ω_k, φ_k вычисляются по определённым формулам, но для нас это не важно. А если внимательно присмотреться к виду $A_k \cdot sin\frac{\pi k x}{l} \cdot sin(\omega_k t + \varphi_k)$, то станет понятно, что это - ***стоячие волны*** с узлами в точках, где $sin\frac{\pi k x}{l} = 0$.



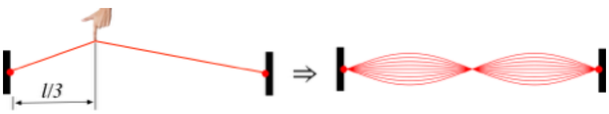
То есть, если я в *произвольном* месте струны (а это и есть ***общий*** случай) дёрну её пальцем, то получу *струну-волну в виде суммы стоячих волн*.
Вот как-то так (это лишь "мгновенная фотография колебаний"). Ну да, картинка немного утрирована в смысле вертикальных размеров, но это для наглядности.

Итак, *струна в целом ведёт себя как волна, являющаяся суммой некоторых стоячих гармонических волн.*

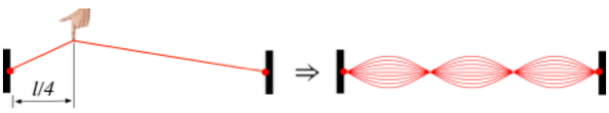
А теперь о частных случаях. В чём их частность? В том, в каком месте струны её "дёрнуть пальцем"[48].



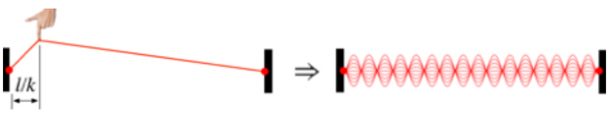
Оттянем струну точно посередине. И отпустим. Получим одну стоячую волну как показано на рисунке. Её длина $\lambda = 2l$, а линейная частота $f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l}$. Заметьте: эта частота определяется длиной струны и её натяжением (поскольку скорость звука в струне определяется натяжением). Такое колебание струны называется ***основной (первой) гармоникой*** струны.



Оттянем струну в точке, отстоящей на одну треть её длины. И отпустим. Получим вот такую стоячую волну. Её длина $\lambda = l$, а линейная частота $f_2 = \frac{v}{l}$. И такое колебание называется ***второй гармоникой*** струны. Частота второй гармоники в два раза выше частоты основной гармоники.



Оттянем струну в точке, отстоящей на одну четверть её длины. И отпустим. Получим вот такую стоячую волну. Её длина $\lambda = 2l/3$, а линейная частота $f_3 = \frac{3v}{2l}$. И такое колебание называется ***третьей гармоникой*** струны. Частота второй гармоники в $3/2$ раза выше частоты второй гармоники.

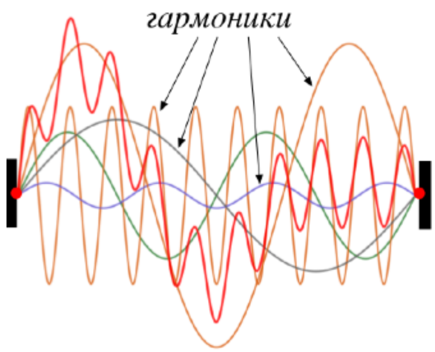


В общем случае: оттянем струну в точке, отстоящей на одну k-ю её длины. И отпустим. Получим стоячую волну длиной $\lambda = 2l/k$ и частотой $f_k = \frac{k \cdot v}{2l}$. Это - ***$k$-я гармоника*** струны.

[48] *Ведь в чём секрет хорошей игры на гитаре? Он прост: в нужное время дёрнуть нужную струну в нужном месте.*

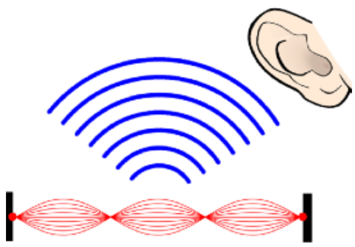
Во всех этих частных случаях колебание струны - это ***одна гармоника одной частоты***. Такие колебания дают *"чистый" гармонический звук* (только одна частота без примесей других).

Как видите, в данной струне (при фиксированнх l и v) можно породить лишь гармоники с "чистым" звуком, имеющие длину волны $\lambda_k = 2l/k$ и частоту $f_k = \dfrac{k \cdot v}{2l}$.



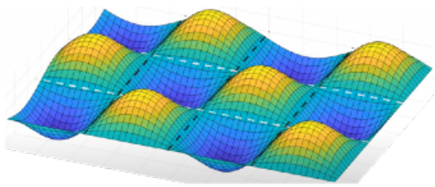
И, возвращаясь к общему случаю, когда мы дёрнули струну пальцем в *произвольном* месте. Да, мы получим колебания в виде суммы стоячих волн. Оказывается, что эти стоячие волны и будут гармониками данной струны.

Обращаю ваше внимание, что ***рассмотренные колебания струны - свободные колебания***: мы один раз дёрнули струну пальцем, задав начальные условия, и в дальнейшем струна колеблется самостоятельно, подчиняясь лишь своим волновым законам.



Ну и уж завершая разговор про струны: колебания струны порождают колебания воздуха. И эти колебания воздуха доходят до наших ушей. И мы таким образом "слышим струну"[49].

