Числа

В этой истории мы соберем воедино все школьные знания о числах, их представлениях, операциях над ними. Поговорим о системах счисления. Будет много задач.

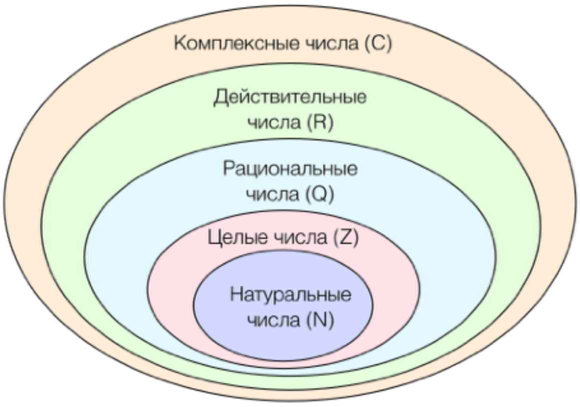
"...Раз-два-три-четыре-пять,
Я иду ЕГЭ сдавать..."
(А.С. Пушкин)

Число - основное понятие математики, используемое для количественной характеристики объектов. Письменными знаками для обозначения чисел служат **цифры**. Числа появились из естественной человеческой потребности ***сосчитать*** (сколько овец в стаде) и ***измерить*** (сравнить длину стены с шагом).

А буквы - это "числа" письменного языка.

Итак, какие числа мы знаем и что мы умеем с ними делать? Немного сухой теории.

- Натуральные числа (N) - числа, получаемые при естественном счете. Множество натуральных чисел $N = \{1,2,3,4,5,...\}$
- Целые числа (Z) - к натуральным числам добавляются ***отрицательные*** и ***ноль***: $Z = \{... -3, -2, -1, \quad 0 \quad ,1,2,3,...\}$
- Рациональные числа (Q) - числа, представимые в виде дроби $\dfrac{m}{n} \quad (n \neq 0)$, где *m* - целое, а *n* - натуральное.
- Действительные числа (вещественные) (R) - расширение множества рациональных чисел за счет добавления *иррациональных чисел* и *трансцедентных чисел*.
- Комплексные числа (C) - расширение множества действительных чисел за счет добавление чисел вида $x + iy$, где *x,y* - действительные числа, а i - мнимая единица: $i^2 = -1$. *В школе их не проходят.*



Эти множества являются вложенными:
$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Над числами вводятся операции: сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в степень, извлечение корня.

На ***сложение*** и ***умножение*** распространяются следующие законы:

- коммутативность (переместительный закон):
  $a + b = b + a; \quad a \cdot b = b \cdot a$
- ассоциативность (сочетательный закон):
  $(a + b) + c = b + (a + c); \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- дистрибутивность (распределительный закон): $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- закон монотонности: $a + b > a + c \Rightarrow b > c$ и $a \cdot b > a \cdot c \Rightarrow b > c$ при $a>0$

У ***деления*** есть свой закон: на ноль делить нельзя.

Законы **возведения в степень**:

- дистрибутивность (распределительный закон): $a^{n+m} = a^n \cdot a^m; \quad a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$
- повторное возведение в степень: $(a^n)^m = a^{nm}$

Теперь поговорим об **извлечении корня**.

Алгебраическим корнем n-й степени ***(n - натуральное число)*** из числа a называется такое число b, что $b^n = a$ и обозначается $b = \sqrt[n]{a}$.

Примеры алгебраических корней:

- $\sqrt{9} = \pm 3$, потому что $(\pm 3)^2 = 9$;
- $\sqrt[3]{64} = 4$, потому что $4^3 = 64$;
- $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$, потому что $(-\frac{2}{3})^3 = -\frac{8}{27}$.

У алгебраического корня могут быть два значения (положительное и отрицательное). Для устранения неоднозначности вводится понятие арифметического корня.

Арифметическим корнем n-й степени ***(n - натуральное число)*** из ***неотрицательного действительного*** числа a называется такое ***неотрицательное*** число b, что $b^n = a$ и так же обозначается $b = \sqrt[n]{a}$. $a > 0, \quad b > 0 \quad !!!$

Тогда арифметический корень $\sqrt{9} = 3$.

> *Во всем школьном курсе речь* ***всегда*** *идет об арифметических корнях!!!*

Хотя в известной формуле для корней квадратного уравнения $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ *знак* $\pm$ *как раз и говорит о том, что у дискриминанта могут быть два корня (положительный и отрицательный).*

Алгебраические свойства арифметических корней (*n,m,k* - натуральные, a>0, b>0):

- взаимопогашение корня и степени: $\sqrt[n]{a^n} = a$;
- если a<b, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ - определение возведения в дробную степень
- $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Определены и много других операций над числами: взятие логарифма, взятие синуса-косинуса и пр. и пр. Но об этих операциях мы поговорим в дальнейшем. Вернемся к числам.

О натуральных числах

А давайте вспомним ***признаки делимости*** натуральных чисел.

n	*Число делится на n, если...*
2	число четное
3	сумма цифр числа делится на 3
5	число оканчивается либо на 0, либо на 5
9	сумма цифр числа делится на 9
11	сумма четных цифр числа равна сумме нечетных цифр числа, либо отличается на число, делящееся на 11

Пример: Число 3256 делится на 11 (3256=11·296): 3+5=2+6

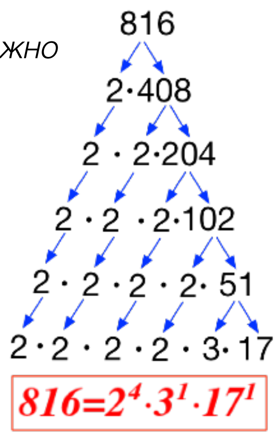
О простых числах

Простое число - натуральное число, имеющее ровно два различных натуральных делителя - единицу и самого себя. Вот они: *2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,....* Простых чисел бесконечно много.

Несмотря на то, что простые числа изучаются уже более трех тысячелетий и имеют простое описание, о простых числах до сих пор известно на удивление мало. Не найдена универсальная формула простых чисел. Не ясно распределение простых чисел на числовой оси. И много других неясностей.
Помимо многих разделов математики простые числа очень важны в компьютерной криптографии. Поиск новых больших простых чисел ведется на мощных компьютерных системах. На сегодняшний день (май 2019) самым большим найденным простым числом является число, запись которого состоит из 24862048 цифр.

Основная теорема арифметики

- Каждое натуральное число a>1 можно представить в виде $a = {p_1}^{s_1} \cdot {p_2}^{s_2} \cdot \ldots {p_n}^{s_n}$, где $p_1, p_2, \ldots p_n$ - **различные** простые числа, а $s_1, s_2, \ldots s_n$ - натуральные числа. Такое представление единственно.



