Теория вероятностей

Единственный эффективный путь овладеть понятиями и методами теории вероятностей - решать много, очень много разных задач. Здесь разобрано много задач.

"Из теории вероятности следует,
Что, возможно, мой друг не обедает...
...
Ах, какие же неприятности
От теории вероятности!"
???

Понятием вероятности мы пользуемся постоянно. От простонародного "Бабушка надвое сказала" до "Гидрометцентр прогнозирует сегодня дожди в Мытищах с вероятностью 60%". А уж квантовая физика так и вообще вся построена на вероятностях: физики не могут сказать точно в какой точке находится электрон, они лишь могут рассчитать вероятность его нахождения здесь или там. Ну а математика, как чопорная английская дама, любит, чтобы всё было чётко определено и не подлежало различным толкованиям. Вот мы и будем изучать математическую теорию вероятностей.

События

Базовое понятие теории вероятностей - это ***событие***. Событие - это то, что происходит в некоторый момент времени и рассматривается как изменение состояния чего-либо. События бывают *достоверными, невозможными и случайными.*

Достоверным называют событие, которое в результате ***испытания*** (осуществления определенных действий) обязательно произойдёт. Например: в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.
Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдёт в результате испытания. Например: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.
Случайным называют событие, если в результате испытания оно может, как произойти, так и не произойти. ***Случайное событие есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно.***
Пример: в результате броска монеты выпадет "орёл"; случайные факторы: форма и физические характеристики монеты, сила-направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

решка орёл

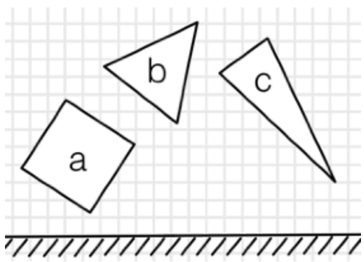
Теория вероятностей изучает случайные события!

Любой результат испытания называется ***исходом***, который и представляет собой появление определённого события. Так при подбрасывании монеты возможно два исхода (случайных события): выпадет "орёл", выпадет "решка". Подразумевается, что испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или зависнуть в невесомости.

События (любые) обозначают большими латинскими буквами $A, B, C, D, E, F, \ldots$ или с подстрочными индексами $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$ Вот пример записи случайных событий:

A_0 - в результате броска монеты выпадает "орёл";
B_5 - в результате броска игральной кости (кубика) выпадает 5 очков;
C_r - из колоды извлекается карта трефовой масти.

Поговорим о характеристиках событий. Будет немного нудно, но это важно понять.



Важная характеристика событий - ***равновозможность***.
Взгляните на картинку. Одинаково возможным является то, что квадрат "а" в результате бросания упадёт на любую из своих сторон. То же самое

можно сказать и про правильный треугольник "b". У "a" и "b" есть симметрии и это подразумевает равные возможности исходов бросания. А вот у равнобедренного треугольника "c" (и это интуитивно понятно) возможность упасть на одну из боковых сторон больше, чем на основание.

Два или больше событий называют ***равновозможными***, если ***ни одно из них*** не является более возможным, чем другие.

Традиционным "источниками" равновозможных событий в теории вероятностей рассматривают бросание монеты и игральных костей (кубиков), вытаскивание карты (нескольких карт) из колоды.

Примеры равновозможных событий:
- выпадение орла или решки при броске монеты;
- выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
- извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

События называют ***несовместными***, если в одном и том же испытании появление одного из событий исключает появление других событий.
Пример несовместных событий:
- в результате броска монеты выпадет орёл;
- в результате броска монеты выпадет решка.

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот - либо орёл, либо решка), поэтому данные события и называются ***несовместными***. При бросании монеты ***мы всегда имеем два*** возможных события. И только их, никаких других.

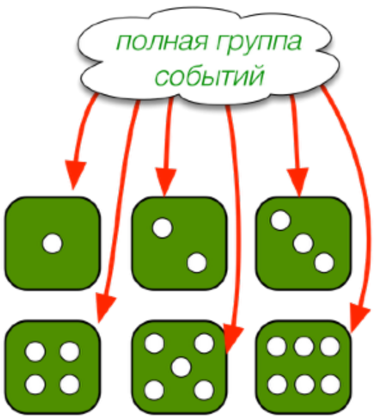
Два события называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит. Вот пример: бросаем монету: событие A_0 - выпадает "орёл"; событие A_1 - выпадает "решка"; события A_0 и A_1 - противоположны (либо "орёл", либо "решка"). Обозначается: $A_0 = \overline{A_1}$ или $A_1 = \overline{A_0}$.

Ещё одно важное понятие - ***элементарное событие***. Элементарное событие - событие, которое нельзя "разложить" на другие события (то есть "проще" события не бывает).
Элементарными событиями в случае бросания монеты являются выпадение либо орла, либо решки. В случае бросания кубика - выпадение либо 1, либо 2, либо 3, либо 4, либо 5, либо 6. ***В результате любого однократного испытания реализуется элементарное событие.***
В процессе проведения испытаний нас могут интересовать не только элементарные события, но и их ***комбинации***. Если мы скажем: "Нас интересуют события, когда в результате бросания кубика выпадают только чётные цифры", то мы сформулируем критерий для ***составного события***. Для реализации этого составного события подходят реализации трёх элементарных событий: выпадение цифр 2, 4 и 6. То есть *под составным событием подразумевается наша интерпретация результатов реализаций одного (нескольких) элементарных событий или* ***комбинация*** *(опять же - нами придумываемая) нескольких элементарных событий.*

- Выпадение орла или решки - *элементарные противоположные несовместные равновозможные* события.
- Выпадение чётной цифры и выпадение нечётной цифры при бросании кубика *составные противоположные несовместные равновозможные* события.
- Выпадение цифры 3 и выпадение нечётной цифры при бросании кубика *совместные* события.
- Выпадение цифры 2 и выпадение цифры 3 при бросании кубика *элементарные несовместные равновозможные* события.
- Выпадение цифры 2 и выпадение нечётной цифры при бросании кубика *несовместные* события.
- Выпадение чётной цифры при бросании кубика - это *составное* событие - *комбинация* трёх элементарных событий: выпадание 2, 3, 6.

Множество несовместных событий образуют ***полную группу событий***, если в результате отдельно взятого испытания обязательно появится одно из этих событий.



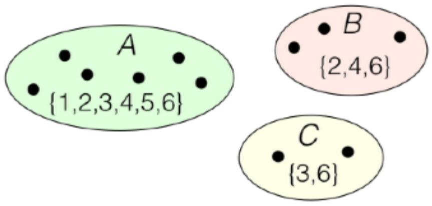
События	Какие	Примеры
равновозможные	события возможны в равной степени	выпадение любой из шести цифр на кубике
несовместные	появление одного события исключает другое	выпадение на кубике 3 исключает выпадение на кубике чётного числа
совместные	появление одного события ***не*** исключает другое	выпадение на кубике 3 не исключает выпадение на кубике нечётного числа
противоположные	возможно либо это событие, либо противоположное	либо выпадение на кубике чётного числа, либо нечётного числа
элементарные	"проще" события не бывает	выпадение на кубике 5
составные	им соответствует ***комбинация*** элементарных событий	выпадение на кубике чётного числа
группа событий	в результате любого испытания появится одно из событий	Монета: выпадение орла и решки; Кубик: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Удобным наглядным средством при разговоре о событиях являются диаграммы Эйлера.

Вернёмся к игральному кубику.

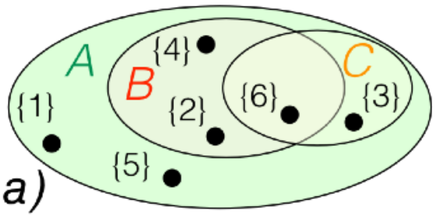
- Назовём событием А выпадение ***любого*** числа после бросания кубика. Множество всех шести элементарных событий при бросании кубика {1,2,3,4,5,6} является множеством событий А.

- Назовём событием В выпадение ***чётного*** числа после бросания кубика. Множество из трёх событий {2,4,6} является множеством событий В.
- Назовём событием С выпадение ***числа, делящегося на 3***. Множество из двух событий {3,6} является множеством событий В.



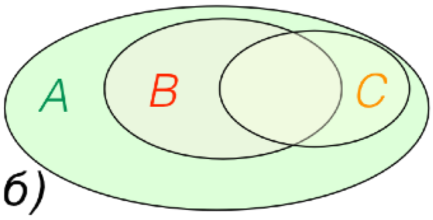
Графически это можно представить так:
Можно рисовать овалы (как здесь), кружочки, прямоугольники, ромбики - суть от этого не меняется.

Но это пока только картинка, графически отражающая, сказанные выше слова. Но если подумать, то, например, элементарное событие {3} (выпадение тройки) принадлежит и событию А, и событию С, а элементарное событие {6} принадлежит и событию А, и событию В, и событию С. Это как-то можно изобразить графически? Да, можно. И в этом состоит достоинство диаграмм Эйлера.



а)

На рисунке а) взаимное расположение множеств-диаграмм событий с указанием какому множеству принадлежит какое из элементарных событий и приведено. Графически это полностью описывает текстовое описание событий А, В и С.

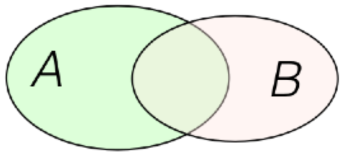


б)

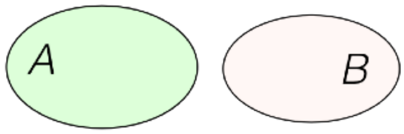
Чаще необязательно (а иногда и просто невозможно) указывать все "малые" события, образующие "большие", и тогда диаграмма принимает вид как на рисунке б).

Ведь удобно же!

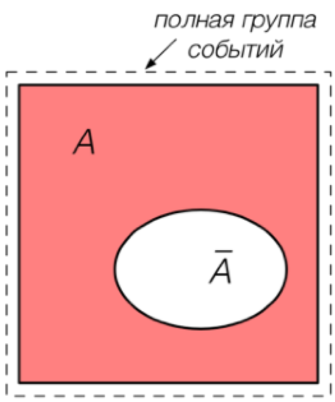
А как с помощью диаграмм Эйлера изобразить некоторые из уже знакомых нам видов событий? Попробуем.



Вот так можно изобразить ***совместные*** события. Множества "малых" событий (исходов) у них пересекаются.



Вот так можно изобразить ***несовместные*** события. Множества исходов у них не пересекаются.



А ***противоположные*** события? Вот так. Противоположные события являются несовместными. Противоположные образуют ***полную группу событий*** и может произойти либо A, либо $\bar{A}$ ("либо песни, либо танцы") - третьего не дано. А про несовместные события известно лишь то, что они не могут произойти одновременно. Но может произойти какое-либо третье.

Также принято говорить: противоположное A событие - это ***отрицание*** A.

В дальнейшем мы будем пользоваться диаграммами Эйлера. Они помогают и в решении задач.

Если поразмышлять, то очень многое в теории вероятностей (по крайней мере - в начальных её разделах) нам интуитивно понятно и привычно на бытовом уровне. Просто строгие формулировки могут слегка смутить. Ну это нормально.