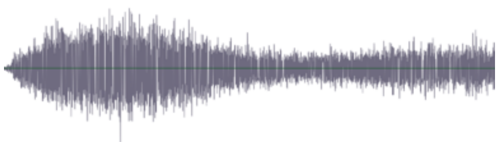
Струна - это одномерная конструкция. Поэтому в уравнении её колебаний только одна пространственная переменная - x. А вот поверхность барабана - мембрана - конструкция двумерная. И она тоже колеблется от ударов палочками. И её колебания тоже описываются волновым уравнением. И в уравнении её колебаний будут уже две пространственных переменных.



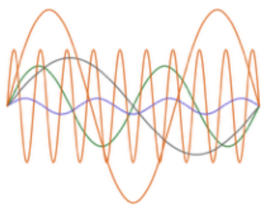
■ Колебания воздуха в трубе

Вы наверняка любите играть на флейте. Или на тромбоне. Кто ж не любит? В чём состоит такая игра? Вы дуете в один конец трубы, а из другого вылетает красивый звук. Пора разобраться что же внутри трубы происходит. Есть подозрение, что и здесь не обошлось без колебаний. И колеблется в трубе воздух (а больше нечему).

Струна, после того, как мы дёрнули её пальцем, совершает свободные колебания. А вот при игре на трубе надо дуть в неё непрерывно. Перестал дуть - звук из трубы прекратился. То есть ***воздух в трубе совершает вынужденные колебания***.



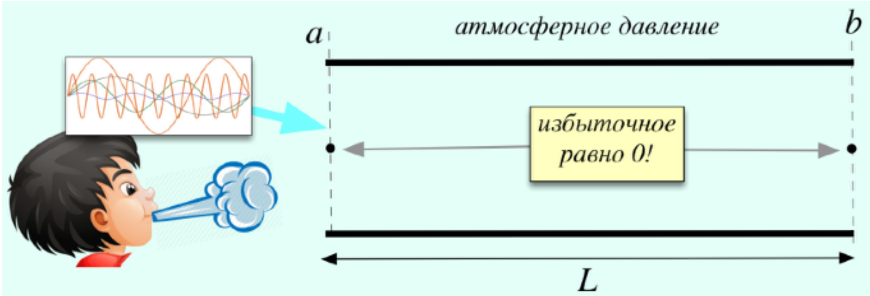
А что значит дуть в трубу? А это значит загонять в трубу воздух. Какой воздух? Вот я просто подул и записал это "подул" на компьютере через микрофон. На мембрану микрофона действует переменное давление от моего "подул". Вот какая картинка колебаний давления получилась. Но мы то с вами уже спецы в колебаниях и смело можем сказать, что в моем "подул" *присутствует множество гармонических волн-составляющих различных частот* (и Фурье-анализ это подтвердит). Ну, условно говоря, вот так.



---

[49] *В космосе на гитаре не поиграешь - вас просто никто не услышит.*

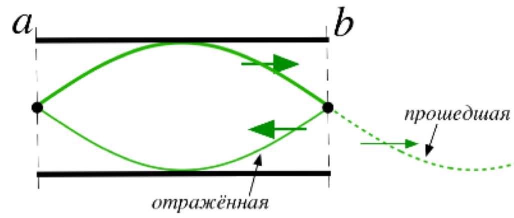
Ну а теперь давайте залезем внутрь трубы и будем смотреть что же в ней происходит.



Итак, имеем трубу длины L. Всё происходит в воздухе и везде снаружи трубы - нормальное атмосферное давление. В том числе и на концах трубы a и b. Колебания воздуха, который мы в трубу вдуваем, и колебания воздуха в трубе - это колебания избыточного (над атмосферным) давления. *А коли на концах трубы a и b нормальное атмосферное давление, то на них* ***избыточное колебательное давление всегда равно нулю****!* Это - важное утверждение.

Давайте выберем из всего многообразия "вдуваемых" нами в трубу гармонических волн избыточного давления воздуха волну длиной $\lambda = 2L$ (и, соответственно, частотой $f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{v}{2L}$) и проследим за её поведением в трубе.

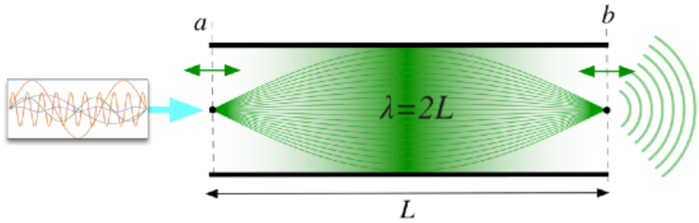
Именно такая волна (длиной $\lambda = 2L$) точно "уложится" своей полуволной в трубе. Важным является момент, когда эта волна достигнет конца трубы b. Поскольку наша волна точно "уложилась" полуволной в трубе, то в момент достижения конца b она будет иметь нулевое значение (её избыточное колебательное давление воздуха станет нулевым), что соответствует ранее сформулированному условию на концах трубы.



И вот что произойдёт на конце b: *наша волна частично отразится от конца b и частично пройдёт наружу*.

"Как так "отразится"? От чего?!" - вскрикните вы.