Иначе говоря, и это интуитивно понятно, *любое натуральное число больше 1 можно разложить на произведение степеней простых чисел.*
Пример: $816 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 17^1 \quad (p_1 = 2, \quad s_1 = 4, \quad p_2 = 3, \quad s_2 = 1, \quad p_3 = 17, \quad s_3 = 1)$

Важное следствие: *(может пригодиться при решении задач ЕГЭ)*
Число натуральных делителей числа а равно $(s_1+1)\cdot(s_2+1)\cdot\ldots\cdot(s_n+1)$

Пример: У числа $816 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 17^1 \quad (s_1 = 4, s_2 = 1, s_3 = 1)$ - *(4+1)·(1+1)·(1+1)=20 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 17, 24, 34, 48, 51, 68, 102, 136, 204, 272, 408, 816*

О рациональных числах

Рациональное число ***r*** представимо в виде дроби $\dfrac{m}{n}$ (*m* - целое, *n* - натуральное). Если m не делится нацело на n, то r представимо в виде конечной десятичной дроби ($\dfrac{4}{25} = 0{,}16$) или бесконечной **периодической** десятичной дроби ($\dfrac{1}{7} = 0{,}142857142857142...$).

Об иррациональных числах

Иррациональное число - число, которое нельзя представить в виде дроби $\dfrac{m}{n}$ (относится к действительным числам). В то же время иррациональные числа могут быть корнями алгебраического уравнения. Под алгебраическим уравнением понимается уравнение вида $y = 5x^5 - x^4 + 2x^3 + 14x^2 - x + 1$ (или любых более высоких степеней). Иррациональное число может быть представлено в виде бесконечной **непериодической** десятичной дроби.
Примеры: $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309......; \sqrt[3]{3} = 1.4422495703074...$

О трансцедентных числах

Трансцедентное число (относится к действительным числам) не может быть корнем алгебраического уравнения. Трансцедентное число может быть представлено в виде бесконечной **непериодической** десятичной дроби.
Примеры:

- число π (отношение длины окружности к диаметру) $\pi = 3{,}14159265358979...$

- число e (основание натурального логарифма) $e = 2{,}718281828459045....$
- $lg\ 5=0{,}698970004336019...$

Чуть-чуть о комплексных числах

Несмотря на то, что комплексные числа в школе не проходят, скажем несколько слов о них. В основе построения комплексных чисел лежит мнимая единица: $i^2 = -1$. "Этого не может быть!" - воскликнут 28 бухгалтеров. Да, в бухгалтерии не может. Но комплексные числа оказались мощнейшим инструментом как в самой математике (в институте ты будешь изучать "Теорию функций комплексной переменной"), так и в прикладных областях науки (электротехника, передача информации и т.д.)

И уж совсем удивительно, но фантастически красиво выглядит **тождество Эйлера**, связывающее пять фундаментальных математических констант:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

После того, как Эйлер опубликовал этот результат в 1740 году, многие пытались истолковать его как символ единства математики: числа 0 и 1 относятся к арифметике, мнимая единица i - к алгебре, число π - к геометрии, а число e - к математическому анализу.

======================================

Еще два полезных неравенства. Могут пригодиться для решения задач. Если $a > 0$ и $b > 0$, то:

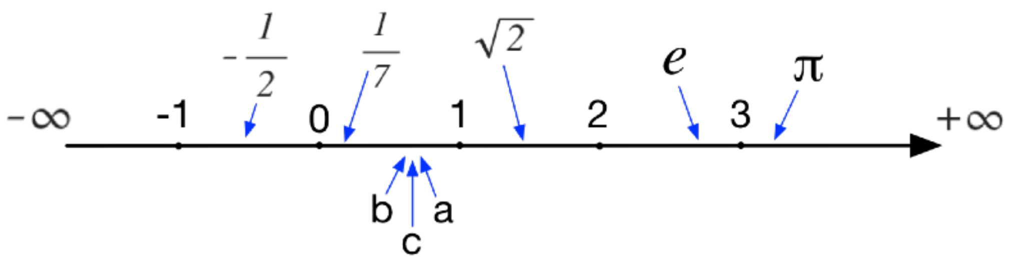
- $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ - "среднее арифметическое не меньше среднего геометрического";
- $a + \frac{1}{a} \geq 2$

Арифметика - раздел математики, изучающий числа, их отношения и свойства.

Геометрическое представление действительных чисел - числовая ось

Прямая, на которой выбраны:
- начало отсчета
- положительное направление
- масштаб - единица измерения длин,

является геометрическим образом множества действительных чисел - числовой осью.



На числовой оси становится наглядной **непрерывность** множества действительных чисел: для любых различных действительных чисел a и b, таких, что a>b, всегда найдется такое действительное число c, такое, что b<c<a. Иными словами, *между любыми двумя различными действительными числами находится бесконечное множество других действительных чисел*. Ко множеству действительных чисел добавляются символы бесконечно удалённых точек $+\infty$ и $-\infty$.

Система счисления - символический метод записи чисел.

Десятичная система счисления Мы все давно привыкли записывать числа в ***десятичной позиционной*** системе счисления. Слово "позиционная" обозначает то, что положение цифр в записи числа определяет величину этого числа. Номера мест цифр в записи числа называются ***разрядами***. "Десятичная" означает то, что в записи числа используются цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 и основанием счисления является 10: цифры в записи числа показывают сколько в нем присутствует степеней 10. Исторически десятичная система счисления возникла в связи со счетом на пальцах рук.

количество тысяч
количество сотен

$$2019 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

количество единиц
количество десятков

А число с десятичной дробью представляется так:

$$23{,}198 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$$

Из применяющихся в настоящее время позиционных систем счисления используются:
- *двоичная (в дискретной математике и компьютерных дисциплинах);*
- *шестнадцатиричная (в компьютерных дисциплинах);*
- *шестидесятиричная (в записи времени (минуты, секунды) и географических координат (минуты, секунды широты и долготы).*

Двоичная система счисления В цифровых устройствах из-за используемых физических способов хранения и обработки информация представлена в виде наборов состояний - "есть напряжение - нет напряжения" - или, как говорят, в двоичном коде. Минимальным размером информации является один бит - он может быть равен 0 или 1. Двоичная позиционная система счисления представляет числа в виде суммы степеней двойки:

$$2019_{10} = 11111100011_2 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Очевидно, что это не самая компактная и удобная форма представления.

Шестнадцатиричная система счисления Более компактной формой представления цифровой информации является шестнадцатиричная система счисления. При её использовании число представляется в виде сумм степеней 16. Используется 16 цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F ($A_{16}=10_{10}$, $B_{16}=11_{10}$, $C_{16}=12_{10}$, $D_{16}=13_{10}$, $E_{16}=14_{10}$, $F_{16}=15_{10}$).

$$2019_{10} = 7E3_{16} = 7 \cdot 16^2 + E \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0$$

> *В школьном курсе информатики вы уже сталкивались с этими системами счисления. А уж в институте при изучении компьютерных наук вам придется иметь с ними дело постоянно.*

Ну и пример **непозиционной** системы счисления, с которой быть может придется встретиться.
Римская система счисления. В ней в качестве цифр используются латинские буквы:
Есть правило: меньшая цифра, идущая перед большей, вычитается из неё.

Примеры: $2019_{10} \quad \rightarrow \quad MMXIX$

Латинская цифра	Значение	Латинская цифра	Значение
I	1	C	100
V	5	D	500
X	10	M	1000
L	50		

Задачи на числа из ЕГЭ

Задачи на числа, пожалуй, самые трудные из задач, предлагаемых на ЕГЭ по математике.