Сумма и произведение событий (алгебра событий)

По сути, на этих трёх операциях - ***отрицании***, ***сложении*** и ***произведении*** событий строится теория вероятностей.

Суммой *двух событий A и B* называется событие $A + B$, которое состоит в том, что наступит ***или*** событие A ***или*** событие B ***или*** оба события одновременно. В том случае, если события ***несовместны***, последний вариант отпадает, то есть может наступить ***или*** событие A ***или*** событие B.

Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых. Например, событие $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ состоит в том, что произойдёт ***хотя бы одно из событий*** A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а если события ***несовместны*** - ***то одно и только одно событие*** из этой суммы: или A_1, или A_2, или A_3, или A_4, или A_5, или A_6.

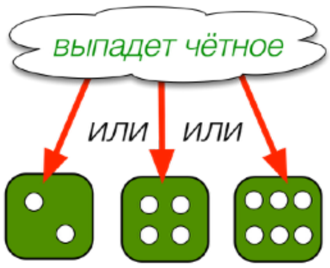
Примеры.

Обозначим события при бросании кубика: B_1 - в результате броска выпадает 1 очко; B_2 - выпадает 2 очка; B_3 - 3 очка; B_4 - 4 очка; B_5 - 5 очков; B_6 - 6 очков. Все эти события элементарные, равновозможные и ***несовместные***.

Событие $\overline{B_5} = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_6$ (при бросании кубика не выпадает 5 очков) состоит в том, что выпадет или 1, или 2, или 3, или 4, или 6 очков (помните: $\overline{B_5}$ - это событие, противоположное событию B_5).

Событие $B_{1,2} = B_1 + B_2$ (выпадет не более двух очков) состоит в том, что выпадет 1 или 2 очка.

Событие $B_{ч} = B_2 + B_4 + B_6$ (выпадет чётное число очков) состоит в том, что выпадет или 2 или 4 или 6 очков.



"или" -> сумма

Произведением *двух событий A и B* называют событие $A \cdot B$, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение $A \cdot B$ означает, что при некоторых обстоятельствах наступит и событие A, и событие B. Аналогичное утверждение справедливо и для бОльшего количества событий, так, например, произведение $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5$ подразумевает, что при определённых условиях произойдёт и событие A_1, и событие A_2, и событие A_3, и событие A_4, и событие A_5.

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются ***две*** монеты и следующие события:
- A_1 - на 1-й монете выпадет орёл;
- $\overline{A_1}$ - на 1-й монете выпадет решка (обозначили как противоположное предыдущему событие);
- A_2 - на 2-й монете выпадет орёл;
- $\overline{A_2}$ - на 2-й монете выпадет решка (обозначили как противоположное предыдущему событие).

Тогда:

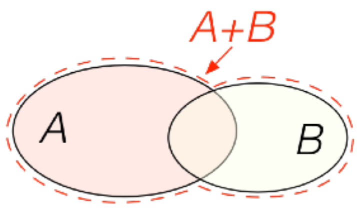
Событие $A_1 \cdot A_2$ состоит в том, что на обеих монетах (на 1-ой ***и*** на 2-ой) выпадет орёл;
Событие $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й ***и*** на 2-й) выпадет решка;
Событие $A_1 \cdot \overline{A_2}$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл ***и*** на 2-й монете решка;
Событие $\overline{A_1} \cdot A_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка ***и*** на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что события $A_1 \cdot A_2$, $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$, $A_1 \cdot \overline{A_2}$, $\overline{A_1} \cdot A_2$ ***несовместны*** (т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки) и образуют ***полную группу*** (поскольку учтены все возможные исходы броска двух монет). Давайте просуммируем данные события: $A_1 \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} + A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$. Как интерпретировать эту запись? Очень просто - умножение означает логическую связку ***И***, а сложение - ***ИЛИ***. Таким образом, сумму легко прочитать понятным человеческим языком: «выпадут два орла или две решки или на 1-й монете выпадет орёл и на 2-й решка или на 1-й монете выпадет решка и на 2-й монете орёл».

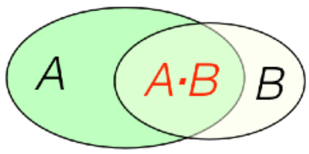
Это был пример, когда в одном испытании задействовано несколько объектов, в данном случае - две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема - это повторные испытания, когда, например, один и тот же кубик бросается 3 раза подряд.

"и" -> произведение

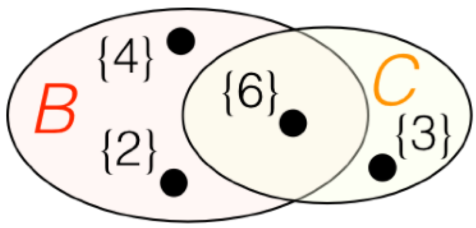
Проиллюстрируем сумму и произведение событий диаграммами Эйлера.



Вот так на диаграмме будет выглядеть сумма событий A и B.



А вот так - произведение.



Если вернуться к нашему примеру с игральным кубиком, где:

- событие A - выпадение ***любого*** числа;
- событие B - выпадение ***чётного*** числа;
- событие C - выпадение ***числа, делящегося на 3***,

то событие B+C - это выпадение чисел {2,3,4,6}, а событие B·C - это выпадение числа {6}.

Вероятность события

Классическое определение вероятности[1]:
Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где n - общее число всех ***равновозможных элементарных*** исходов этого испытания, которые образуют ***полную группу событий***; m - количество элементарных исходов, ***реализующих*** событие A (благоприятных исходов).

Поясню на примере бросания кубика. В результате бросания кубика (бросание и есть *испытание*) может появиться $n = 6$ *элементарных равновозможных* исходов, образующих *полную группу событий*. Пусть нас интересуют три события:

A - выпадает 5;
B - выпадает чётное число;
C - выпадает число, делящееся на 3.

Тогда:
$P(A) = \frac{1}{6}$ - только один благоприятный элементарный исход (выпадение 5) реализует A;
$P(B) = \frac{3}{6}$ - 3 благоприятных элементарных исхода (выпадение 2 или 4 или 6) реализуют B;
$P(C) = \frac{2}{6}$ - 2 благоприятных элементарных исхода (выпадение 3 или 6) реализуют C.

Вероятности выражаются в долях единицы (в теории вероятностей выражать вероятность в процентах не принято. В прогнозе погоды - пожалуйста.).

Очевидно, что для любого события A: $0 \leq P(A) \leq 1$[2].
Если $P(A) = 0$, то событие A является ***невозможным***;
Если $P(A) = 1$, то событие A является ***достоверным***;
Если $0 < P(A) < 1$, то событие A является ***случайным***.

Важная теорема:

Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна 1.

Если события образуют полную группу, то со 100%-й вероятностью какое-то из них произойдёт.

Важное следствие: *сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1.*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

!

[1] *Существуют ещё геометрическое и статистическое определения вероятности.*

[2] *Если в ходе решения задачи у вас появилось какое-то другое значение вероятности - ищите ошибку.*

Давайте решим задачки на классическое определение вероятности. *Для решения таких задач очень полезно освежить знания по Комбинаторике: понятия перестановок, размещений и сочетаний, а также комбинаторные правила выбора комбинаций: правила сумм и произведений.*

Задача: Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них - ноль, а другая - нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Решение: Сначала найдём общее количество возможных исходов. Оно равно количеству вариантов набора двух последних цифр. Их можно перечислить: 01, 03, 05, 07, 09, 10, 30, 50, 70, 90 - всего 10 вариантов. А благоприятный исход один - верный номер. По классическому определению $p = \frac{1}{10} = 0{,}1$ - вероятность того, что абонент наберёт правильный номер.

Задача: Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:

а) пять очков;

б) не более 4-х очков;

в) от 3 до 9 очков включительно.

Решение: Сначала найдём общее количество возможных исходов. Грань каждого кубика может выпасть 6-ю способами. Тогда всего возможных комбинаций выпадения граней двух кубиков - 36 (по правилу умножения комбинаций из комбинаторики[3]; мы считаем упорядоченные пары). Будем записывать результат бросания двух кубиков как упорядоченную пару чисел (a, b), где a - цифра, выпавшая на первом кубике, b - на втором кубике.

а) Благоприятные исходы: (1,4); (4,1); (2,3); (3,2) - всего 4.

По определению $p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

б) Благоприятные исходы: (1,1); (1,2); (2,1); (1,3); (3,1); (2,2) - всего 6.

По определению $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

в) Напрямую считать количество пар с благоприятным исходом можно, но долго. Рациональнее считать количество пар с противоположным исходом.

Очевидно, что наименьшую сумму (2) даёт пара (1,1), а наибольшую (12) - пара (6,6). Если наше событие A - выпадение в сумме от 3 до 9 очков включительно, то противоположное событие $\bar{A}$ - выпадение в сумме либо 2, либо 10, либо 11, либо 12. Количество благоприятных исходов для события $\bar{A}$: (1,1); (4,6); (6,4); (5,5); (5,6); (6,5); (6,6) - всего 7. Тогда по определению $P(\bar{A}) = \frac{7}{36}$. Но $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ и

$P(A) = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$.

Задача: Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на два из трёх вопросов?

---

[3] *Смотри Историю про Комбинаторику.*

Решение: Итак, 25 вопросов "хороших" и 35 - "плохих" (всего 60).
Общее количество возможных исходов - это сколькими способами можно выбрать 3 вопроса из 60. Так это же ***количество сочетаний***[4] из 60 по 3! Точно. $C_{60}^{3} = \dfrac{60!}{57! \cdot 3!} = 34220$ способов.
Считаем благоприятные исходы. А благоприятный исход - это выбрать [три "хороших" вопроса] ***или*** [2 "хороших" ***и*** один "плохой"].

Сколькими способами можно выбрать [три "хороших" вопроса]: $C_{25}^{3} = \dfrac{25!}{22! \cdot 3!} = 2300$
Сколькими способами можно выбрать [2 "хороших" ***и*** один "плохой"]?

Два "хороших" можно выбрать $C_{25}^{2} = \dfrac{25!}{23! \cdot 2!} = 300$ способами.

Один "плохой" можно выбрать $C_{35}^{1} = \dfrac{35!}{34! \cdot 1!} = 35$ способами.

[2 "хороших" ***и*** один "плохой"] (поскольку стоит "и", то используем правило умножения комбинаций из комбинаторики) можно выбрать $C_{25}^{2} \cdot C_{35}^{1} = 10500$ способами.

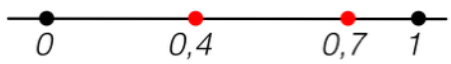
[три "хороших" вопроса] ***или*** [2 "хороших" ***и*** один "плохой"] (поскольку стоит "или", то используем правило сложения комбинаций) можно выбрать $C_{25}^{3} + C_{25}^{2} \cdot C_{35}^{1} = 12800$ способами.

Тогда по определению $p = \dfrac{12800}{34220} \approx 0{,}37$

Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности оказывается эффективным для решения целого спектра задач, но с другой стороны, обладает и рядом ограничений. Одним из таких ограничений является тот факт, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов.

Пример: На отрезок [0; 1] наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток [0,4; 0,7] ?