Волна, принявшая нулевое мгновенное значение, отразится от среды с постоянным давлением. БОльшего я вам сказать не могу. И не потому, что это военная тайна, а потому, что этот неочевидный вывод вытекает из сложного для нас волнового анализа. Из этого анализа вытекает и то, что волны других длин (те, которые на конце b не принимают нулевого мгновенного значения) не отражаются, а полностью проходят наружу.

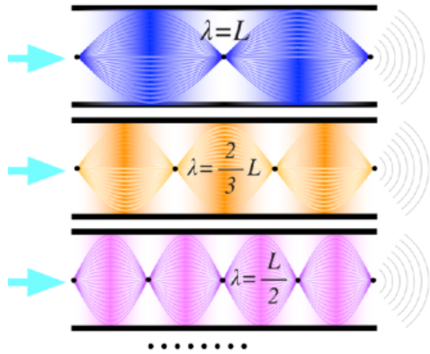


А что из этого частичного отражения вытекает? А то, что ***внутри трубы образуется стоячая волна***! Посмотрите: отражённая волна точно такая же, как и наша исходная, только движется в противофазе навстречу. Они сложатся вместе и породят стоячую волну. И на конце a отражённая волна отразится ещё раз. И так далее. И у этой стоячей волны узлы будут располагаться на концах трубы.

Если мы прекратим дуть в трубу, то эта стоячая волна быстро затухнет. Но мы дуем и продолжаем накачивать эту стоячую волну энергией. А значит и та часть волны, которая вышла наружу на конце b (в виде сферической волны), будет получать больше энергии.

Итак, образовавшаяся стоячая волна накапливает энергию от нашего "дутья" и передаёт её часть во внешнюю сферическую волну. То есть внешний звук частоты $f = \dfrac{v}{2L}$ будет усиливаться. А волны других длин (те, которые на конце b не принимают нулевого мгновенного значения) будут проходить сквозь трубу без такого усиления.

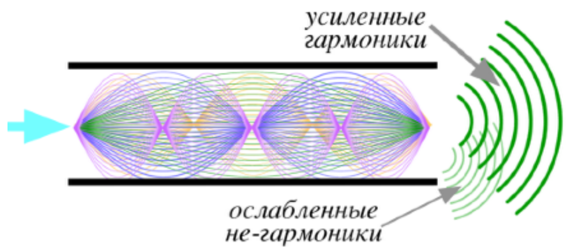
Ну вот, мы прошли самую трудную "объяснительную" часть. Дальше будет легче.



А есть ли ещё в нашем "дутье" волны, которые тоже могли бы образовать стоячие волны в трубе? Да, и их много. Это те волны, которые могут своими волнами-полуволнами точно "уложиться" на длине трубы. Три из них я показал на картинке. Все волны с длинами $\lambda_k = 2L/k$ будут вести себя аналогично: образовывать стоячие волны и усиливать внешние звуки с частотой $f_k = \dfrac{k \cdot v}{2L}$.

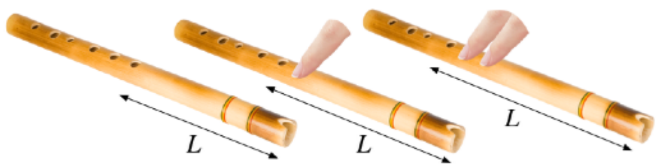

"Ой!" - воскликнул вдумчивый ученик. "Так это же как гармоники у струны!"

Точно! И они тоже называются гармониками. Колебание частоты $f = \dfrac{v}{2L}$ называется основной (первой) гармоникой трубы. Колебание частоты $f_k = \dfrac{k \cdot v}{2L}$ называется k-ой гармоникой трубы.



И в результате мы имеем в трубе кучу стоячих волн всех гармоник, а наружу выходят усиленные сферические волны их частот.

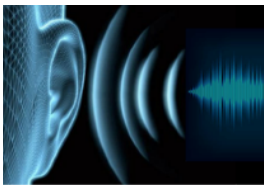
То есть *частоты звуков, которые усиливаются трубой, определяются её длиной*. А чтобы на трубе, как на музыкальном инструменте, можно было издавать звуки разных частот (разные ноты, как сказали бы музыканты), длину трубы (*акустическую длину*) меняют. У тромбона это достигается простым "ручным" способом. А у флейты, саксофона и пр. зажимают или открывают клапаны-отверстия.



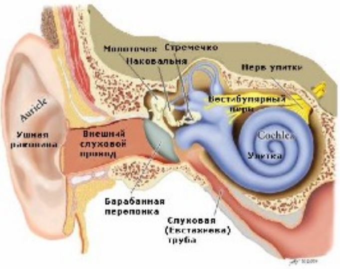
Труба, как мы её рассмотрели, является классическим примером простейшего *резонатора*: *колебательной системы, в которой происходит накопление энергии колебаний за счёт резонанса с внешним воздействием.* В случае трубы внешним воздействием является тот набор волн давления воздуха, который мы в трубу "вдуваем". Частоты гармоник трубы являются её резонансными частотами. Описанное нами усиление волн с частотами гармоник и есть *звуковой резонанс*. Ранее мы обсуждали резонанс при вынужденных колебаниях. Все ранее высказанные соображения про резонанс полностью применимы и к случаю колебаний воздуха в трубе.

Примерами резонаторов музыкальных инструментов является корпус гитары (дека) и корпус барабана. Наша гортань тоже является резонатором.