Эту трудность можно объяснить:
- вариаций задач на числа - великое множество (ниже я прорешал 24 ***разные*** задачи, но это лишь малая толика из существующих). Поэтому не существует единого алгоритма их решения. Вот, например, для решения системы уравнений с параметром и с модулем есть алгоритм: определяем начальную область определения (ОО) уравнений системы; раскрываем по правилам модуль; получаем несколько систем с разными ОО; преобразуем-подставляем-получаем решение; проверяем решение на ОО; хлопаем в ладоши от радости. С задачами на числа такое не проходит - все они индивидуальны.
- задачи на числа формулируются на естественном языке ("... в кошельке лежало n монет... Аня сделала все свои покупки..."). По крайней мере - в егэшных вариантах. При этом практически каждое слово в формулировке несёт математический смысл. При решении надо условия задачи, сформулированные на естественном языке, перевести в уравнения-неравенства, не упустив математических смыслов. При этом надо помнить: "лишних" условий в задаче не бывает (в школьной)! Если о каком-то математическом факте в задаче сказано, то он должен принять участие в решении.
- определяющую роль в решении задач на числа играют здравый смысл и логика. Ну а поскольку у всех у нас смысл здрав по-разному, то ...

Маленькое замечание:
Есть правила "хорошего математического тона" при обозначении переменных:

Натуральные числа (да и целые тоже) обозначаются как k, l, m, n. Вы, конечно, можете обозначить натуральное число как "$й$". Уголовный математический кодекс вы при этом не нарушите. Однако за оригинальность обозначений баллов не добавляют (за оригинальность решения - добавляют), а вот раздражение у проверяющего появится точно. Набор чисел обозначают так: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots$

Немного общих теоретических моментов (помимо того, что было разобрано выше) и советов:
Прогресии. Встречаются в задачах на числа арифметическая и геометрическая прогрессии.

Арифметическая прогрессия:

$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ - n-й член; $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ - свойство трёх подряд идущих членов;

$S_n = \dfrac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$ - сумма первых n-й членов.

Геометрическая прогрессия:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ - n-й член; $b_n{}^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$- свойство трёх подряд идущих членов;

$S_n = \dfrac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ - сумма первых n-й членов.

■ Если в задаче сказано "***есть набор натуральных чисел***", то:

a) надо понимать, что числа эти не обязательно разные;

b) *если это не влияет на решение задачи !!!* (если числа не привязаны жёстко к своему месту в наборе), то для дальнейшего анализа этого набора удобно числа эти упорядочить по возрастанию (или по убыванию);

c) упорядочив числа по возрастанию в соответствии с пунктом b), и получив в результате набор $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$, можем записать набор неравенств: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \ldots \le a_n$ - знак "$\le$" и говорит о том, что соседние числа могут быть равными;

Вот и всё, что можно "вытянуть" из формулировки "есть набор натуральных чисел". Не густо.

■ А вот если в задаче сказано "***есть набор различных натуральных чисел***", то расширяется поле для манёвра:

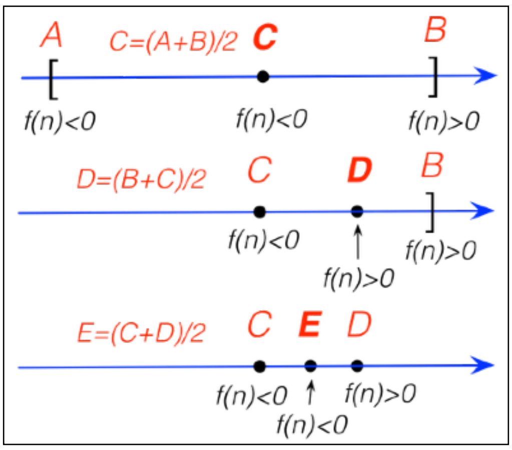
a) опять же, *если это не влияет на решение,* упорядочиваем эти числа по возрастанию;
b) и теперь можем записать набор усиленных неравенств $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n$ - знак "<" и говорит о том, что все числа различны. Такая запись много не даёт, она отражает лишь то, что числа различны и упорядочены по возрастанию.
c) но теперь мы можем записать и вот такой набор неравенств: $a_1 \le a_2 + 1; \quad a_2 \le a_3 + 1; \ldots \quad a_n \le a_{n+1} + 1$ - ведь различные натуральные отличаются друг от друга минимум на единицу. И с этим набором неравенств мы уже можем производить действия, например, складывать.
d) более того, мы можем сравнить наш упорядоченный по возрастанию набор с набором натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию (первый член этой прогрессии равен a_1, а разность прогрессии (шаг) равен 1). Это сравнение даёт неравенство $a_n \ge a_1 + (n-1)$, что отражает тот факт, что числа из нашего набора возрастают ***не медленнее***, чем члены этой арифметической прогрессии.
e) а ещё, сравнивая наш упорядоченный по возрастанию набор с набором натуральных чисел, образующих арифметическую прогрессию, мы можем записать $\sum_{1}^{n} a_i \ge \dfrac{2a_1 + (n-1)}{2} n$.

   Это и понятно: коль (по пункту d)) числа из нашего набора возрастают не медленнее, чем члены этой арифметической прогрессии, то и сумма их будет не меньше суммы n-членов прогрессии. А такое неравенство может весьма пригодиться.

Вот видите, сколько мы "наковыряли" из одного только слова "различные"!

■ Часто в задачах на числа встречается "среднее арифметическое набора чисел". В подавляющем большинстве случаев удобнее перейти от среднего арифметического чисел к суммам чисел. С суммами проще работать: к ним можно добавлять новые числа; их можно складывать-вычитать и пр. Например, в задаче варианта 3: среднее арифметическое шести чисел из набора равно 6. Ну и перейдите от среднего арифметического $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = 6$ к сумме $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 36$ - сразу легче станет.

■ Подборы-переборы. Ну от них никуда не деться в задачах на числа. Помните, что устный счёт - источник ошибок! И от того, что уже три часа сидите в напряжении и решаете, и из-за элементарных описок и пр. Устный счёт надо минимизировать. А для этого можно немного постараться и уточнить диапазон подбора (максимум-минимум) искомого вами значения. А, уточнив диапазон, полезно бывает использовать ***метод дихотомий*** ("дихотомия" - деление пополам) для перебора и нахождения нужного значения. Он прост и сокращает число переборов.



Поясню на примере. Вы определили диапазон натуральных чисел (от A до B включительно), внутри которого надо сделать перебор. Пусть $f(n)$ - некий критерий, по которому ищется нужное число (или набор чисел) в диапазоне. Ну, например, $f(n) = n^2 - 10n - 4$. Известно, что в точке A $f(A) < 0$, а в точке B $f(B) > 0$. Задача: найти минимальное значение n, при котором $f(n) > 0$. При прямом переборе мы начали бы проверять $f(A+1), f(A+2), f(A+3), \ldots$ до тех пор, пока бы не нашли первое значение $f(A+m) > 0$ и на нём остановились. Согласитесь, это может быть много переборов. Метод дихотомий поступает так: берем точку C посередине интервала [A,B]: C=округляем до ближайшего целого величину (A+B)/2 и в ней проверяем критерий $f(n)$. Пусть $f(C) < 0$. Ага, понятно, что искомое значение n лежит между C и B.

Забыли про А. Теперь берем точку D посередине интервала [C,B]: D=округляем до ближайшего целого величину (C+B)/2 и в ней проверяем критерий $f(n)$. Пусть $f(D) > 0$. Ага, понятно, что искомое значение n лежит между С и D. Забыли про В. Теперь берем точку Е посередине интервала [C,D]: Е=округляем до ближайшего целого величину (C+D)/2 и в ней проверяем критерий $f(n)$. Пусть $f(E) < 0$. Ага, понятно, что искомое значение n лежит между С и Е. И так далее до локализации минимального n. В среднем метод дихотомий в два раза быстрее метода прямого перебора.