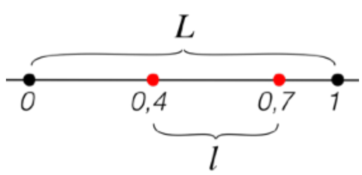


Поскольку на отрезке бесконечно много точек, то здесь нельзя применить формулу $P(A) = \dfrac{m}{n}$ (бесконечно большое n) и поэтому на помощь приходит другой подход, называемый ***геометрическим определением вероятности***. Всё очень похоже.

Вероятность наступления события A в испытании равна отношению $P(A) = \dfrac{g}{G}$, где G - геометрическая мера, выражающая общее число всех ***возможных*** и ***равновозможных*** исходов этого испытания; g - мера, выражающая количество благоприятных событию A исходов.

На практике в качестве такой геометрической меры чаще всего выступает *длина или площадь*.

Тогда в нашем примере событие A - брошенная на отрезок [0; 1] точка

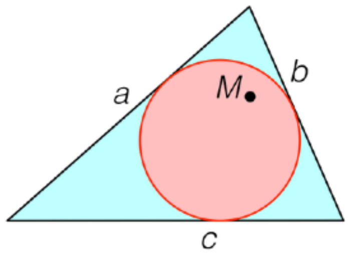


[4] *Смотри Историю про Комбинаторику.*

попала в промежуток [0,4; 0,7]. Очевидно, что общее число исходов выражается длиной бОльшего отрезка: $L = 1 - 0 = 1$, а благоприятные событию исходы - длиной вложенного отрезка $l = 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3$.

По геометрическому определению вероятности: $P(A) = \dfrac{l}{L} = \dfrac{0{,}3}{1} = 0{,}3$.

Порешаем задачки на геометрическое определение вероятности.



Задача: В треугольник со сторонами $a = 9, \quad b = 13, \quad c = 16$ вписан круг. Точка М произвольно ставится в треугольник. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг.

Решение: Поскольку точка ставится в треугольник, а круг лежит внутри, то общему числу исходов соответствует площадь треугольника S, а множеству благоприятных исходов - площадь вписанного круга S_K. По формуле Герона и по формуле площади треугольника через радиус вписанной окружности: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ - полупериметр; r - радиус вписанной окружности. Подставляем-вычисляем:

$p = 19; \quad S = 6\sqrt{95}; \quad r = \dfrac{6\sqrt{95}}{19}$. $S_K = \pi \cdot r^2 = \dfrac{180\pi}{19}$.

По геометрическому определению вероятности: $p = \dfrac{S_K}{S} = \dfrac{30\pi}{19\sqrt{95}} \approx 0{,}51$

Задача: Две грузовые машины могут подойти на погрузку в промежуток времени от 19:00 до 20:30. Погрузка первой машины длится 10 минут, второй - 15 минут. Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?

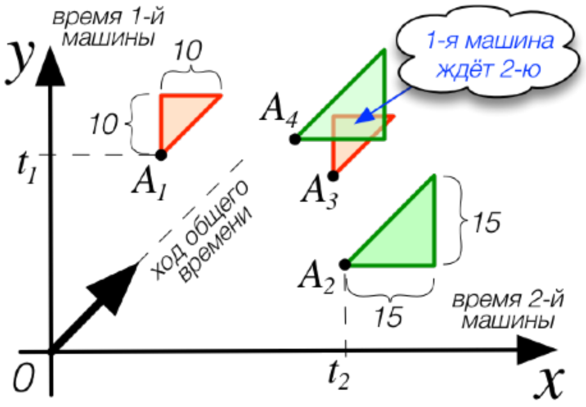
Решение: Классическое определение вероятности в этой задаче не работает. Будем использовать геометрическое. Как нам перевести условия задачи на язык геометрии? Давайте подробно обсудим. Подобного рода задачи встречаются часто.

В задаче все условия сформулированы в терминах времени. Вот с временами и предстоит разбираться. Обе машины независимы по времени приезда к погрузке - они могут приехать на погрузку в любом порядке в любые моменты времени в течение полутора часов (90 минут) (даже не важно, что "от 19:00 до 20:30", - важно то, что в течение 90 минут). Будем вести счёт времени в минутах - так удобнее.

Рассмотрим прямоугольную систему координат, в которой по оси y будем откладывать "время активности" первой машины, а по оси x - второй. Неожиданно? По обеим осям время? Ну да, только это - независимые времена. И то, что мы откладываем "время активности" каждой из машин по независимым осям отражает факт независимости их (машин) временнОго поведения.

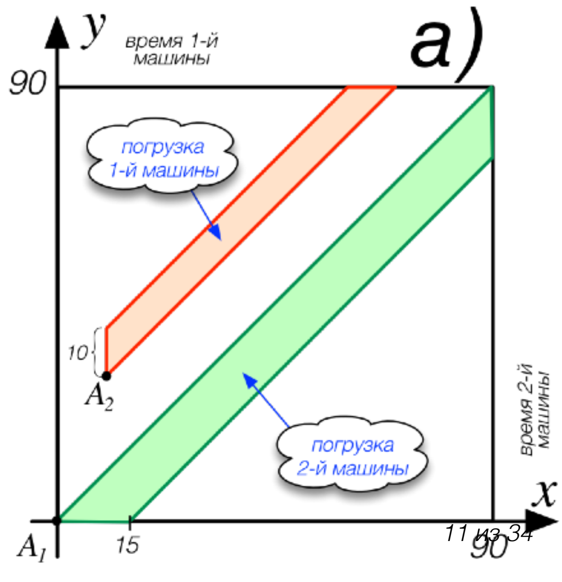
Любая точка с координатами (x, y) соответствует некоему событию в момент y для первой машины и в момент x для второй. Но пока эти времена абстрактны.

Скорости течения времен для каждой из машин одинаковы по осям, поэтому можно говорить о "ходе общего времени" - общее время идёт под углом 45^0 к каждой из осей.



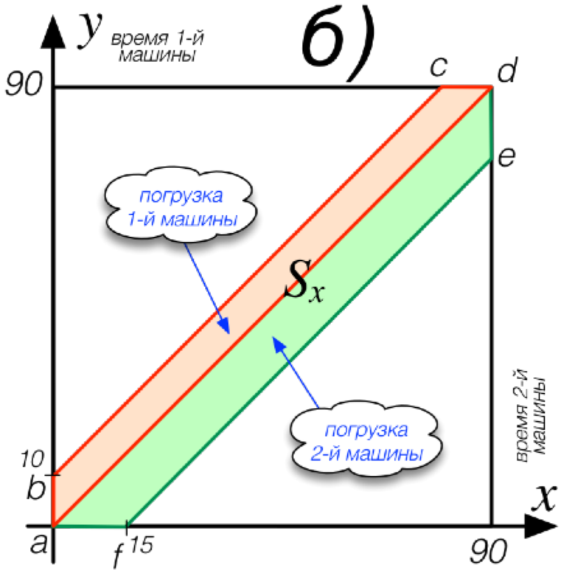
Пусть в момент t_1 (по оси y) произошло событие A_1: первая машина приехала на погрузку (смотри рисунок). Это значит, что 10 минут своего времени первая машина будет грузиться, но это же значит, что 10 минут погрузка будет занята для второй машины - вторая машина в этом интервале грузиться не сможет. Чувствуете, мы нащупываем условия ожидания машин на погрузке. А занятость погрузки первой машиной отображается положением и площадью рыженького треугольника A_1 (его площадь равна $\dfrac{10 \cdot 10}{2} = 50$). Аналогично, в момент t_2 (по оси x) произошло событие A_2: вторая машина приехала на погрузку. 15 минут своего времени вторая машина будет грузиться, но это же значит, что 15 минут погрузка будет занята для первой машины. А занятость погрузки второй машиной отображается положением и площадью зелененького треугольника A_2 (его площадь равна $\dfrac{15 \cdot 15}{2} = 112{,}5$). Пока всё понятно. Машины грузятся и друг друга не ждут. Но вот произошли события A_3 и A_4: обе машины почти одновременно (по общему времени) приехали на погрузку. Вторая - чуть раньше (по общему времени). Поэтому вторая начала грузиться, а первая вынуждена ждать. А построенные нами по тем же правилам треугольнички пересекаются в плоскости $x0y$. Теперь понятно как перевести на геометрический язык условие ожидания: если построенные по вышеописанным правилам "треугольники погрузки" геометрически пересекаются в плоскости $x0y$ (машины пересекаются по времени), то возникает ситуация ожидания: раньше (по общему времени) приехавшая машина грузится, другая ждёт.

Ага, теперь можно нарисовать более осмысленную картинку.
В координатах $x0y$ построим квадрат со стороной 90 (минут) как на рисунке. Любая точка внутри этого квадрата с координатами (x, y) соответствует общему исходу - появлению первой машины в момент y, а второй - в момент x. Общему множеству исходов будет соответствовать площадь всего квадрата $S = 90^2 = 8100$ (можно было бы написать "квадратных минут", но как-то это очень смело, пусть будут "условные квадратные единицы").



К нулю нашей системы координат привяжем событие A_1: приезд второй машины на погрузку (мы могли бы привязаться и к моменту приезда первой - это не имеет значения по условиям задачи). То есть считаем, что вторая машина приехала на погрузку первой. В дальнейшем вы увидите, что точно так же мы могли считать приезд первой машины раньше. Нам нужно привязать к нулю приезд либо первой, либо второй машины - от момента этого приезда и отсчитываются 90 минут. Но главное в этой привязке другое. Нам нужно рассчитать предельный общий случай.

Что такое предельный общий случай? Ну вот посмотрите. Если вторая машина приедет на погрузку в момент (0,0), успешно погрузится за 15 минут и в момент (15,15) освободит погрузку, а первая машина приедет в момент (50,50), за 10 минут погрузится и освободит погрузку в момент (60,60), то никто никого ждать не будет. Это частный случай. А предельный общий случай таков: вторая машина ***может*** приехать на погрузку первой в ***любой*** (не конкретный, а ***любой***) момент от 0 до 90 по своему времени или от (0,0) до (90,90) по общему времени. Множеству исходов, соответствующих "погрузка занята второй машиной", соответствует площадь зелененькой трапеции. С предельным общим случаем для второй машины разобрались.



Теперь вспомним про первую машину. Для неё тоже можно построить свою трапецию (рыженькую), соответствующую множеству исходов "погрузка занята первой машиной". Построенная на рисунке а) рыженькая трапеция - это лишь частный случай из всех возможных. Частность его в том, что первая машина появляется на погрузке с событием A_2, которое произошло через некоторое время после 0. А вот рыженькая трапеция, построенная на рисунке б) и будет соответствовать предельному общему случаю "погрузка занята первой машиной".

Заметьте, что при таком способе построения и площадь зелененькой, и площадь рыженькой трапеций являются максимальными, вписанными в квадрат 90x90. С предельными общими случаями для обеих машин разобрались.

Что у нас спрашивают в задаче? "Какова вероятность того, что одной машине придется ждать окончания погрузки другой?" А что значит "ждать" на геометрическом языке? Выше мы поняли, что "ждать" наступает тогда, когда пересекаются геометрические фигуры, соответствующие исходам "погрузка занята первой машиной" и "погрузка занята второй машиной". Пересекаются хоть одной точкой. А в пределе - касаются. Поэтому мы смело можем утверждать, что множеству исходов "машины ждут друг друга на погрузке" соответствует площадь зелененькой и рыженькой трапеций на рисунке б) - площадь шестиугольника ***abcdef*** S_x.