➡ Звук



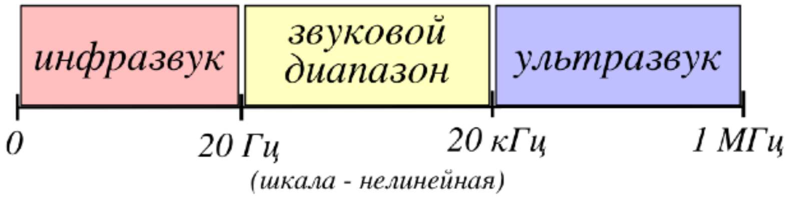
Под звуком мы понимаем ту часть диапазона акустических колебаний, которую слышим ухом и которую можем воспроизвести горлом.



Что же мы слышим? Человеческое ухо - весьма сложный орган. Но в рамках нашего разговора всё можно свести к простой схеме: под действием внешней звуковой волны в нашем ухе колеблется барабанная перепонка - механическая мембрана. Её отклонения преобразуются в электрические импульсы, передаваемые в мозг. Так формируется восприятие звука.

Звуковая гармоническая волна характеризуется двумя параметрами: амплитудой и частотой. Барабанная перепонка - механическая система. Из-за своей инерционности у неё есть предел частот, на которые она может реагировать. А из-за своих пределов механической прочности у неё есть предел амплитуд собственных колебаний.

О частотах. Диапазон звуковых частот лежит в пределах приблизительно от 20 Гц до 20 кГц (что соответствует длинам волн от 20 метров до 20 см). Волны с частотой менее 20 Гц называются *инфразвуком*, а с частотой более 20 кГц - *ультразвуком*[50].



Все колебания, частоты которых ниже 20 герц, мы не слышим ухом. Так он устроено. *Но это не значит, что мы их не воспринимаем.* Но об этом чуть ниже. Все колебания, частоты которых выше 20 килогерц, мы не слышим ухом из-за механической инерционности барабанной перепонки. Таковы ограничения нашего уха по частоте.

Об амплитудах. При восприятии звуков человеческое ухо оценивает их по уровню громкости, зависящей от интенсивности звуковой волны. Интенсивность определяется амплитудой колебаний давления. ***Порог слышимости*** соответствует значению амплитуды давления порядка 10^{-5} Па. При таком слабом звуке молекулы воздуха колеблются в звуковой волне с амплитудой всего лишь 10^{-7} см и не могут "раскачать" нашу барабанную перепонку из-за её инерционности. ***Болевой порог*** соответствует значению 10 Па и определяется ограничением механической прочности барабанной перепонки. Болевое ощущение - это предупредительный сигнал нам: "ещё чуть громче и всё порвётся".

Таким образом, человеческое ухо способно воспринимать волны, в которых звуковое давление изменяется в миллион раз. Так как интенсивность звука пропорциональна квадрату звукового давления, то диапазон интенсивностей оказывается порядка 10^{12}! При обычных разговорах людей в комнате интенсивность звука приблизительно в 10^{6} раз превышает порог слышимости, а интенсивность звука на рок-концерте приближается к болевому порогу.

Громкость звука = интенсивность звука.

---

[50] *Максимальная частота ультразвука - порядка 1 МГц. Это та частота* ***механических*** *колебаний, которую технически возможно достичь.*

"А что имеют в виду, когда говорят, что громкость звуков работающего самолетного двигателя равна 100 децибел?"

Когда мы говорили о затухании акустических волн, мы ввели понятие децибела [дБ] для сравнения интенсивностей двух волн: $D = 10 \cdot lg \frac{I_2}{I_1}$. Поэтому, когда мы выражаем громкость звука в децибелах, мы тем самым сравниваем интенсивность (громкость) этого звука с интенсивностью (громкостью) некоторого "единичного" звука. Единицей шкалы громкости является один сон[51] - *громкость непрерывного чистого синусоидального тона частотой 1 кГц, создающего звуковое давление 2 мПа*. И благодаря этому у нас есть возможность сравнивать громкости разных звуков. Вот несколько примеров:

Звук	Громкость, дБ	Звук	Громкость, дБ
Шёпот	20	Громкая музыка	110
Разговор	60	Болевой порог	120
Шумная улица	70	Старт ракеты	150

Теперь поговорим о том, как мы создаём звуки. Звуки, которые мы можем воспроизводить голосом, лежат в звуковом диапазоне. Было бы странно, если бы это было не так.

Наши лёгкие создают воздушный поток. Этот поток направляется на наши голосовые связки и начинает их колебать. Голосовые связки - это по сути дела струны. Напрягая или ослабляя мышцы голосовых связок, мы тем самым меняем их натяжение. А меняя натяжение, мы меняем гармоники голосовых связок (смотри раздел о колебаниях струны). В результате в воздушной волне эти гармоники колебаний усиливаются. Затем эта волна попадает в наши гортань, ротовую и носовую полости. И они, действуя как резонаторы (смотри раздел о колебаниях воздуха в трубе), окончательно формируют выходной звук. Ну это всё суховатые слова.

Вот я сделал эксперимент. Записал на компьютере собою же произнесённое слово "*звук*". Потом попросил сделать то же самое жену. А потом с помощью программы синтеза речи (сейчас в интернете можно найти кучу таких он-лайн-программ) синтезировал звучание слова "*звук*". Три разных голоса (мужской, женский и синтетический) произнесли одно и то же слово.