Максимумы-минимумы. Часто спрашивают в задачах: "Найдите наименьшую (наибольшую) величину числа ..." и число это задаётся некоей формулой. Погодите секундочку и подумайте: а может для нахождения наименьшего этого числа достаточно найти, например, наибольшее другого, что резко упростит решение? "Понюхайте" формулу.

Иногда помогает думать рисование картинок.

Ну и главный совет: включайте здравый смысл "на десяточку" и без страха вперёд!

А теперь - задачи!

Задача №1: - Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла иметь достоинство 2, 5 или 10 рублей. Аня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 56 рублей и ручки за 29 рублей, если n = 14?
б) Могли ли все её покупки состоять из чашки чая за 10 рублей, сырка за 15 рублей и пирожка за 20 рублей, если n = 19?
в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Аня купила только альбом за 85 рублей и n = 24?

Решение: ***Задача в натуральных числах.*** Вводим обозначения: k - количество двухрублевых монет; l - пятирублевых; m - десятирублевых. $k, l, m \in N$

а) Анины покупки должны описываться системой: $\begin{cases} k + l + m = 14 \\ 56 + 29 = 2k + 5l + 10m \end{cases}$. Если есть решения системы в натуральных числах - то "да". Два уравнения, три неизвестных. Надо искать перебором. Как лучше начать перебор? Сумма покупок составляет 85 рублей. Значит m<9. Но может m=8? Нет, поскольку в оставшиеся 5 рублей (85-80=5) не "вписать" двухрублевую и пятирублевую монеты. Значит максимально m=7. Поэтому предлагается перебором по m от 1 до 7. С какого значения m начать перебор? Если бы m было большим, то, наверное, имело бы смысл подумать о выборе оптимального значения для начала перебора (1 или m). Но я думаю, что мы быстрее переберем 7 значений m, чем будем обосновывать с чего начать.

При m=6 получаем систему $\begin{cases} k + l = 8 \\ 2k + 5l = 25 \end{cases}$, имеющую натуральные решения $k = 3, \quad l = 5$.

Поэтому ответ на вопрос задачи - "да".

б) В этом случае Анины покупки должны описываться системой:
$\begin{cases} k + l + m = 19 \\ 10 + 15 + 20 = 2k + 5l + 10m \end{cases}$. Если есть решения системы в натуральных числах - то "да".
Опять перебор. Сумма покупок составляет 45 рублей. Значит m<4. Поэтому перебор по m от 1 до 3. Перебор показывает, что натуральных решений нет. Поэтому ответ на вопрос задачи - "нет".

в) В этом случае Анины покупки должны описываться системой: $\begin{cases} k+l+m=24 \\ 2k+5l+10m=85 \end{cases}$.

Выражаем из первого k и подставляем во второе. Получаем $8m=37-3l$. Тут можно проверить на делимость на 8 выражения $37-3l$ при переборе l от 1 до 11. В итоге получаем $k=15, \quad l=7, \quad m=2$. *l=7* - единственное решение, поэтому оно и наименьшее.

Простенькая задачка на составление системы в натуральных числах и перебор.

Задача №2: - На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 6, а среднее арифметическое шести наибольших равно 16.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 4?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Пусть B - шестое по величине число, а S - среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения S-B.

Решение: ***Задача о** **различных натуральных** **числах.***

Не поленимся и выпишем их: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}$. Числа эти упорядочены и различны: $a_n > a_{n-1}$ или $a_n \geq a_{n-1}+1$. Числа натуральные: $a_1 > 0$. Здесь удобнее от средних арифметических перейти к суммам чисел.

По условию задачи: $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}=6 \Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=36$ и $\dfrac{a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}}{6}=16 \Rightarrow a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}=96$.

а) Если наименьшее число равно 4, то ***наименьшая сумма*** шести наименьших чисел будет 4+5+6+7+8+9=39. А у нас по условию - 36. Ответ - "нет".

б) Пусть сумма пяти наименьших чисел равна A, шестое число равно B, а сумма пяти наибольших чисел равна C. Тогда по условию задачи $\begin{cases} A+B=36 \\ B+C=96 \\ A+B+C=110 \end{cases}$, откуда получаем B=22. Но этого быть не может, поскольку ***наименьшая сумма*** шести наибольших чисел будет 22+23+24+25+26+27=147, а у нас по условию B+C=96. Ответ - "нет".

в) $B=a_6$ и $\begin{cases} A+B=36 \\ B+C=96 \\ A+B+C=11\cdot S \end{cases}$ откуда получаем

$S-B=\dfrac{A+B+C-11B}{11}=\dfrac{(A+B)+(B+C)-12B}{11}=\dfrac{132-12B}{11}$, то есть надо найти минимальное значение B, чтобы получить максимальное значение $S-B=\dfrac{132-12B}{11}$.

Упорядоченность шести наименьших чисел можно записать так: $a_6 \geq a_5+1, \quad a_5 \geq a_4+1, \quad a_4 \geq a_3+1, \quad a_3 \geq a_2+1, \quad a_2 \geq a_1+1$ или переписать так: $B \geq a_5+1, \quad B \geq a_4+2, \quad B \geq a_3+3, \quad B \geq a_2+4, \quad B \geq a_1+5$ и сложить эти неравенства: $5B \geq a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+15$ или $6B \geq a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+15$ или $6B \geq 36+15$ или $B \geq 8{,}5$ или, поскольку B - натуральное: $B \geq 9$.

Покажем, что число B может равняться 9. Например, вот такой ряд: 1,5,6,7,8,9,10,11,12,13,42.

Все условия выполняются. Тогда максимальное значение S-B: $S-B=\dfrac{132-12B}{11}=\dfrac{24}{11}$.

*Важно: правильно записать неравенства, отражающие **различность упорядоченных натуральных чисел** и потом их сложить, получив нужное итоговое неравенство.*

Задача №3: На доске написано более 55, но менее 65 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 15, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -5.

a) Сколько чисел написано на доске?
b) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?
c) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение: ***Задача о целых числах.*** *Ничего не сказано, что они различны.*
Отвечаем на все пункты сразу. Пусть N - количество всех чисел, написанных на доске, k - количество положительных чисел, m - количество отрицательных чисел. Из условия вытекает:

- N=k+m;
- 55<N<65;
- 1<k<64 - поскольку среднее арифметическое положительных чисел больше 0, то положительные числа среди написанных имеются (отсюда k>1); а поскольку имеются и отрицательные числа (хотя бы одно) (см. ниже), то положительных <64;
- 1<m<64 - поскольку среднее арифметическое отрицательных чисел меньше 0, то отрицательные числа среди написанных имеются (отсюда m>1); а поскольку имеются и положительные числа (хотя бы одно), то отрицательных <64;

Пусть a_i (i=1,..N) - все написанные числа; b_i (i=1,..k) - все написанные положительные числа; c_i (i=1,..m) - все написанные отрицательные числа. Переходим от среднего арифметического к суммам. *Конструкция* $\sum_{i=1}^{N} a_i$ *- это удобная запись суммы, обозначает сумму всех элементов* a_i*, где индекс меняется от 1 до N с шагом 1.*

Тогда: $\sum_{i=1}^{N} a_i = 7N$, $\sum_{i=1}^{k} b_i = 15k$ и $\sum_{i=1}^{m} c_i = -5m$.