Я уже столько наговорил, что опущу простейшие геометрические выкладки при вычислении S_x. Приведу результат: $S_x = 2087{,}5$.

Тогда искомая вероятность будет: $p = \dfrac{S_x}{S} = \dfrac{2087{,}5}{8100} \approx 0{,}26$.

=====================

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Напомню: События называют ***несовместными***, если в одном и том же испытании появление одного из событий исключает появление других событий.

Пример: игральный кубик с полной группой событий $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, состоящих в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков соответственно. Все эти события - несовместны (либо-либо).

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

Вероятность появления одного из двух ***несовместных*** событий *A* или *B* (*без разницы какого*), равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Аналогично и для бОльшего количества несовместных событи

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Напоминаю:

Суммой двух событий** A **и** B* называется событие $A + B$, которое состоит в том, что наступит ***или событие A ***или*** событие B ***или*** оба события одновременно. В том случае, если события ***несовместны***, последний вариант отпадает, то есть может наступить ***или*** событие A ***или*** событие B.

"или" -> сумма

Разбираться с этим лучше всего на задачах.

Задача: Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого ***или*** третьего склада.

Решение: "***или***" указывает на сумму двух событий. Всего получено магазином 4+5+7+4=20 ящиков.

- вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада: $p_1 = \dfrac{4}{20} = 0{,}2$;
- вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада: $p_3 = \dfrac{7}{20} = 0{,}35$

Выбор ящиков с 1-го и 3-го складов - события несовместные, поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий: $p = p_1 + p_3 = 0{,}55$

Зависимые и независимые события

Cобытия являются ***независимыми***, если вероятность наступления ***любого из них не зависит*** от появления/непоявления остальных событий рассматриваемого множества (во всех возможных комбинациях).

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

> Вероятность совместного появления ***независимых*** событий *A* и *B* равна произведению вероятностей этих событий:
>
> $$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Совместное появление - это произведение событий. Напоминаю:
Произведением двух событий A ***и*** B называют событие $A \cdot B$, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение $A \cdot B$ означает, что при некоторых обстоятельствах наступит и событие A, и событие B.

"и" -> произведение

Разбираемся на задаче.

> Задача: В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение: Вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о ***независимых*** событиях.
Рассмотрим следующие независимые события:

S_1 - из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;
S_2 - из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;
S_3 - из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:
$P(S_1) = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$; $P(S_2) = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$; $P(S_3) = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$ - соответствующие вероятности.
Интересующее нас событие (из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь ***и*** из 2-го стандартная ***и*** из 3-го стандартная) выражается произведением $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$ событий.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:
$P(S_1 \cdot S_2 \cdot S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$ - вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Событие X называют ***зависимым***, если его вероятность $P(X)$ *зависит* от одного или бОльшего количества событий, которые уже произошли.

Пример: Событие B - на экзамене студенту достанется простой билет. Если идти не самым первым, то событие B будет ***зависимым***, поскольку его вероятность $P(B)$ будет зависеть от того, какие билеты уже вытянули однокурсники.

Как определить зависимость/независимость событий? Иногда об этом прямо сказано в условиях задачи, но чаще всего приходится проводить самостоятельный анализ. Какого-то однозначного ориентира тут нет, и факт зависимости либо независимости событий вытекает из естественных логических рассуждений.

Задача: В конверте находится 10 лотерейных билетов, среди которых 3 выигрышных. Из конверта последовательно извлекаются билеты. Найти вероятности того, что:

а) 2-й извлечённый билет будет выигрышным, если 1-й был выигрышным;
б) 3-й будет выигрышным, если предыдущие два билета были выигрышными;
в) 4-й будет выигрышным, если предыдущие билеты были выигрышными.

Решение: Рассмотрим события: A_1, A_2, A_3, A_4 - при 1-й, 2-й, 3-й и 4-й попытках соответственно будет извлечен выигрышный билет.

а) Пусть событие A_1 состоялось. Тогда в конверте осталось 9 билетов, среди которых 2 выигрышных. По классическому определению: $P_{A_1}(A_2) = \dfrac{2}{9}$ - вероятность того, что 2-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого извлечён выигрышный билет.

б) Если произошли события A_1, A_2, то в конверте осталось 8 билетов, среди которых 1 выигрышный. По классическому определению: $P_{A_1A_2}(A_3) = \dfrac{1}{8}$ - вероятность того, что 3-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого было извлечено два выигрышных билета.

в) Если произошли события A_1, A_2, A_3, то в конверте не осталось выигрышных билетов и вероятность того, что 4-й выбранный билет будет выигрышным при условии, что до этого были извлечены три выигрышных билета, $P_{A_1A_2A_3}(A_4) = 0$.

В этой задаче требовалось найти лишь ***условные*** вероятности, при этом ***предыдущие события считались достоверно состоявшимися***. Но ведь в действительности и они являются случайными! На практике гораздо чаще требуется отыскать вероятность ***совместного появления*** зависимых событий.

Вы заметили, что зависимые события возникают в тех случаях, когда осуществляется некоторая цепочка действий. Однако сама по себе последовательность действий ещё не гарантируют зависимость событий. Пусть, например, студент наугад отвечает на вопросы какого-нибудь теста – данные события хоть и происходят одно за другим, но незнание ответа на один вопрос никак не зависит от незнания других ответов.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

Вероятность совместного появления двух ***зависимых*** событий *A* и *B* равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Задача: В урне 4 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу один за другим извлекают два шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что:

а) оба шара будут белыми;
б) оба шара будут чёрными;
в) сначала будет извлечён белый шар, а затем – чёрный.

Решение: Обратите внимание на уточнение "не возвращая их обратно". Это дополнительно подчёркивает тот факт, что события ***зависимы***. В случае возвращения шаров обратно в урны вероятности извлечения чёрного и белого шара меняться не будут, а в такой задаче уже следует руководствоваться *теоремой умножения вероятностей независимых событий.*

Всего в урне 11 шаров.
а) Рассмотрим события: A - первый шар будет белым, B - второй шар будет белым. Найдём вероятность события $A \cdot B$, состоящего в том, что 1-й шар будет белым и 2-й белым.

По классическому определению вероятности: $P(A) = \dfrac{4}{11}$. Предположим, что белый шар извлечен, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых, поэтому: $P_A(B) = \dfrac{3}{10}$ - вероятность извлечения белого шара во 2-м испытании при условии, что до этого был извлечён белый шар. По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \dfrac{4}{11} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{6}{55}$ - вероятность того, что оба шара будут белыми.

б) Найдём вероятность события $\bar{A} \cdot \bar{B}$, состоящего в том, что 1-й шар будет черным и 2-й черным.

По классическому определению вероятности: $P(\bar{A}) = \dfrac{7}{11}$ - вероятность того, что в 1-м испытании будет извлечён чёрный шар. Пусть извлечён чёрный шар, тогда в урне останется 10 шаров, среди которых 6 чёрных, следовательно: $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ - вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар при условии, что до этого был извлечен чёрный шар.
По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{21}{55}$ - вероятность того, что оба шара будут чёрными.

в) Найдём вероятность события $A \cdot \bar{B}$ (сначала будет извлечён белый шар *и* затем чёрный).

После извлечения белого шара (с вероятностью $P(A) = \dfrac{4}{11}$) в урне останется 10 шаров, среди которых 3 белых и 7 чёрных, таким образом: $P_A(\bar{B}) = \dfrac{7}{10}$ - вероятность того, что во 2-м испытании будет извлечён чёрный шар при условии, что до этого был извлечен белый шар.
По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$P(A \cdot \bar{B}) = P(A) \cdot P_A(\bar{B}) = \dfrac{4}{11} \cdot \dfrac{7}{10} = \dfrac{14}{55}$ - искомая вероятность.

Ещё одна задача на использование нескольких вариантов событий.

> Задача: Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует настройки, равна 0,3, второй – 0,75, третий – 0,4. Найти вероятность того, что в течение смены:

а) все станки потребуют настройки;
б) только один станок потребует настройки;
в) хотя бы один станок потребует настройки.

Решение: По условию: $p_1 = 0{,}3; \quad p_2 = 0{,}75; \quad p_3 = 0{,}4$ - вероятности того, что в течение смены соответствующие станки потребуют настойки. Тогда вероятности того, что они не потребуют настройки: $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}7$; $q_2 = 1 - p_2 = 0{,}25$; $q_3 = 1 - p_3 = 0{,}6$.

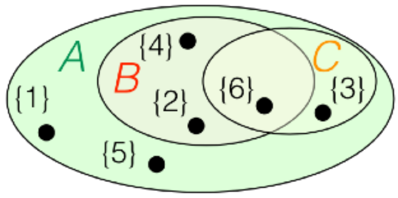
а) По теореме умножения вероятностей независимых событий: $p_{(3)} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}09$ - вероятность того, что в течение смены все три станка потребуют настройки.
б) Событие "В течение смены только один станок потребует настройки" состоит в трёх несовместных исходах:

1-й станок потребует *и* 2-й станок не потребует *и* 3-й станок не потребует
ИЛИ: 1-й станок не потребует *и* 2-й станок потребует *и* 3-й станок не потребует

ИЛИ: 1-й станок не потребует ***и*** 2-й станок не потребует ***и*** 3-й станок потребует.
По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей независимых событий: $p_{(1)} = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = 0{,}43$ - вероятность того, что в течение смены только один станок потребует настройки.
в) Вычислим вероятность $p_{(0)} = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}105$ того, что станки не потребуют настройки, а затем вероятность противоположного события: $p_{(1,2,3)} = 1 - p_{(0)} = 0{,}895$ - того, что хотя бы один станок потребует настройки.

Задача: А после всего сказанного давайте вернёмся к нашему простому примеру с игральным кубиком, в котором:

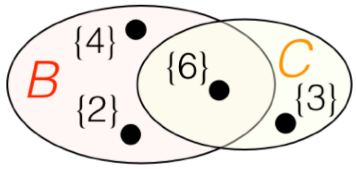
- событие A - выпадение ***любого*** числа;
- событие B - выпадение ***чётного*** числа;
- событие C - выпадение ***числа, делящегося на 3.***



Спрашивается, какова вероятность того, что в результате бросания не выпадет чисел 1 и 5?

Решение: Нам поможет диаграмма Эйлера.
Назовем событием D невыпадение в результате броска ни 1, ни 5. То есть D - это то событие, вероятность которого мы ищем. Смотрим на диаграмму и видим, что событие D есть не что иное, как событие B+C. То есть *P(D)=P(B+C)*.

Мы можем легко и просто найти P(B+C)? Пока нет. Почему? Потому, что мы знаем теорему сложения вероятностей двух ***несовместных*** событий. Но наши события B и C являются ***совместными*** (выпадет 6 и сразу реализуются события и B и C). Как быть? Нам поможет геометрическая аналогия.