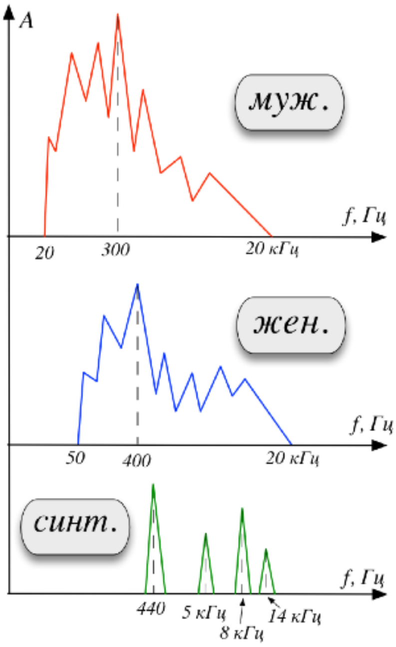
Вот результат. По сути на нём показаны колебания мембраны микрофона при произнесении слова "*звук*". Во всех трёх случаях при воспроизведении этих записей чётко и однозначно воспринимается ухом слово"*звук*". То есть "информационнаяй" задача решена - смысл сказанного передаётся.

Что по виду этих диаграмм можно сказать? Они более-менее близки по форме. Ну это-то и не удивительно: ведь произнесено одно и то же слово. Ну и "человеческие" диаграммы выглядят как-то "погуще". Больше сказать нечего.

Что ещё можно извлечь из этих записей? Мы уже знаем, что в рассматриваемых сигналах присутствуют колебания многих частот и амплитуд.

[51] *От французского "son" - звук.*

А давайте мы построим ***спектры***[52] ***этих сигналов***! Спектр сигнала (или *амплитудно-частотная характеристика - АЧХ*) - это распределение амплитуды (а следовательно, и интенсивности-громкости) присутствующих колебаний по частотам этих колебаний. В интернете опять же есть куча он-лайн-программ, которым задаешь на вход файл с аудио-записью, а на выходе получаешь её спектр.



И вот результат. Перед вами три АЧХ (я немного их упростил для наглядности). Давайте сначала сравним мужской и женский "звуки". Оба этих спектра - *непрерывные*: в диапазоне частот 20 (в "женском" случае - 50) Гц - 20 кГц присутствуют ***все частоты***. Максимумы амплитуд в "женском" спектре сдвинуты немного в сторону более высоких частот. И это не удивительно: женские голоса обычно выше мужских. А в остальном (кроме очень тонкой структуры) эти спектры похожи.

А теперь смотрим на спектр синтетического голоса. Ой! Он - прерывистый. В нём присутствуют лишь четыре узкие полосы частот. Такой спектр называют *полосчатым*. И это тоже не удивительно: программа синтеза речи решает чисто "информационную" задачу - перевести последовательность букв в последовательность звуков. Поэтому мы всегда на слух определяем искусственную синтезированную речь.

А что же это за частоты, которые присутствуют в человеческих спектрах? Получается, что они избыточны в "информационном" смысле? Да, но они окрашивают звук наших голосов индивидуальностью. Эти дополнительные частоты возникают как дополнительные гармоники нашего голосового аппарата, его шумы и "призвуки". Более того: эта окраска звука столь же индивидуальна у людей, как и их отпечатки пальцев и строение сетчатки глаза. И эта индивидуальная окраска голоса определяет понятие ***тембр звука***. Когда кто-нибудь из знакомых произносит по телефону "алло", то вы тут же узнаёте его по знакомому тембру голоса.

Понятие тембра применимо и к музыкальным инструментам: ведь после того, как вы дёрнете струну гитары, звучит не только она, но и гармоники резонатора - деки гитары.

Человеческий голос можно также характеризовать ***диапазоном*** воспроизводимых частот. Эти диапазоны тоже индивидуальны. Диапазон наиболее низкого мужского голоса - *баса* - лежит в пределах от 80 до 400 Гц, а диапазон великого *тенора Лучано Паваротти* - от 130 до 700 Гц. И это считается фантастически широким диапазоном. Добавьте сюда невероятный тембр и море обаяния.

Женские высокие голоса могут взять ноту частотой до 1050 Гц. Это лишь одна двадцатая звукового диапазона.

Но мы можем также воспринимать и инфразвуки. И делать это *не ушами*. Я уже не раз говорил, что человек - это сложнейшая колебательная система. Простейший пример - это биение нашего сердца. 60-100 ударов в секунду - диапазон пульса человека - частота колебаний важнейшей внутренней системы. Волновые процессы происходят в нашем мозгу и их частоты - от 4 Гц до 40 Гц. Резонансными частотами обладают каждый из наших органов в отдельности: глаз (19 Гц), позвоночник (6 Гц), почки (6-8 Гц) и пр. Как видите, эти частоты лежат в инфразвуковом диапазоне. И при внешней инфразвуковой волне в наших

[52] *О спектрах говорится в Истории про Атом. На примере спектров атома водорода.*

органах возбуждаются колебания, которые могут входить в резонансы, что приводит к самым разнообразным последствиям.

Классический пример. Движущиеся океанские волны генерируют инфразвук - они передают часть своей колебательной энергии в воздух и порождают инфразвуковую акустическую волну с частотами в диапазоне 1 - 9 Гц. Доказано, что инфразвук такой частоты, влияя на процессы в нашем мозгу, порождает в человеке чувство тревоги, паники.