Но и $\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{k} b_i + \sum_{i=1}^{m} c_i$ (справа стоит сумма суммы всех положительных и суммы всех отрицательных чиесл, а поскольку ничего кроме положительных и отрицательных чисел нет среди целых чисел (ноль - "как бы" отрицательное), то это и есть сумма всех написанных чисел).
Откуда: $7N = 15k - 5m$

Имеем систему $\begin{cases} N = k + m \\ 7N = 15k - 5m \end{cases}$ [1], её надо решить в целых числах с учетом $\begin{cases} 55 < N < 65 \\ 1 < k < 64 \\ 1 < m < 64 \end{cases}$.

Из системы [1] $m = \dfrac{15K - 7N}{5} => N = \dfrac{5}{3}k$ - для решения в целых числах k должно делиться на 3. Далее: $55 < N < 65 \quad => \quad 55 < \dfrac{5}{3}k < 65 \quad => \quad 33 < k < 39$. Только одно значение k удовлетворяет этому условию (делиться на 3): k=36. Тогда N=60, m=24.

Важно заметить, что сумма всех чисел - это сумма отрицательных + сумма положительных.

Задача №4: Первый набор чисел состоит из чисел 2,4,8,...,2^{10}. Второй набор состоит из чисел 3,9,27,...,3^{10}. Числа разбиты на пары. В каждой паре на первом месте число из первого набора, а на втором - число из второго. В каждой паре два числа умножили друг на друга и полученные произведения сложили.

а) может ли полученная сумма делиться на 9?

б) может ли полученная сумма быть больше 1 000 000?

в) найдите наименьшее возможное значение полученной суммы.

Решение: ***Задача о степенях 2 и 3, делимости на 3 и геометрической прогресии.***

Сумма формируется из слагаемых вида $2^k \cdot 3^m$, где $1 \le k, m \le 10$.

а) Очевидно, что на 9 делятся все слагаемые суммы, кроме $2^k \cdot 3$. Но 2^k на 3 не делится. Поэтому ответ - "нет".

б) В какой-нибудь из сумм есть слагаемое $2^{10} \cdot 3^{10}$. Но $2^{10} = 1024, \quad 3^{10} > 2^{10}$. Поэтому $2^{10} \cdot 3^{10}$>1 000 000. Поэтому ответ - "да".

в) Будем решать в общем виде. Из всех возможных сумм выделяются два варианта.

Вариант 1.

$S_1 = 2^{10} \cdot 3^{10} + 2^9 \cdot 3^9 + 2^8 \cdot 3^8 + \ldots + 2^2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3$ (*показатели у 2 и 3 одинаковы*). **[1]**

Покажем, что S_1 ***- наибольшее возможное значение суммы***.

Рассмотрим любую из сумм с упорядоченными по степеням убывания тройки слагаемыми. Она начинается с $3^{10} \cdot 2^k$ и в ней есть слагаемое $3^m \cdot 2^{10}$: $S = 3^{10} \cdot 2^k + \ldots + 3^m \cdot 2^{10} + \ldots$

Покажем, что сумму S можно увеличить, заменив эти два слагаемых на $2^{10} \cdot 3^{10}$ и $2^k \cdot 3^m$.

Посчитаем разность $R = (3^{10} \cdot 2^{10} + 3^m \cdot 2^k) - (3^{10} \cdot 2^k + 3^m \cdot 2^{10})$.

$$R = 2^k \cdot 3^m(3^{10-m} \cdot 2^{10-k} + 1 - 3^{10-m} - 2^{10-k}) = 2^k \cdot 3^m(3^{10-m} - 1)(2^{10-k} - 1) \ge 0$$

То есть замена в исходной сумме $3^{10} \cdot 2^k \Rightarrow 3^{10} \cdot 2^{10}$ и $3^m \cdot 2^{10} \Rightarrow 3^m \cdot 2^k$ приводит к ***увеличению суммы***.

$$S=\underbrace{3^{10}\cdot 2^{k}}+\ldots+\underbrace{3^{m}\cdot 2^{10}}+\ldots$$

сумма увеличивается

$$\wedge$$

$$S'=\underbrace{3^{10}\cdot 2^{10}}+\ldots+\underbrace{3^{m}\cdot 2^{k}}+\ldots$$

Для нас на этом этапе важной является замена $3^{10} \cdot 2^k \Rightarrow 3^{10} \cdot 2^{10}$.

Точно такие же рассуждения по всем остальным степеням двойки приведут нас к тому, что S_1 - наибольшая возможная.

S_1 - это сумма 10 членов геометрической прогрессии с $b_1 = 2 \cdot 3 = 6, \quad q = 2 \cdot 3 = 6$.

$$S_1 = 6\frac{6^{10} - 1}{6 - 1} = 72.559.410$$ *(Правда, нас про это и не спрашивают).*

Вариант 2.

$S_2 = 2^{10} \cdot 3 + 2^9 \cdot 3^2 + 2^8 \cdot 3^3 + \ldots + 2^2 \cdot 3^9 + 2 \cdot 3^{10}$ (*сумма пок-лей у 2 и 3 равна 11*).

Покажем, что S_2 ***- наименьшее возможное значение суммы***.

Рассмотрим любую из сумм с упорядоченными по степеням убывания двойки слагаемыми. Она начинается с $2^{10} \cdot 3^k$ и в ней есть слагаемое $3 \cdot 2^n$: $S = 2^{10} \cdot 3^k + \ldots + 3 \cdot 2^n + \ldots$ Покажем, что сумму S можно уменьшить, заменив эти два слагаемых на $2^{10} \cdot 3$ и $2^n \cdot 3^k$.

Посчитаем разность $R = (2^{10} \cdot 3^k + 3 \cdot 2^n) - (2^{10} \cdot 3 + 2^n \cdot 3^k)$.

$$R = 2^n \cdot 3(2^{10-n} \cdot 3^{k-1} + 1 - 3^{k-1} - 2^{10-n}) = (2^{10-n} - 1)(3^{k-1} - 1) \ge 0$$

То есть замена в исходной сумме $2^{10} \cdot 3^k \Rightarrow 2^{10} \cdot 3$ и $3 \cdot 2^n \Rightarrow 2^n \cdot 3^k$ приводит к ***уменьшению суммы***. Для нас на этом этапе важной является замена $2^{10} \cdot 3^k \Rightarrow 2^{10} \cdot 3$.

$$S=\underbrace{2^{10}\cdot 3^{k}}+\ldots+\underbrace{3\cdot 2^{n}}+\ldots$$

$$\vee$$

сумма уменьшается

$$S'=\underbrace{2^{10}\cdot 3}+\ldots+\underbrace{3^{k}\cdot 2^{n}}+\ldots$$

Точно такие же рассуждения приведут нас к тому, что замена $2^9 \cdot 3^k \Rightarrow 2^9 \cdot 3$ тоже уменьшает сумму. И так по всем остальным степеням двойки. В итоге мы и получим сумму S_2 как наименьшую возможную. Если S_2 переписать в виде $S_2 = 3^{11} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^{9} + \ldots + \frac{2}{3}\right]$, то мы увидим геометрическую прогрессию с

$b_1 = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{2}{3}$. Тогда $S_2 = 3^{11} \cdot \frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}} = 348150.$

Не самая легкая задачка (пункт в). Надо увидеть два "крайних" варианта формирования сумм - тут уж нужно немного математического чутья. Способ доказательства наибольшей и наименьшей суммы - не самый очевидный и привычный. Так что в копилочке математического опыта у вас прибавилось. ***А ещё придется много считать!***

Задача №5: На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 3. Сумма написанных чисел равна 1062.