Множества исходов событий B и C пересекаются - оттого-то они и являются совместными. А давайте считать геометрическим аналогом вероятности события площадь фигуры, изображающей это событие на диаграмме Эйлера (точнее - количество исходов в этой фигуре). Ну давайте, только что это нам даст? А вот что: тогда по этой аналогии площадь фигуры, являющейся суммой двух событий, будет аналогична вероятности суммы событий. То есть в нашем случае вероятность суммы двух совместных событий B+C аналогична суммарной площади двух пересекающихся фигур: фигуры события B (фB) и фигуры события C (фC). Но суммарная площадь двух пересекающихся фигур фB и фC равна: площадь фB + площадь фC - площадь пересечения фB и фC (минус нужен для того, чтоб два раза не считать площадь пересечения). Но площадь пересечения по той же аналогии эквивалентна вероятности произведения событий B и C! Тогда мы можем утверждать: P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B·C). Но поскольку события B и C ***независимы***, то *P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B)·P(C)*. Математическими методами это доказывается строго. Геометрическая аналогия нам помогла. Тогда искомая *P(D)=P(B+C)=P(B)+P(C)-P(B)·P(C).*

Ну а дальше совсем просто: $P(B) = \dfrac{1}{2}$; $P(C) = \dfrac{1}{3}$, откуда $P(D) = \dfrac{2}{3}$.

А вот теперь уже можно и сформулировать:

Теорема сложения вероятностей совместных независимых событий:

Вероятность появления одного из двух ***совместных независимых*** событий *A* или *B* (*без разницы какого*), равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

Вот сводные таблички операций алгебры событий и вероятностей для разного вида событий:

Алгебра событий (исходные события A и B)

	описание	обозначение
Отрицание	не A	$\bar{A}$
Сумма	или A или B или оба	$A + B$
Произведение	и A и B	$A{\cdot}B$

Формулы вероятностей

события A и B	формулы вероятностей
невозможные	$P(A)=P(B)=0$
достоверные	$P(A)=P(B)=1$
равновозможные	$P(A)=P(B)$
противоположные	$B = \bar{A}, \quad P(A) + P(\bar{A}) = 1$
несовместные	$P(A+B) = P(A) + P(B)$
несовместные	$P(A{\cdot}B) = 0$
совместные независимые	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A{\cdot}B)$
независимые	$P(A{\cdot}B) = P(A) \cdot P(B)$
зависимые	$P(A{\cdot}B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Схема Бернулли

Схема Бернулли описывает отдельный вид испытаний - испытания с двумя возможными исходами (бинарные испытания): бросание монеты с результатами "орёл"-"решка", студент на экзамене с результатами "ответил"-"не ответил", стрельба по мишени с результатами "попал"-"не попал" и т.д.

Рассмотрим n независимых повторений одного и того же испытания с двумя возможными исходами: "успехом" и "неудачей". Таким испытанием может быть подбрасывание монеты. Таким испытанием может быть любое испытание с двумя событиями: A и $\bar{A}$. Пусть вероятность "успеха" равна p, а вероятность "неудачи" равна q. $p + q = 1$ - ведь "успех" и "неудача" - это полная группа событий.

Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что в этих n повторениях произойдёт ровно k "успехов" (необязательно подряд).

Например, при n бросаниях монеты k раз выпадет "орёл". (*В случае бросания монеты* $p = q = \dfrac{1}{2}$)

Такую схему испытаний с двумя возможными исходами называют *схемой Бернулли* или *испытаниями Бернулли*.

Как найти эту $P_n(k)$ объясняет **Теорема Бернулли:**

Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k "успехов" в независимых повторениях одного и того же испытания вычисляется по формуле $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где p - вероятность "успеха" , $q = 1 - p$ - вероятность "неудачи" в отдельном испытани, C_n^k - число сочетаний из n по k (*вспоминаем Комбинаторику*).

Какова вероятность того, что при 50 бросаниях монеты "орёл" выпадет 40 раз?

Для монеты $p = q = \dfrac{1}{2}$.

Подставляем в формулу: $P_{50}(40) = C_{50}^{40} \cdot p^{40} \cdot q^{50-40} = \dfrac{50!}{(50-40)! \cdot 40!} \cdot (\dfrac{1}{2})^{40} \cdot (\dfrac{1}{2})^{10}$

После вычислений получаем $P_{50}(40) \approx 0{,}0000091$.

Ещё пример: каждый из четырёх приятелей выучил ровно 5 вопросов из 20 заданных к зачёту. На зачёте они отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

а) каждому достался тот вопрос, который он выучил;
б) никому не достался вопрос, который он выучил;
в) только одному из приятелей достался тот вопрос, который он не выучил;
г) хотя бы одному из приятелей достался тот вопрос, который он выучил.

Решение: "... отвечали в разных аудиториях и получали вопросы независимо друг от друга..." так настойчиво сформулировано, что ни у кого не остаётся сомнений: выбор приятелями вопросов - события независимые.

Если кому-то достался известный ему вопрос, то это "успех". Вероятность "успеха" у каждого из приятелей одинакова: $\dfrac{5}{20} = 0{,}25$. Поэтому можно считать, что мы имеем дело с *n = 4* испытаниями Бернулли с вероятностью "успеха" в отдельном испытании *p = 0,25*. Вероятность "неудачи" соответственно *q = 0,75*.

Отвечаем на вопросы задачи:

а) в этом случае *k = n = 4* и поэтому $P_4(4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^{4-4} = 0{,}25^4 \approx 0{,}004$

б) в этом случае *k = 0* и поэтому $P_4(0) = C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^{4-0} = 0{,}75^4 \approx 0{,}316$

в) в этом случае *k = 0* и поэтому $P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^{4-3} = 4 \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}047$

г) "хотя бы одному из приятелей достался тот вопрос, который он выучил" - это событие, противоположное тому, что никому из приятелей не достался вопрос, который он учил (как в п. б)), т. е. искомая вероятность равна $1 - P_4(0) = 1 - 0{,}75^4 \approx 0{,}684$.

У теоремы Бернулли есть следствие:

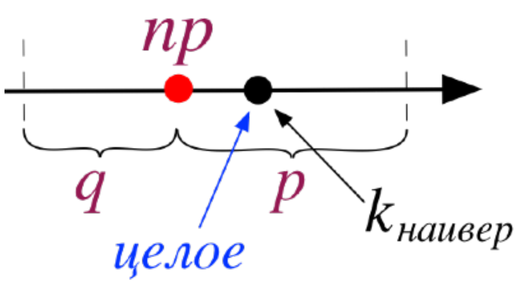
> Наиболее вероятное число "успехов" в n испытаниях Бернулли приближенно равно np (ближайшее целое), где p - вероятность "успеха" в отдельном испытании.

Каково наиболее вероятное число выпадения "орла" при бросании монеты 100 раз?

$100 \cdot \dfrac{1}{2} = 50$ раз, что вполне согласуется с житейским опытом.

Для того, чтобы найти наивероятнейшее число ***k****наивер* "успехов" в n испытаниях Бернулли с вероятностью "успеха" p, следует:

1) вычислить число np;
2) от числа np на координатной прямой отложить q влево и p вправо;
3) целое число, лежащее на отрезке $[np = q;\quad np + p]$ единичной длины и будет равно ***k****наивер*; если таких целых чисел два, то ***k****наивер* может равняться любому из них.



===============

Расскажем ещё о зависимых событиях: о формуле полной вероятности и о формулах Байеса. Эти темы не входят в школьную программу, но для полноты картины о них тоже следует упомянуть.

Формула полной вероятности

Рассмотрим зависимое событие A, которое может произойти лишь в результате осуществления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_x$, которые образуют ***полную группу***. Пусть известны их вероятности $P(B_1), P(B_2), P(B_3), \ldots, P(B_x)$ и соответствующие условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A), \ldots, P_{B_x}(A)$. Тогда вероятность наступления события A равна:

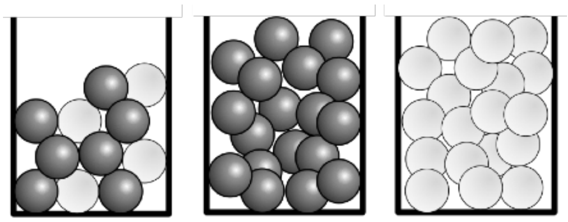
$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \ldots + P(B_x) \cdot P_{B_x}(A)$$

Под гипотезой понимается предположение о том, что событие произошло.

Понять и почувствовать эту формулу можно только на примере задачи.

Задача: Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные шары. Наудачу выбирается одна урна и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар чёрный?

Решение: Давайте хоть рисуночек нарисуем, а то у нас как-то всё сухонько - "одни букавки". Хотя рисунок-то в этой задаче совсем не помощник. Ну ладно, пусть глаз порадуется. Вот вам три урны. Ой, вторую с третьей урной перепутал! Ну ничего страшного.



Рассмотрим событие A - из наугад выбранной урны будет извлечён чёрный шар. Данное событие может произойти или не произойти в результате осуществления одной из следующих гипотез:

B_1 - будет выбрана 1-я урна;
B_2 - будет выбрана 2-я урна;
B_3 - будет выбрана 3-я урна.

Так как урна выбирается наугад, то выбор любой из трёх урн ***равновозможен,*** следовательно:
$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \dfrac{1}{3}$.
Обратите внимание, что перечисленные гипотезы образуют ***полную группу событий***, то есть, по условию чёрный шар может появиться только из этих урн, а, например, не прилететь с бильярдного стола.

В первой урне 4 белых + 7 черных = 11 шаров, по классическому определению: $P_{B_1}(A) = \dfrac{7}{11}$ - вероятность извлечения чёрного шара ***при условии***, что будет выбрана 1-я урна.
Во второй урне только белые шары, поэтому ***в случае её выбора*** появление чёрного шара становится *невозможным*: $P_{B_2}(A) = 0$.
И, наконец, в третьей урне одни чёрные шары, а значит, соответствующая ***условная вероятность*** извлечения чёрного шара составит $P_{B_3}(A) = 1$ *(событие достоверно).*
По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{6}{11}$$ -
вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен чёрный шар.

Формула Байеса

Пусть событие A наступило в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_x$. Известны вероятности осуществления гипотез $P(B_1), P(B_2), P(B_3), \ldots, P(B_x)$ и соответствующие условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A), \ldots, P_{B_x}(A)$. Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?

При условии, что событие A *уже произошло*, вероятности гипотез *переоцениваются* по формулам (формулам Байеса):

$P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ - вероятность того, что имела место гипотеза B_1;

$P_A(B_2) = \dfrac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$ - вероятность того, что имела место гипотеза B_2;

$P_A(B_3) = \dfrac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}$ - вероятность того, что имела место гипотеза B_3;

$\ldots\ldots$

$P_A(B_x) = \dfrac{P(B_x) \cdot P_{B_x}(A)}{P(A)}$ - вероятность того, что имела место гипотеза B_x.

На первый взгляд кажется полной нелепицей – зачем пересчитывать вероятности гипотез, если они и так известны? Но на самом деле разница есть:

$P(B_1), P(B_2), P(B_3), \ldots, P(B_x)$ - это ***априорные*** (оцененные ДО испытания) вероятности.
$P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), \ldots, P_A(B_x)$ - это ***апостериорные*** (оцененные ПОСЛЕ испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи "со вновь открывшимися обстоятельствами" – с учётом того факта, что событие A *достоверно произошло*.