Красивая версия того, почему иногда в океане встречаются совершенно неповреждённые корабли, на которых полностью отсутствует экипаж, заключается в том, что под воздействием инфразвука команда "сошла с ума и выпрыгнула за борт". Привет от "Летучего Голландца" и его Капитана Джека Воробья!

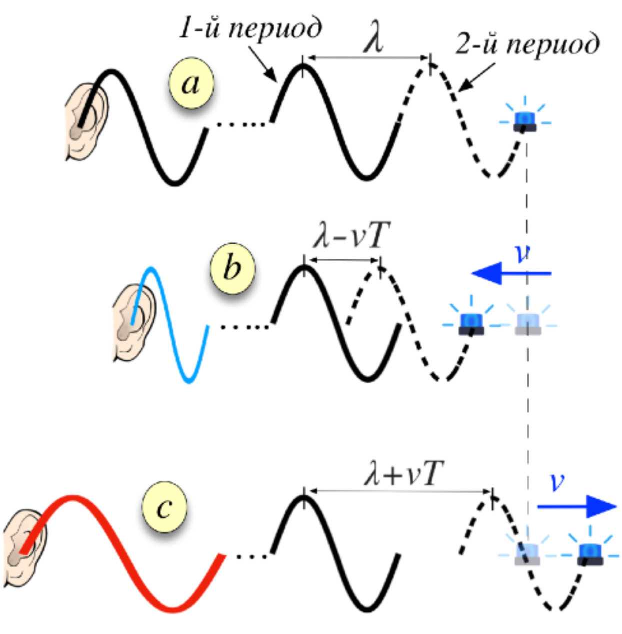
Эффект Доплера

Вам, наверняка, доводилось стоять у дороги, по которой проносится машина "Скорой помощи" со включенной сиреной. Пока вой сирены приближается, его тон выше, затем, когда машина поравняется с вами, он понижается, и, наконец, когда машина начинает удаляться, он понижается еще.

Это проявление общего волнового эффекта - *эффекта Доплера*: *изменение частоты (и длины) волны, воспринимаемой наблюдателем, вследствии движения источника излучения относительно наблюдателя.*

> Воспринимаемая частота волны зависит от относительной скорости источника и приемника.

Проиллюстрируем этот эффект на примере звуковых волн. Как только звуковая волна пошла, скорость её распространения определяется только свойствами воздуха, - источник же волны никакой роли больше не играет. Ни один из механизмов распространения волн не зависит от источника волны.



Рассмотрим ситуацию: у нас есть источник звука (сирена), непрерывно испускающий гармоническую звуковую волну длины λ.

Очевидно, что период этой волны равен $T = \dfrac{\lambda}{v_3}$,

где v_3 - скорость звука в воздухе. и ловим мы эту волну своим ухом. Будем делать две мгновенные фотографии с интервалом T.

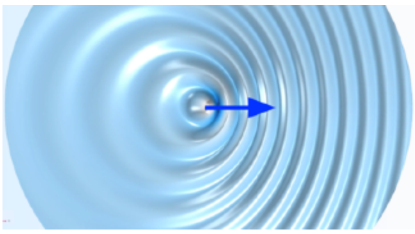
Случай a - источник и наше ухо ***неподвижны*** друг относительно друга. В момент $t = 0$ источник начал испускать 1-й период своей волны. В момент $t = T$ источник начал испускать 2-й период своей волны. На сколько уже распространился 1-й период? На длину волны λ. И так "период встык за периодом" происходит распространение волны в целом и так она достигает нашего уха. И мы воспринимаем её как волну частоты $f = 1/T$. Ничего нового.

Случай b - источник движется ***к нашему уху*** со скоростью v. В момент $t = 0$ источник начал испускать 1-й период своей волны. В момент $t = T$ источник начал испускать 2-й период своей волны. На сколько уже распространился 1-й период? На длину волны λ *относительно исходного положения* источника. Но за время T источник приблизился к нашему уху на расстояние vT. И расстояние между 1-м и 2-м периодами (между их пиками) станет равным $\lambda - vT$. И в достигающей нашего уха всей волне расстояние между всеми пиками будет равно $\lambda - vT$. Мы ухом воспринимаем волну именно по расстоянию (интервалам) между пиками[53]. Значит мы будем воспринимать эту волну как волну длиной $\lambda - vT$. То есть длина воспринимаемой нами волны уменьшилась. А частота, соответственно, возросла.

Аналогично надо рассматривать и случай c - источник движется ***от нашего уха*** со скоростью v. Расстояние между пиками двух последовательных периодов волны будет $\lambda + vT$. И мы будем воспринимать эту волну как волну длиной $\lambda + vT$. То есть длина воспринимаемой нами волны увеличилась. А частота, соответственно, уменьшилась.

Именно в этом и состоит эффект Доплера.

В формульном виде эффект Доплера описывается так: $f_n = \left(1 + \dfrac{v}{v_3}\right) \cdot f$, где f_n - частота волны, воспринимаемая наблюдателем, f - частота волны источника, v_3 - скорость звука в воздухе, v - скорость источника относительно наблюдателя: если источник и наблюдатель сближаются, то $v > 0$, если источник и наблюдатель удаляются друг от друга, то $v < 0$.



Вот так наглядно иллюстрирует эффект Доплера движущийся по поверхности воды источник радиальных волн.