а) Может ли на доске быть ровно 27 чётных чисел?
б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 3?
в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 3, может быть на доске?

Решение: ***Задача о различных натуральных числах.***
Расположим все 35 чисел по возрастанию. Пусть k - число четных чисел, m - оканчивающихся на 3. Тогда *k+m=35*.
Четное число можно представить как $2 \cdot n_i, \quad i = 1,..,k, \quad n_i-$натуральное.
Число, оканчивающихся на 3, можно представить как $10 \cdot l_i + 3, \quad i = 1,..,m, \quad l_i-$ целые числа, начинающиеся с 0 (поскольку числом, оканчивающихся на 3, может быть просто 3).
Сумма всех четных чисел $S_2 = \sum_{i=1}^{i=k} 2n_i = 2\sum_{i=1}^{i=k} n_i$. $S_2 \geq k(k+1)$ (*мин. сумма - это когда n_i были бы 1,2,..,k и мы имели бы арифметическую прогрессию*).
Сумма всех чисел, оканчивающихся на 3, $S_3 = \sum_{i=1}^{i=m}(10l_i + 3) = 10\sum_{i=1}^{i=m} l_i + 3m$.

$S_3 \geq 10\left[\frac{m-1}{2}m\right] + 3m$ (мин. сумма - это когда n_i были бы 0,1,2,..,m-1 *и мы имели бы арифметическую прогрессию*).
Тогда по условию $S_2 + S_3 = 1062 \geq k(k+1) + m(5m-2)$, поскольку *k=35-m*, то $6m^2 - 73m + 198 \leq 0$. Решая в целых числах, получим возможные значения m = 5,6,7,8.

Важно! Этот результат надо проверить "на вшивость": значения m = 5,6,7,8 получены из не очень "сильных" условий минимальных сумм, надо посмотреть насколько они подходят к реальности (тем более, что их всего четыре). Если m - нечетное, то сумма всех чисел, оканчивающихся на 3, будет нечетной; сумма всех четных чисел будет четной и итоговая сумма будет нечетной. А у нас 1062. Поэтому ***m может быть только четным числом***, откуда **m = 6, 8**.
Ответы на вопросы задачи: а) да; б) нет; в) 6.

Несложная задачка. Надо увидеть, что суммы четных и оканчивающихся на 3 чисел можно сравнить с арифметической прогрессией. Это даёт ключевые неравенства. И, конечно, проверка результата целочисленного решения квадратного неравенства. Четность общей суммы сразу выкидывает два результата. Это - натуральные числа! И на чёт/нечет результата надо проверять!

Задача №6: Маша и Наташа делают фотографии несколько дней подряд. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа - n фотографий. В каждый следующий день каждая девочка делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за все время сделала суммарно на 935 фотографий больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течении 5 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течении 6 дней?
в) Какое наибольшее суммарное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 50 фотографий?

Решение: ***Задача на натуральные числа и арифметическую прогрессию.***
Пусть в первый день Маша и Наташа сделали *m* и *n* фотографий каждая, всего они фотографировали в течение *k* дней (k>1).
Считаем сколько всего они сделали как сумму арифметической прогрессии:
Маша: $S_m = \dfrac{2m+k-1}{2}k$; Наташа: $S_n = \dfrac{2n+k-1}{2}k$. По условию: $S_n = S_m + 935$
Из этого следует: $k(n-m) = 935$. Это уравнение должно решаться в целых числах, поэтому разложим 935 на простые сомножители: $935 = 5 \cdot 11 \cdot 17$ и $k(n-m) = 5 \cdot 11 \cdot 17$ **[1]**. Тогда отвечая на первые два вопроса: а) да, могли, поскольку 5 входит в простые сомножители; б) нет, не могли, поскольку 6 не входит в простые сомножители.

в) Из условия про Машу: $m+k-1 < 50$ (k-й член арифм. прогрессии) или $m+k < 51$ **[2]**.
Ищем максимальную величину S_n. Выразим её как
$$S_n = S_m + 935 = \frac{2m+k-1}{2}k + 935 = (m+k-\frac{k+1}{2})k + 935$$
С учетом [1] и [2] k может принимать 3 значения: 5,11,17.
Итак, ищем максимум $S_n = (m+k-\dfrac{k+1}{2})k + 935$ при $m+k < 51$ и $k = 5{,}11{,}17$.

- $k = 5 \Rightarrow m < 46$, $S_n = 3m + 941$ и при $m = 45$ имеем $S_n = 1976$
- $k = 11 \Rightarrow m < 40$, $S_n = 11m + 990$ и при $m = 39$ имеем $S_n = 1419$
- $k = 17 \Rightarrow m < 34$, $S_n = 17m + 1071$ и при $m = 33$ имеем $S_n = 1632$

$S_n max = 1976$.

Простая. Надо разложить 935 на простые множители - сразу станут ясны возможные значения k. И выражать S_n через S_m.

Задача №7: На доске было написано 30 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в 2 раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 1, с доски стерли.
а) Могло ли оказаться так, что ср-арифм чисел, оставшихся на доске, больше 14?
б) Могло ли оказаться так, что ср-арифм чисел, оставшихся на доске, больше 12, но меньше 13?
в) Найти макс возм-е знач-е ср-арифм чисел, оставшихся на доске.

Решение: ***Задача на натуральные** (необязательно различные) **числа.***
Пусть k - число чисел-единиц в исходных числах, m - число чисел не-единиц. Тогда $k+m=30$.
Переходим от среднеарифметического к сумме чисел. Сумма исходных чисел $S = 30 \cdot 7 = 210$.
Эту же сумму можно расписать как $S = k + S_m = 210$ (сумма единиц плюс сумма не-единиц).
S_m - сумма не-единиц. Поскольку по условию каждое число не превосходит 40, то можно записать $S_m \leq 40m$.
Выражаем-подставляем: $k+m=30 \rightarrow S_m = 180 + m$. Тогда $S_m \leq 40m \rightarrow 180 + m \leq 40m$ и в целых числах получаем $m \geq 5$.

После стирания среднее арифметическое оставшихся m чисел будет $D_m = \dfrac{S_m}{2m}$. Или $D_m = \dfrac{180+m}{2m} = \dfrac{90}{m} + \dfrac{1}{2}$. И m от 5 до 30.

Отвечаем на вопросы задачи: в) $D_m max$ - при минимальном m ($m = 5$): $D_m max = 18{,}5$

$D_m min$ - при максимальном m ($m = 30$): $D_m min = 3{,}5$; а) да; б) нет

*Простая. Главное использовать **все** условия задачи - записать равенства-неравенства!*

"Ух!"

Задача №8: Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для каждой группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений среднего арифметического в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения среднего арифметического?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из полученных трёх средних арифметических.