Формула Байеса позволяет "переставить причину и следствие": по известному факту события вычислить вероятность того, что оно было вызвано данной причиной.
События, отражающие действие "причин", в данном случае называют гипотезами, так как они - предполагаемые события, повлёкшие данное. Безусловную вероятность справедливости гипотезы называют априорной (насколько вероятна причина вообще), а условную - с учётом факта произошедшего события - апостериорной (насколько вероятна причина оказалась с учётом данных о событии).

Рассмотрим это различие на конкретном примере.

Задача: На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным.
Найти вероятность того, что оно:

а) из первой партии,
б) из второй партии.

Решение: *Первая часть* решения состоит в использовании формулы полной вероятности. Иными словами, вычисления проводятся в предположении, что испытание ***ещё не произведено*** и событие "*изделие оказалось стандартным*" пока не наступило.

Рассмотрим две гипотезы:

B_1 - наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;

B_2 - наудачу взятое изделие будет из 2-й партии.

Всего 4000+6000=10000 изделий на складе.

По классическому определению вероятности: $P(B_1) = \dfrac{4000}{10000} = 0{,}4; \quad P(B_2) = \dfrac{6000}{10000} = 0{,}6$

Рассмотрим зависимое событие A – наудачу взятое со склада изделие ***будет*** стандартным.
В первой партии 100% – 20% = 80% стандартных изделий, поэтому: $P_{B_1}(A) = 0{,}8$ - вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным ***при условии***, что оно принадлежит 1-й партии.

Аналогично, во второй партии 100% – 10% = 90% стандартных изделий и $P_{B_2}(A) = 0{,}9$ - вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным ***при условии***, что оно принадлежит 2-й партии.

По формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0{,}86$ - вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным.

Часть вторая. Пусть наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Эта фраза прямо прописана в условии, и она констатирует тот факт, что событие A ***произошло***.

По формулам Байеса:

а) $P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} \approx 0{,}37$ - вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 1-й партии;

б) $P_A(B_2) = \dfrac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} \approx 0{,}63$ - вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 2-й партии.

====================

Статистическое определение вероятности

Вспомним, какие мы рассматривали испытания:

- бросание монеты с вероятностями выпадения "орла" и "решки" по 0,5;
- бросание кубика с вероятностью выпадения каждого из 6 чисел по $\frac{1}{6}$ и т.д.

Мы определяли вероятности событий ещё ***ДО*** начала испытаний. А откуда мы эти вероятности узнали? Про монету и кубик понятно. Мы исходили из того, что и монета и кубик симметричны и имеют несмещенный центр тяжести. И поэтому все элементарные события *равновозможны*.

Но в реальной жизни подобные модели встречаются нечасто. В большинстве ситуаций элементарные исходы перечислить затруднительно или невозможно, и ещё труднее обосновать их равновозможность.

Вновь обратим внимание на шаблонные формулировки стандартных задач:

"Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8";
"Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке составляет 0,05".

Возникает вопрос, откуда взялись эти значения? И ответ здесь один: данные вероятности могли получиться только на основе ранее проведённых опытов.

Если в n независимых опытах событие А осуществлялось m раз, то m называется *абсолютной частотой события А*, а отношение $\frac{m}{n}$ называется ***относительной частотой события А***: $W(A) = \frac{m}{n}$, где m - число испытаний, в которых данное событие появилось, n - общее числую фактически проведённых испытаний.

Относительная частота наряду с вероятностью является одним из ключевых понятий теории вероятностей, но если классическое либо геометрическое определения вероятности ***не требуют*** проведения испытаний, то относительная частота рассчитывается исключительно ***ПОСЛЕ*** опытов на основе фактически полученных данных.
В том случае, если серии испытаний проводятся в ***неизменных условиях***, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости, то есть колеблется около определённого значения.

Вот в этой табличке показано, как при подбрасывании монеты относительная частота появления "орла" приближается к своей вероятности $p = \frac{1}{2}$ (полученной по классическому определению).

Количество бросков монеты, n	Число появлений орла, m	Относительная частота, m/n
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

С увеличением количества независимых испытаний случайность превращается в закономерность!

Статистической вероятностью называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.

И теперь понятно, что даже если у реальных кубика и монеты смещены центры тяжести и они чуть-чуть несимметричны, то путем многих бросаний мы сможем определить реальные вероятности тех или иных элементарных исходов и понять - равновозможны ли они.

Можно считать достоверным тот факт, что при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события А стремится к некоторому числу - вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx P(A)$ при большом числе испытаний. Это так называемый ***закон больших чисел***. Важно при этом помнить, что все испытания должны проходить в одинаковых условиях.

Случайная величина

До сих пор мы имели дело со *случайными событиями*. Исходы случайных событий описывались ***качественно***: "выпал "орёл"", "в выборке оказалось три нестандартные детали", "студенту достался незнакомый вопрос на экзамене" и т.п.

Но математика любит, чтобы цифр было побольше. Тогда с этими цифрами можно что-нибудь придумать: составить формулу, нарисовать график и так далее. Фактически всегда результаты опытов со случайными исходами можно представить количественно с помощью одной или нескольких числовых величин. Например, при бросании монеты "решка" - это 0, а "орёл" - это 1; при бросании игрального кубика результаты - это номера граней от 1 до 6 и т. п.

Это и ведет к понятию *случайной величины* в теории вероятностей.

Числовые значения, описывающие результаты опытов, могут характеризовать не обязательно отдельные элементарные исходы в схеме испытаний, но и соответствовать каким-то более сложным событиям. С каждым исходом испытаний может быть связано сразу несколько числовых величин, которые требуется анализировать совместно. Например, координаты (абсцисса и ордината) разрыва снаряда при стрельбе по наземной цели; метрические размеры (длина, ширина и т. д.) детали при контроле качества; результаты медобследования (температура, давление, пульс и пр.) при диагностике больного; данные переписи населения (по возрасту, полу, достатку и пр.).
Поскольку числовые значения соответствуют некоторым случайным событиям (с их определенными вероятностями), то и сами эти значения являются случайными (с теми же вероятностями). Поэтому такие числовые характеристики и принято называть ***случайными величинами***.

- Можно сказать по-другому: ***случайная величина*** - это величина, значения которой зависят от случая. Например, вес пойманной рыбы, температура воздуха в течение суток, сумма выигрыша лотерейного билета.

Случайная величина - это "оцифрованное" случайное событие.

Случайные величины, как правило, обозначаются через X, Y, Z, а их значения - соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например: x_1, x_2, x_3.

Пример про любимый игральный кубик: пусть X - случайная величина - количество очков, которое выпадет после броска. В результате одного испытания выпадет ***одна и только одна*** грань, какая именно - не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина X может принять одно из следующий значений: $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6$.
Ещё пример: Z - дальность прыжка в длину (в некоторых единицах). Случайная величина Z может принять *несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущего примера.

Случайные величины делят на две большие группы:

- *Дискретная* случайная величина - принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но* ***счётно***.
- *Непрерывная* случайная величина - принимает ***все*** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Общие важные соображения

Что такое, по большому счёту, случайная величина? Это числовая функция, отображающая ***множество значений*** случайной величины во ***множество соответствующих им вероятностей***. Мы же помним, что числовая функция - это однозначное отображение одного числового множества в другое числовое. А задание закона распределения дискретной случайной величины с помощью таблицы - это как раз табличный способ задания функции. А математика с функциями умеет прекрасно работать.

О дискретных и непрерывных случайных величинах. Как человек получает числовую информацию? Три способа: "считает", "сравнивает", "думает". Поясню.
Счёт - древнейший и первейший способ получения числовой информации. И натуральные числа как инструмент счёта появились первыми среди чисел. Сначала считали овец в стаде, потом считали количество звёзд на небе и т.д. В применении к случайным величинам считают результаты исходов испытаний: считают количество очков, выпавших на игральных кубиках, считают сколько раз стрелок попал в центр мишени и т.п. Очевидно, что такие случайные величины дискретны (по определению). И ещё: ***при помощи счёта мы получаем совершенно точную числовую информацию*** (если только не сбились). Коль сосчитали (и перепроверили свой счёт), что выпало 24 очка при бросании пяти игральных кубиков, то это абсолютно точный результат (и не 23, и не 25). И случайные величины, основанные на счете, по природе своей дискретны.
Сравнение - это измерение. А измерение - это сравнение. Мы сравниваем эталонную меру с объектом и делаем вывод. Например, мы измеряем линейкой высоту коробка спичек. Прикладываем линейку к коробку, сравниваем положение верхушки коробка с положением соответствующей риски на линейке и определяем число-длину. Пусть мы намеряли 6,2 сантиметра. Но минимальное деление обычной линейки - миллиметр. И измерить десятую и сотую доли миллиметра с помощью этой линейки невозможно. Тогда мы берем в руки микрометр (он измеряет вплоть до миллионных долей метра, то есть до тысячных долей миллиметра) и с его помощью снова измеряем высоту коробка. Получаем в результате 6,2314 сантиметра. Я это всё наговорил, чтобы подчеркнуть - *у любого инструмента для сравнения-измерения есть его собственная погрешность* - инструментальная погрешность. Не устраивает нас погрешность линейки, берем более точный инструмент. А какова ***действительная*** высота коробка спичек? О действительной высоте говорить бессмысленно, поскольку ***нет инструментов измерения без погрешности***. Мы можем, уменьшая погрешность измерительного инструмента, получать всё более точные значения высоты коробка. Пока нас не остановят законы квантовой физики. ***При измерении - сравнении мы всегда получаем приблизительную числовую информацию с погрешностью инструмента измерения.***

Пример: мы измеряем рост школьников своего класса (25 человек). Чем мы его измеряем? Ну для этого дела есть ростомер. Его точность - сантиметры. Понятно, что нет смысла мерять рост человека с точностью до микрона. Сантиметра вполне хватает. Вот мы измерили рост двадцати пяти человек из класса и записали результат. У Коли и у Маши результат измерения оказался равным 176 сантиметрам. Значит ли это, что у них одинаковый рост? Не знаю. Может быть, если измерить их рост с точностью до десятых долей миллиметра, то он будет различаться. Но для условий данной задачи сантиметровой точности вполне хватает. Если рассматривать рост школьников класса как случайную величину, то будет ли эта случайная величина дискретной или непрерывной? Похоже, что есть смысл считать её дискретной: всего 7 значений и значения эти дискретны (дискретность - сантиметр).

Рост	Кол-во человек	Кол-во человек/25
165	6	0,24
168	4	0,16
172	3	0,12
176	6	0,24
180	3	0,12
182	1	0,04
184	2	0,08

Ага. А если мы решили измерить рост всего населения Земли. Это почти 8 миллиардов человек. Ну а какая принципиальная разница? Измерять мы тоже будем с точностью до сантиметра - значит значения случайной величины-роста будут дискретны. Диапазон значений: допустим, от 20 сантиметров (новорожденных меряем тоже) до 250 сантиметров (чтоб баскетболистов учесть) - всего 230 значений. Вполне себе дискретная случайная величина. Другое дело, что дискретная случайная величина роста человека на такой большой выборке в 8 миллиардов людей ***будет очень хорошо приближаться (аппроксимироваться) непрерывной случайной величиной*** с ***нормальным распределением***. Но об этом - чуть позже.