В случае электромагнитных волн эффект Доплера проявляется аналогично, однако его формула выводится в рамках специальной теории относительности и эффект Доплера в этом случае называется *релятивистским эффектом Доплера*: $f_n = \sqrt{\dfrac{c - v}{c + v}} \cdot f$, где c - скорость света.

На эффекте Доплера основано действие радаров, определяющих скорость движения автомобилей: радар излучает радиоволновой сигнал, который отражается от металлического кузова вашей машины. Обратно на радар сигнал поступает уже с доплеровским смещением частоты, величина которого зависит от скорости машины. Сопоставляя частоты исходящего и входящего сигнала, прибор автоматически вычисляет скорость вашей машины.

Астрофизики обнаружили в спектрах излучения галактик (а это, преимущественно, спектры излучения атомов их водорода) постоянно присутствующее "красное смещение" - уменьшение частоты излучения там, где его вроде-бы быть не должно. Это привело в итоге к пониманию того, что Вселенная наша непрерывно расширяется. Эффект Доплера и здесь помог.

[53] *Как и любая другая регистрирующая аппаратура.*

И ещё...

В завершение я приведу несколько познавательных фактов о волнах.

Про звуковые волны

- Наш голос в записи иной, потому что мы слышим "не тем ухом". Все дело в том, что когда мы говорим, то воспринимаем свой голос двумя путями - через внешний слуховой канал (ушами) и внутренний (через ткани головы, которые усиливают низкие частоты голоса).
- Шум моря, который мы слышим через морскую раковину, на самом всего лишь звук крови, протекающей по нашим сосудам. Такой же шум можно услышать, приложив к уху обычную чашку. Попробуйте!
- Слонов пугает звук, издаваемый пчелами, и они убегают, когда слышат его.

- Шум - это совокупность непериодических звуков различной интенсивности и частоты. С физиологической точки зрения шум - это всякий неблагоприятно воспринимаемый звук.
- "А" - самый распространённый в мире звук. Он есть во всех языках нашей планеты.
- Удивительный факт: если связать толстой металлической проволокой два фортепиано в разных комнатах и играть на одном из них, то второе (с нажатой педалью!) будет играть ту же мелодию само собой, без пианиста.

Про морские волны

- Во время шторма волны оказывают давление от 3 до 30 тысяч килограммов на 1 квадратный сантиметр.
- Волны прибоя иногда выбрасывают обломки скал весом до 13 тонн на высоту 20 метров.
- Энергия одного удара "хорошей" волны соответствует мощности 75 гигаватт (миллиардов ватт).
- На больших глубинах в океане возникают волны высотой до 100 метров, однако на поверхности воды эти волны незаметны.
- Наиболее высокие цунами (морские волны - спутникии землетрясений в открытом океане) наблюдаются в Тихом океане. Высота их доходит до 30 метров.

Про электромагнитные волны и радиосвязь

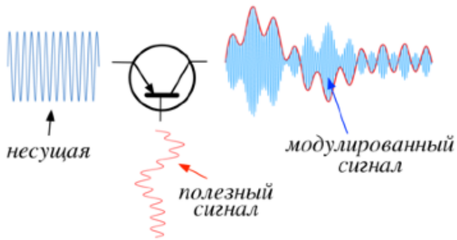
Давайте сначала разберёмся какие электромагнитные волны (радиоволны) используются в радиосвязи и каковы их свойства.

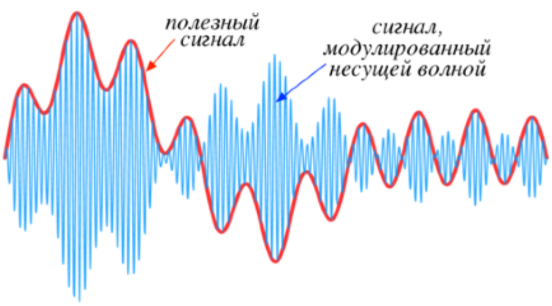
Диапазон	Свойства	Использование
Сверхдлинные волны: частота f = 3-30 кГц, длина волны λ = 10 - 100 км.	далеко распространяются, хорошо огибают препятствия (в том числе и поверхность Земли), проникают вглубь воды до 20 метров.	для связи с подводными лодками на глубине. Недостаток: а) информация с их помощью передаётся *очень медленно* (оптимистичная оценка - до 30 кбит/сек), б) требуется передатчик большой мощности
Длинные волны (ДВ): частота f = 150-450 кГц, длина волны λ = 670 - 2000 м.	далеко распространяются, хорошо огибают препятствия	аналоговая связь на большие расстояния. Для цифровой связи слишком медленные.
Средние волны (СВ): частота f = 500-1600 кГц, длина волны λ = 190 - 600 м.	хорошо отражаются ионосферой Земли	связь на несколько сотен километров
Короткие волны (КВ): частота f = 3-30 МГц, длина волны λ = 10 - 100 м.	хорошо отражаются ионосферой Земли	связь на сотню километров
Ультракороткие волны (КВ): частота f = 30-300 МГц, длина волны λ = 1 - 10 м.	имеют хорошую проникающую способность и могут огибать препятствия размером в несколько метров	радиотрансляции
Высокие частоты (ВЧ-сантиметровый диапазон): частота f = 300 МГц - 3ГГц, длина волны λ = 0,1 - 1 м.	не огибают препятствия и имеют хорошую проникающую способность	в сетях сотовой связи, WiFi-сетях, а также в микроволновых печах
Крайне высокие частоты (КВЧ-миллиметровый диапазон): частота f = 3 - 30 ГГц, длина волны λ = 0,01 - 0,1 м.	отражаются практически всеми препятствиями, свободно проникают через ионосферу	в космической связи

Существуют два принципиально различающихся способа передачи информации: аналоговый и цифровой.