Решение: ***Задача на натуральные числа.***

а) Перебором: да, могут: группы [2],[1,3],[4,5,6,7,8,9,16]

б) пусть натуральные n, m, k - количество чисел в каждой группе; x - среднее арифметическое во всех трех группах. $n + m + k = 10$ и $1 \le n, m, k \le 8$. Тогда $nx + mx + kx = 61$ (61 - сумма исходных чисел) $\rightarrow x(n + m + k) = 61 \rightarrow x = 6{,}1$. Пусть N - сумма чисел в первой группе. N - натуральное число. Тогда $N = 6{,}1n$, но этого быть не может, поскольку N - натуральное. Поэтому ответ - нет. *(Если бы самое большое число было бы не 16, а 15 (и тогда сумма всех чисел равнялась бы 60), то тогда это было бы возможно.)*

в) Среднее арифметическое всех 10 чисел равно $6{,}1$.

Ещё осознать надо: как это - наименьшее наибольшего? Для этого надо описать процедуру. Если бы у нас было неограниченное время, неограниченная энергия и мы бы считали без ошибок, то перебор всех 16830[1] возможных комбинаций - тоже приемлемый способ решения. Как бы мы действовали перебором? Мы бы заполняли такую таблицу (СА - ср. арифм.). Каждая строка - это одна из возможных 16830 комбинаций. Считали бы СА по группам и выбирали бы

№	гр1	гр2	гр3	СА гр1	СА гр2	СА гр3	СА наиб
1	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3,4,5,6,7,8,9,16\}$	1	2	7,25	7,25
....							
333	$\{16\}$	$\{6\}$	$\{1,2,3,4,5,7,8,9\}$	16	6	4,875	16
....							
729	$\{6\}$	$\{3,9\}$	$\{1,2,4,5,7,8,16\}$	6	6	6,1429	6,1429
....							
990	$\{6\}$	$\{1\}$	$\{2,3,4,5,7,8,9,16\}$	6	1	6,875	6,875
....							
1111	$\{1,2,3,4\}$	$\{5,6,7,8\}$	$\{9,16\}$	2,5	6,5	12,5	12,5
....							

[1] *В конце задачи я посчитал количество всех возможных комбинаций деления на три группы. Это совершенно необязательно для решения, важно лишь понимать, что их много.*

наибольшее. А заполнив таблицу полностью (16830 строк), мы бы чуть-чуть отдохнули и стали бы искать в последнем столбце наименьшее из СА наиб.

И сообразили бы, пока искали, что это самое ***наименьшее наибольшее*** содержится в тех комбинациях, в которых СА каждой из трёх групп близки по величине. Одно из этих трёх близких значений чуток больше остальных двух, вот оно и попало в столбец СА наиб. А вокруг какой величины СА этих трёх комбинаций будут "болтаться" (к какой они будут близки)? Уж если эти три СА близки друг к другу, то они будут близки и к своему общему СА. Поэтому задача отыскания ***наименьшего наибольшего*** сводится к отысканию СА наиб, самого близкого к $6{,}1$.

К $6{,}1$ самое близкое число 6. Пусть гр1 будет из него и состоять.
А можно ли из оставшихся чисел составить такую гр2, чтобы её СА равнялось 6?
Из 1 числа такую гр2 уже не составить (6 "занята" в гр1).
Из 2-х чисел (их сумма должна равняться 12): $\{3,9\}$, $\{4,8\}$ и $\{5,7\}$.
Из 3-х чисел (их сумма должна равняться 18): $\{1,8,9\}$
Из 4-х чисел (их сумма должна равняться 24): $\{1,2,5,16\}$ и $\{1,3,4,16\}$
Из 5-ти чисел (их сумма должна равняться 30): $\{1,2,3,8,16\}$

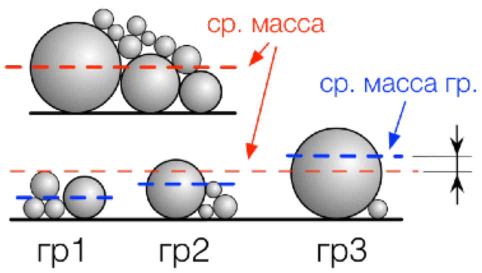
Всё, больше вариантов для гр2 нет.

Вот и считаем эти 7 комбинаций:

гр1	гр2	гр3	СА гр1	СА гр2	СА гр3	СА наиб
$\{6\}$	$\{3,9\}$	$\{1,2,4,5,7,8,16\}$	6	6	6,1429	6,1429
$\{6\}$	$\{4,8\}$	$\{1,2,3,5,7,9,16\}$	6	6	6,1429	6,1429
$\{6\}$	$\{5,7\}$	$\{1,2,3,4,8,9,16\}$	6	6	6,1429	6,1429
$\{6\}$	$\{1,8,9\}$	$\{2,3,4,5,7,16\}$	6	6	6,1667	6,1667
$\{6\}$	$\{1,2,5,16\}$	$\{3,4,7,8,9\}$	6	6	6,2	6,2
$\{6\}$	$\{1,3,4,16\}$	$\{2,5,7,8,9\}$	6	6	6,2	6,2
$\{6\}$	$\{1,2,3,8,16\}$	$\{4,5,7,9\}$	6	6	6,25	6,25

Закрашены комбинации-победители. Ответ: $6\frac{1}{7} \approx 6{,}1429$

Можно привести и такую физическую аналогию для этой задачи.
Пусть у нас есть десять разных по массе камней (камень - это аналог числа, его масса - величина этого числа). Сначала они лежат в одной куче и мы посчитали среднюю массу камня в куче (аналог среднего арифметического) - красный пунктир на рисунке - в нашем примере средняя масса всех камней равна 6,1.



Затем мы разбиваем нашу одну кучу на три кучи-группы. В каждой группе считаем среднюю массу камня группы (аналог среднего арифметического) - синий пунктир на рисунке. Быть одинаковыми эти три средние массы не могут (см. п. б)). Значит значения этих средних масс либо строго возрастают (например, как на рисунке: ср.масса гр1 < ср.масса гр2 < ср.масса гр3), либо одно меньше двух одинаковых других (см. п. а)). Запоминаем значение наибольшей средней массы в группе.
Далее, ***не изменяя количества камней в каждой группе***, меняем в них "камень-на-камень" камни. После каждой замены "камень-на-камень" считаем среднюю массу камня групп и

запоминаем наибольшее значение. Все эти наибольшие значения будут больше 6,1 (синенький пунктир наибольшего значения будет выше красненького пунктира). А наименьшее из этих наибольших будет самым близким к нему сверху.
Далее можно поменять количества камней в кучах-группах и повторить те же действия и рассуждения. Результат будет тем же: ***наименьшее из наибольщих значений будет самым близким к 6,1***.

========

Ну а теперь - необязательная часть. Но любопытным она может быть интересна. Вопрос: *Сколько различных (в смысле содержащихся в них чисел) групп по три из этих чисел можно составить?* Как посчитать? Вы изучали в школе Комбинаторику. Вот с её помощью и ответим на этот вопрос.

Сначала давайте посчитаем сколькими способами можно составить три группы из 10 чисел. Вот табличка. По вертикали в первом столбце стоят возможные количества чисел в группе 1 (от 1 до 8). По горизонтали в первой строке стоят возможные количества чисел в группе 2 (от 1 до 8). На пересечении столбцов и строк стоит количество чисел в группе 3 (ведь в сумме их 10). Для нас комбинаци $\{3{,}2{,}5\}$ (в гр1 3 числа, в гр2 2 числа, в гр3 5 чисел) и $\{5{,}2{,}3\}$ одинаковы. Поэтому зелененьким закрашены комбинации, у которых есть аналогичные, но в другом порядке. Уникальные комбинации не закрашены. Их всего 8.