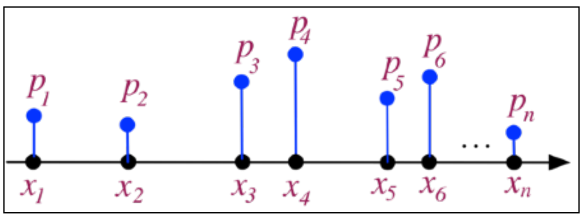
Думание. Математика как никакая другая наука раскрывает огромные человеческие способности к абстрактному мышлению. *И "думание" (абстрактное мышление) даёт абсолютно точную числовую информацию.* Как так! - воскликните вы. А почему же мы точно не можем посчитать $\sqrt{2}$ или $ln3$? Секундочку. Когда вы говорите, что не можете точно посчитать $\sqrt{2}$, то вы на самом деле подразумеваете, что не можете представить $\sqrt{2}$ в виде конечной десятичной дроби. Но это уже ограничения данного способа представления. Когда математик пишет "$\sqrt{2}$", то он имеет в виду одно и только одно определенное число. Что ж с того, что его нельзя представить в виде конечной десятичной дроби? Зато с ним можно делать много других действий. Так вот, ***непрерывная случайная величина - это математическая абстракция***. С помощью такой математической абстракции бывает удобно описывать те или иные реальные дискретные случайные величины.

Дискретная случайная величина

Соответствие между всеми значениями $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_n$, которые принимает дискретная случайная величина X, и им соответствующих вероятностей $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \dots, p_n$ называют *ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ* дискретной случайной величины.

Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	.....	x_n
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	.....	p_n



или графически.

Поскольку случайная величина X обязательно примет одно из значений $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$, то соответствующие события образуют ***полную группу событий*** и сумма наступления их вероятностей равна 1: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \ldots + p_n = 1$ или $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Задача: В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины X – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.
Решение: значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, а именно $x_1 = 0$ рублей. Всего безвыигрышных билетов *50 - 12 = 38* и по классическому определению $p_1 = \frac{38}{50} = 0{,}76$ - вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным. С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша $x_2 = 100$ рублей составляет: $p_2 = \frac{10}{50} = 0{,}2$ и для $x_3 = 1000$ $p_3 = \frac{2}{50} = 0{,}04$.
Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}76 + 0{,}2 + 0{,}04 = 1$.
Искомый закон распределения выигрыша имеет вид:

X	*0*	*100*	*1000*
	0,76	*0,2*	*0,04*

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Говоря простым языком, ***математическое ожидание*** это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \ldots, p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание $M(X)$ данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n$ или $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

Пример: Некоторая игра имеет следующий закон распределения:
То есть с вероятностью 0,5 вы проигрываете 5 рублей, с вероятностью 0,4 вы выигрываете 2,5 рубля и с вероятностью 0,1 вы выигрываете 10 рублей.

X	*-5*	*2.5*	*10*
	0,5	*0,4*	*0,1*

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру?
На этот вопрос можно легко ответить, вычислив ***математическое ожидание***, по сути - *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:
$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = -5 \cdot 0{,}5 + 2{,}5 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}1 = -0{,}5$, то есть математическое ожидание данной игры ***проигрышно***! Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемый проигрыш.

Дисперсия дискретной случайной величины

Представим двух стрелков, которые стреляют по мишени. Один стреляет метко и попадает близко к центру, а другой… просто развлекается и даже не целится. Но что забавно, его *средний* результат будет точно таким же, как и у первого стрелка! Эту ситуацию условно иллюстрируют следующие случайные величины:

X	*-1*	*1*
	0,5	*0,5*

Y	*-100*	*100*
	0,5	*0,5*

"Снайперское" математическое ожидание равно
$M(X) = -1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5 = 0$, однако и у "мазилы" тоже
$M(Y) = -100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 0$!

Таким образом, возникает потребность количественно оценить, ***насколько далеко рассеяны пули*** (значения случайной величины) относительно центра мишени (математического ожидания). Ну а *рассеяние* с латыни переводится как ***дисперсия***.

Формула для нахождения дисперсии дискретной случайной величины X (обозначается $D(X)$):
$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ (математическое ожидание квадрата случайной величины минус квадрат математического ожидания случайной величины).

Посчитаем дисперсии наших стрелков: $D(X) = 1$, $D(Y) = 10000$. Дисперсия стрелка X (*разброс попаданий от центра мишени*) много меньше, чем у стрелка Y.

Поскольку дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, то для сравнения "подобного с подобным" используется величина $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ - (сигма) ***среднее квадратичное отклонение***.

Дисперсия и среднее квадратичное отклонение характеризуют средний разброс значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение - это *НЕ СЛУЧАЙНЫЕ* величины, это ***числовые характеристики*** случайной величины.
Они позволяют сравнивать различные случайные величины.

Задача: дискретная случайная величина задана своим законом распределения:

x_i	-2	0	3	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение: Вычисления удобно свести в таблицу:
Собственно, почти всё готово.

x_i	-2	0	3	7	*Суммы*
p_i	0.4	0.1	0.3	0.2	1
$x_i \cdot p_i$	-0.8	0	0.9	1.4	1.5
$x_i{}^2 \cdot p_i$	1.6	0	2.7	9.8	14.1

В третьей строке имеем математическое ожидание:
$M(X) = 1{,}5$

Дисперсию вычислим по формуле:
$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum x_i{}^2 \cdot p_i - (1{,}5)^2 = 14{,}1 - 2{,}25 = 11{,}85$$
Среднее квадратичное отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{11{,}85} \approx 3{,}44$

Несколько следующих разделов выходят из школьного курса теории вероятностей. Я не буду вдаваться в детали при их объяснении. В институте вы их будете изучать подробно. Но они позволяют шире взглянуть на случайные процессы. А главное - они подводят нас к очень важному разделу (который есть в школьной программе) - ***нормальному распределению***. Не поленитесь, прочтите всё.

Функция распределения дискретной случайной величины

В математической статистике для описания *как дискретной, так и непрерывной* случайных величин используется ***функция распределения случайной величины*** (*не путайте с законом распределения!*).

Обозначается $F(x)$ и определяется как $F(x) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ - вероятность того, что случайная величина X примет значение, *МЕНЬШЕЕ*, чем переменная x, которая "пробегает" все действительные значения (от $-\infty$ до $+\infty$).

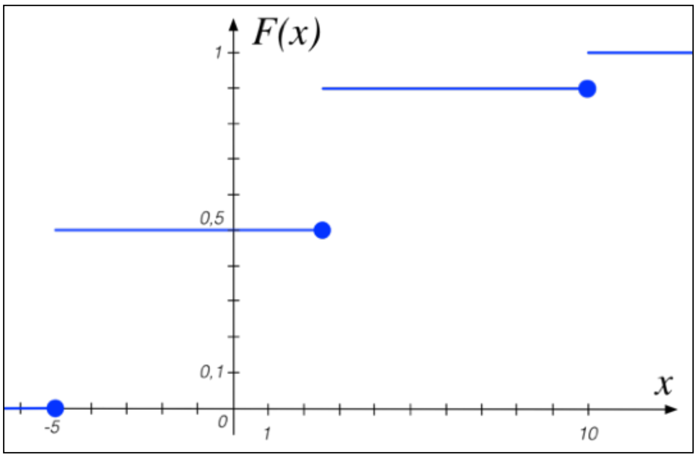
Вспомним пример игры с правилом: за один ход: с вероятностью 0,5 - проигрыш 5 руб, с вероятностью 0,4 - выигрыш 2,5 руб и с вероятностью 0,1 - выигрыш 10 руб.

X	-5	2.5	10
	0,5	0,4	0,1

Попробуем понять на этом примере что такое функция распределения случайной величины и построим её. Чему, например, равно значение $F(-20)$? Это *(по определению функция распределения)* - вероятность того, что выигрыш будет меньше, чем -20. Но за один ход по правилам нельзя "выиграть" меньше, чем -5. Поэтому это событие - невозможное и $F(-20) = P(X < -20) = 0$. Очевидно, что $F(x) = 0$ для всех x из интервала $]-\infty; -5[$, а также для $x = -5$. Почему? Потому, что по определению $F(-5) = P(X < -5) = 0$. Функция $F(x)$ возвращает вероятность того, что в точке $x = -5$ выигрыш будет *СТРОГО МЕНЬШЕ* -5. Таким образом $F(x) = 0$, если $x \leq -5$. Аналогично рассуждая, получим

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\leq -5 \\ 0{,}5, & \text{если } -5<x\leq 2{,}5 \\ 0{,}9, & \text{если } 2{,}5<x\leq 10 \\ 1, & \text{если } x>10 \end{cases}$$

Поскольку функция $F(x)$ - это вероятность, то $0 \leq F(X) \leq 1$ для любых x. Наша $F(x)$ получилась кусочной. График такой функции имеет разрывный ступенчатый вид:



Таким образом, ***функция распределения вероятностей - это ещё один способ задать случайную величину.***

И этот способ особо важен для ***непрерывной случайной величины*** – по той причине, что её невозможно описать таблицей (ввиду *бесконечного и несчётного* количества принимаемых значений).

Взаимосвязь случайных величин

Представьте, мы измеряем рост большой группы людей и на основании измерений описываем дискретную случайную величину X - "рост". А затем мы измеряем вес этой же группы людей и описываем вторую дискретную случайную величину Y - "вес". Как вы думаете, дискретные случайные величины "рост" и "вес" взаимосвязаны? Из общих соображений мы можем сказать "да": в среднем высокий человек тяжелее невысокого.

На языке теории вероятностей говорят так: случайная величина X - "рост" ***коррелирует*** (взаимосвязана) со случайной величиной Y - "вес". Поиском и анализом взаимосвязей случайных величин в теории вероятностей занимается ***корреляционный анализ***.

Непрерывная случайная величина

Выше мы с вами порассуждали о природе дискретных и непрерывных случайных величин. Все наблюдения, которые мы ведем за природой (а социологи - ещё и за нашим обществом), связаны с измерениями. А измерительные приборы (от простой линейки и до самого совершенного детектора элементарных частиц) - дискретны в силу имеющейся у них инструментальной точности-погрешности. И сам акт измерения и фиксации результата - это уже дискретное событие. А результат - дискретная случайная величина. Поэтому первичные наши наблюдения - это дискретные случайные величины. Методами теории вероятностей и математической статистики мы научились обрабатывать эти огромные массивы дискретной информации и находить в них *закономерности*.

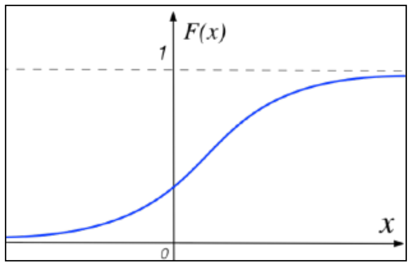
> Например, физики-ядерщики на Большом адронном коллайдере долго планируют и готовят серию экспериментов, затем в течении одной-двух недель эти эксперименты проводят, получая за это время порядка 1000 терабайт "сырых" данных - результатов измерений. И им требуется до года, чтобы эту "сырую" информацию обработать (в том числе и математическими статистическими методами) и в результате сказать: "Мы нашли бозон Хиггса!"