Аналоговый способ. На сегодняшний день он уступает по распространённости цифровому. Основная идея: когда мы говорим, мы производим звуковую волну, которую легко преобразовать в электрические колебания с помощью микрофона. Эти электрические колебания можно преобразовать в электромагнитную волну и послать в эфир. А на принимающей стороне сделать обратное преобразование в звуковую волну и услышать то, что говорил источник. То есть волны просто преобразуется по цепочке звуковая-электрическая-электромагнитная-электрическая-звуковая, сохраняя свои частоты. С такого метода и началась радиосвязь. Но частоты нашего голоса заключены в диапазоне до 1 кГц (именно диапазон голоса, а не звуков, которые мы слышим). Значит нужно посылать радиоволны с частотами не выше 1 кГц - а это даже меньшие частоты, чем у сверхдлинных волн. Теоретически так сделать можно, но потребуется передатчик очень большой мощности. Как быть?

На помощь пришла идея ***модуляции***. Я объясню вам простейшую из них - *амплитудную модуляцию (АМ)*. Инженеры поняли, что хорошо бы посылать в эфир волны с частотами 300-3000 кГц - это хорошо и по дальности распространения таких радиоволн и по мощности передатчика. А что, если низкочастотный полезный сигнал звуковой частоты (наш голос) "пересадить" на высокочастотный сигнал так называемой *несущей частоты*? Математически это означает просто перемножить эти сигналы, а технически это можно сделать с помощью одного транзистора (или лампового триода). Тогда в эфир (в виде радиоволны) уйдёт высокочастотный сигнал, который в себе будет нести образ полезного низкочастотного сигнала. А на приёмной стороне надо будет поставить высокочастотный фильтр (чтобы убрать частоты несущей) и получить полезный сигнал в чистом виде. Так и сделали. И это работает. Полезный сигнал, "посаженный" на несущую частоту таким образом, называется *амплитудно-модулированным сигналом (АМ-сигналом)*.





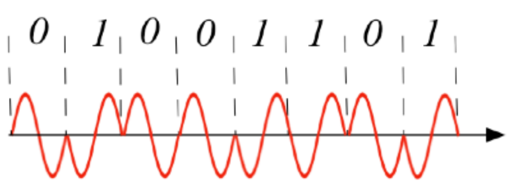
Амплитудно-модулированный сигнал

Существуют также методы *частотной модуляции (ЧМ)* и *фазовой модуляции (ФМ)*. Самым распространённым сегодня является метод фазовой модуляции.

У аналогового способа передачи информации есть два принципиальных недостатка: низкая помехозащищённость (если в воздухе приключился разряд молнии, то ЭМ-волна, этим разрядом порождённая, исказит радиоволну) и невысокая скорость передачи информации.

На сегодняшний день аналоговый способ используется, пожалуй, лишь в радиовещании.

Цифровой способ. Сегодня практически весь мир "перешел на цифру": аудио, изображения, видео и прочее гораздо удобнее, компактнее (а значит, дешевле) и надёжнее хранить и использовать в оцифрованном виде. И эту цифровую информацию надо уметь передавать. Цифровая информация - двоичная. И её передача - это передача последовательностей нулей и единиц. Вот в чём она состоит (в простейшем варианте). Есть высокочастотная несущая (на рисунке она обозначена красным). Если надо передать ноль, то передатчик "выдаёт" эту частоту с нулевой фазой, если надо передать единичку, то фазу сдвигает на π. А приёмник эту смену фаз "ловит" и восстанавливает исходную последовательность нулей и единиц. Это принцип *фазовой модуляции*.



И на таком цифровом способе передачи основана работа космических линий радиосвязи, сотовых телефонных сетей, Wi-Fi сетей, вплоть до компактных переговорных раций.

Ну и на закусочку...

А как поддерживается связь с подводными лодками?
Когда подводные лодки плавают на поверхности, то используют все возможности связи, которыми пользуются и остальные корабли. А в подводном положении? Под водой электромагнитные волны, используемые в обычной "эфирной" радиосвязи, очень сильно затухают в солёной воде.

Можно, конечно, всплыть на поверхность или выпустить радиобуй для использования обычной "эфирной" радиосвязи, но это сразу демаскирует её положение. Атомная подводная лодка может находиться в подводном положении в течение нескольких месяцев и её связь со штабом флота для получения приказов должна быть обеспечена непрерывно.

Оказывается, что волны сверхнизких частот $f =$ 3-30 Гц легко проникают сквозь морскую воду. И такие приемники-передатчики строят. Их особенности: очень большие размеры передающих антенн, очень низкий КПД передачи (на каждый ватт излучаемой мощности волны необходимо затратить до 100 кВт мощности передатчика) и ооооочень медленная передача информации (несколько знаков в минуту). И такая связь - односторонняя: на лодке невозможно разместить передающую антенну необходимых размеров. Ну что поделать!

========================

Ну вот и закончилась эта длинная История про Колебания и Волны!