Мы уже говорили, что, по большому счёту, случайная величина - это числовая функция. А дискретная случайная величина - это дискретная (то есть прерывная) числовая функция. Но вся мощь математического анализа (методы дифференцирования, интегрирования и пр.), позволяющая детально исследовать функцию, распространяется только на непрерывные функции (увы!). Поэтому и рассматривают ***непрерывную случайную величину (непрерывную функцию)*** - *математическую абстракцию*, с помощью которой удобно описывать и анализировать те или иные реальные дискретные случайные величины.

Для непрерывной случайной величины вводятся понятия:

Функция распределения непрерывной случайной величины. Определяется она точно так же, как и для дискретной случайной величины: $F(x) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ - вероятность того, что случайная величина X примет значение, *меньшее*, чем переменная x, которая "пробегает" все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Выглядеть эта функция может вот так:

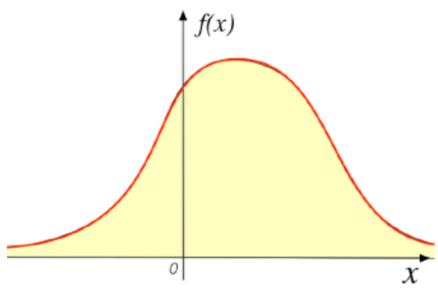


Её главные свойства: $0 \le F(X) \le 1$ и $F(x)$ - неубывающая.

Функция ПЛОТНОСТИ распределения непрерывной случайной величины.
Обозначается очень просто: $f(x)$. Определение почти такое же простое: $f(x) = F'(x)$. Функция плотности распределения представляет собой ***производную*** от функции распределения.

Вот где заработала непрерывность непрерывной случайной величины: мы теперь можем дифференцировать и интегрировать связанные с ней функции!

График этой функции может выглядеть вот так:



Её главные свойства: функция неотрицательна $f(x) \ge 0$; и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$ - площадь под графиком функции $f(x)$ равна 1.

А вот теперь...

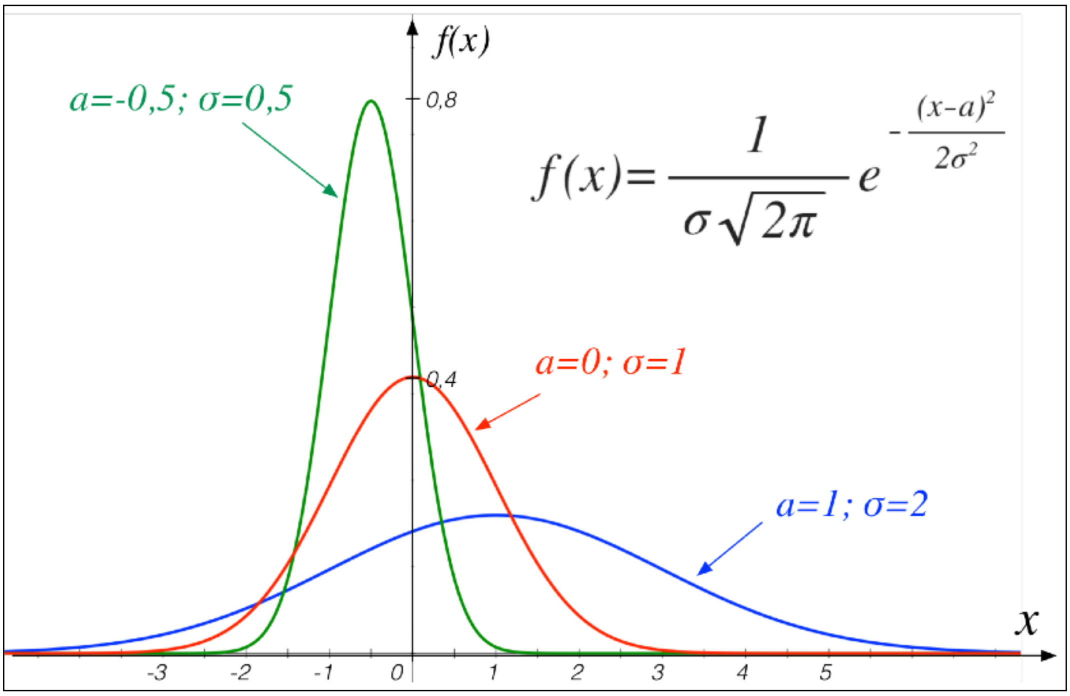
→ Нормальное распределение

Сначала дам определение, а уж потом поговорим о важности нормального распределения.

Свойства

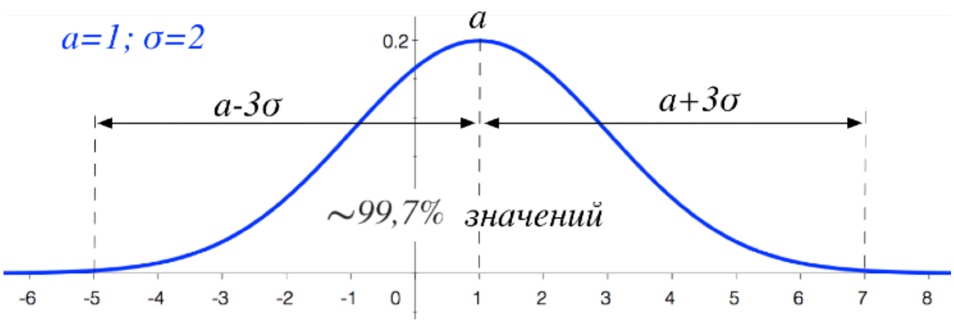
Нормальное распределение (***распределение Гаусса*** - и тут Гаусс отметился!) - это распределение вероятностей непрерывной случайной величины, *функция плотности рапределения* которой задается как: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ (*не бояться!*), где a - *математическое ожидание* нормально распределённой случайной величины; σ - *среднее квадратичное отклонение* нормально распределённой случайной величины.

Графически функция плотности рапределения *нормальной случайной величины* (***кривые Гаусса***) *выглядят вот так:*



Как и всякая функция плотности $f(x)$ имеет свойства: $f(x)$ неотрицательна: $f(x) \geq 0$; площадь под графиком функции $f(x)$ равна 1: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$

И ещё одно замечательное свойство, называемое *"правилом трёх сигм"*: 99,73% всех значений *нормально распределенной случайной величины лежат в интервале* $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$ *(взгляните на рисунок).*



Чем так замечательно нормальное распределение?

Нормальное распределение (или близкое к нему) встречается буквально на каждом шагу. Очень многие события в нашей жизни являются следствием совместного влияния большого числа мелких факторов.

Математика доказала, что если случайная величина X является суммой очень большого числа взаимно независимых случайных факторов, влияние каждого из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

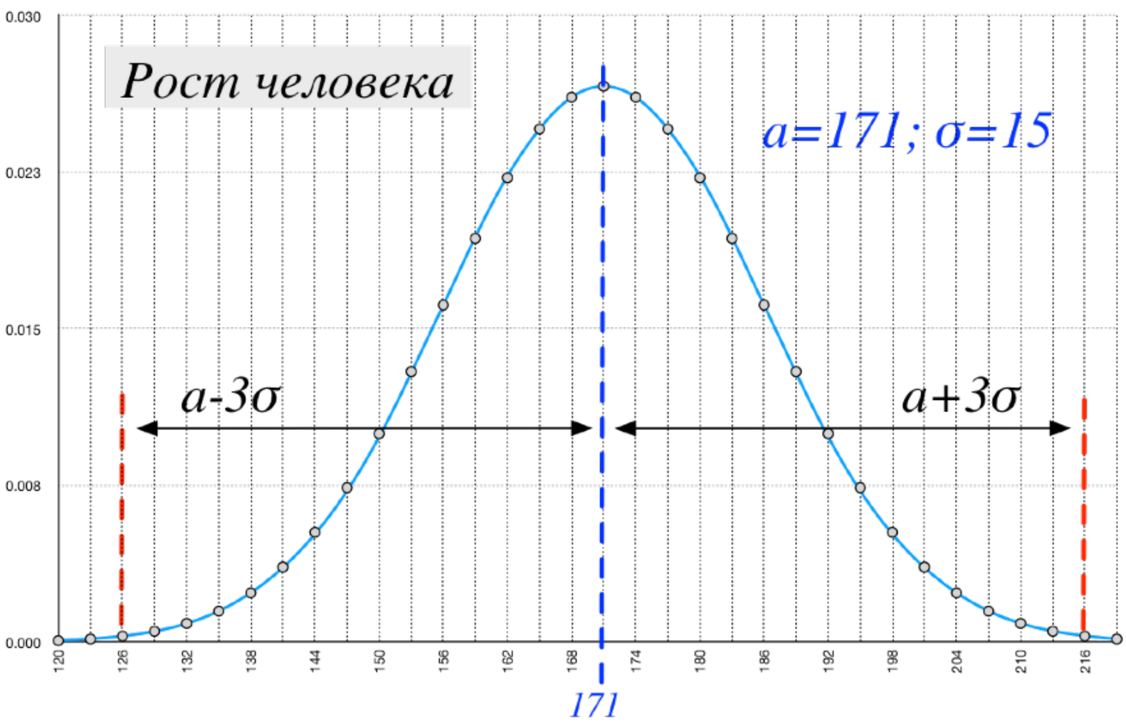
Ключевыми являются две важные вещи:
- все действующие факторы ***не должны быть сильными***,
- все действующие факторы ***должны быть независимыми***.

Смысл нормального распределения становится понятен из его формы. Наиболее вероятные значения случайной величины расположены вблизи его пика. По мере удаления от него, вероятность значений уменьшается и если значение расположено в «хвосте» распределения, то оно очень маловероятно.

Если случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, то статистический анализ описываемого ей процесса существенно упрощается.

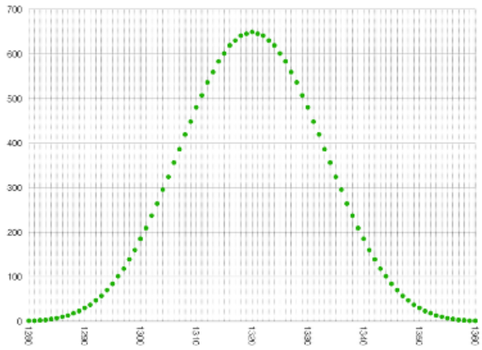
Вот лишь небольшой список случайных величин, хорошо моделирующихся нормальным распределением:
- отклонения при стрельбе;
- погрешности измерений;
- некоторые характеристики живых организмов в популяции;
- рост (вес, продолжительность жизни и пр.) большой группы людей;
- тепловая скорость молекул газа.

Вот хороший пример. В 2010 году в рамках программы ООН измерялся рост людей во всех регионах Земли. Было измерено порядка 200.000 человек. Итог на картинке. Случайная величина "рост" прекрасно описывалась законом нормального распределения.



Средний рост составил 171 сантиметр. Среднее квадратичное отклонение составило 15 сантиметров. По "правилу трёх сигм" в диапазоне роста $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$ = [126; 216] оказались 99,7% измерений.

А помните, как в Истории про Числа я считал распределение числа вариантов разрезания на 16 частей веревки в зависимости от её длины. И получил результат:



Тоже нормальное распределение.

В теории вероятностей и в математической статистике есть и другие, менее универсальные распределения.

=====================

Заканчиваю рассказывать о теории вероятностей. Рассказ получился немаленький. Но это лишь основы. Об остальном - в институте.

Удачи!