		гр2							
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
гр1	*1*	8	7	6	5	4	3	2	1
	2	7	6	5	4	3	2	1	
	3	6	5	4	3	2	1		
	4	5	4	3	2	1			
	5	4	3	2	1				
	6	3	2	1					
	7	2	1						
	8	1							

гр1	гр2	гр3		
1	1	8	$C_{10}^1 \cdot C_9^1$	90
1	2	7	$C_{10}^1 \cdot C_9^2$	360
1	3	6	$C_{10}^1 \cdot C_9^3$	840
1	4	5	$C_{10}^1 \cdot C_9^4$	1260
2	2	6	$C_{10}^2 \cdot C_8^2$	1260
2	3	5	$C_{10}^2 \cdot C_8^3$	2520
2	4	4	$C_{10}^2 \cdot C_8^4$	6300
3	4	3	$C_{10}^3 \cdot C_7^4$	4200
				16830

Посчитаем сколькими способами эти восемь комбинаций троек можно заполнить 10-ю числами. Ещё одна табличка. Мы считаем число способов заполнения первой и второй группы (третья группа заполняется по "остаточному" принципу).
Сколькими способами можно заполнить гр1, состоящую из 1 числа, одним из 10 чисел? C_{10}^1 способами. А сколькими способами можно заполнить гр2, состоящую из 1 числа, одним из 9 (оставшихся после заполнения гр1) чисел? C_9^1 способами. Тогда комбинацию троек чисел $\{1{,}1{,}8\}$ можно составить $C_{10}^1 \cdot C_9^1$ способами. По аналогии заполним все строки.

Тогда число всех возможных комбинаций заполнения всех возможных трёх групп чисел - 16830 способов. Может попробовать перебором решить задачу? Шутка.

Я это делал на электронных таблицах. Но, насколько я понимаю, на экзамене пользоваться даже калькулятором нельзя. Поэтому придется много устно считать. А это риск элементарных описок-ошибок.
Пункты а) и б) - простые. Пункт в) неприятен тем, что подразумевает много переборов и устного счета с риском ошибок. Кому-то "повезет"!

Задача №9:
а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение: *Задача на натуральные числа и признаки делимости.*
а) 2529: произведение цифр равно 180, а сумма равна 18. Полное решение аналогичного вопроса - см. п. в).
б) Пусть a,b,c,d - цифры такого числа. a,b,c,d - натуральные и $1 \leq a, b, c, d \leq 9$ (нолей быть не может, иначе произведение станет 0).
Тогда $abcd = 175(a+b+c+d)$ или $abcd = 25 \cdot 7 \cdot (a+b+c+d)$. Значит левая часть делится на 25 и, по крайней мере, две цифры числа равны 5. Пусть c=5 и d=5 (можно было бы взять любую пару - это не влияет на ответ). Тогда $ab = 7 \cdot (a+b+10)$. Поскольку $a, b \leq 9$ то $ab \leq 81$. С другой стороны $a, b \geq 1$ и $7 \cdot (a+b+10) \geq 7 \cdot 12 = 84$. Поэтому $ab = 7 \cdot (a+b+10)$ невозможно. Ответ - нет.
в) Пусть a,b,c,d - цифры такого числа. a,b,c,d - натуральные и $1 \leq a, b, c, d \leq 9$ (нолей быть не может, иначе произведение станет 0).
Тогда $abcd = 50(a+b+c+d)$ или $abcd = 25 \cdot 2 \cdot (a+b+c+d)$. Значит левая часть делится на 25 и, по крайней мере, две цифры числа равны 5. Пусть c=5 и d=5 (можно было бы взять любую пару - это не влияет на ответ). Тогда $ab = 2 \cdot (a+b+10)$. Тогда, по крайней мере, одно из чисел a, b - чётное. Пусть чётным будет b. Начинаем небольшой перебор:
- $b = 2 \to a = a + 12$ - невозможно;
- $b = 4 \to a = 14$ - невозможно;
- $b = 6 \to a = 8$ - OK!
- $b = 8 \to a = 6$ - OK!

Ответ: все числа вида 8655, получаемые перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Хорошая простая задачка.

Задача №10: На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.
а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Решение: *Задача на натуральные числа.*
а) Например, если были написаны по 10 раз числа 11 и 1 и со всеми провели эти действия, то их среднее было равно 6, а после описанных действий оно станет равно 10.

б) Пусть n - количество изначально записанных единиц, которые превратятся в нули; m - количество прочих уменьшаемых чисел.
Тогда:
- ***до действий***: исходная сумма всех чисел равна $27 \cdot 20 = 540$; сумма всех чисел, кроме будущих нулей, равна $540 - n$ и их $20 - n$ штук.
- ***после действий***: сумма всех чисел станет $540 - n - m$, этих чисел $20 - n$ штук.

$$\frac{540 - n - m}{20 - n} = 34 \quad \rightarrow \quad 540 - n - m = 680 - 34n \quad \rightarrow \quad 140 = 33n - m$$

Или $n = \dfrac{140 + m}{33}$. Минимально $m = 0$, тогда $n \geq 5$. Но тогда $m \geq 33 \cdot 5 - 140 = 25$, что невозможно, поскольку чисел всего 20. Ответ: нет.

в) n, m - как в п. б). Надо найти максимальное значение $\dfrac{540 - n - m}{20 - n}$. Очевидно надо считать $m = 0$. Тогда $\dfrac{540 - n}{20 - n} = 1 + \dfrac{520}{20 - n}$ - это значение надо максимизировать, следовательно надо найти максимально возможное n. Исходная сумма всех чисел $540 \leq n + 40(20 - n)$ (если бы все числа, кроме единиц, были равны максимальным 40), откуда $n \leq 6$. Тогда для $n = 6$ значение $1 + \dfrac{520}{20 - n} = 38\dfrac{1}{7}$. Ответ: $38\dfrac{1}{7}$.

Хорошая простая задачка. Главное - аккуратненько перевести ***все условия задачи*** *в уравнения-неравенства.*

Задача №11: Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение ***всем*** участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.
а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?
б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?
в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл учеников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших - 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение: ***Задача на натуральные числа.***
В условии можно запутаться: есть баллы, полученные учеником "до добавления 5", и есть баллы, полученные учеником "после добавления 5". После написания теста добавили 5 баллов ***всем*** и это стал их итоговый балл для вынесения суждения о прохождении теста. Надо уяснить о каком виде баллов идет речь, когда говорят о "среднем балле".

Итак, у нас есть три "вида" учеников: те, кто сразу ("до добавления") набрал не менее 83 баллов (они бы и без этих 5 баллов сдали тест); те, кто набрал меньше 83, но не менее 78 (им добавленные 5 баллов позволили тест сдать) и те, кто набрал менее 78 баллов (им 5 баллов не помогли и они тест не сдали).

На вопросы а) и б) надо ответить, подбором-перебором вариантов. В группу для перебора надо включить минимальное количество учеников, например, 3 ученика по одному "типу".
а) Пусть было 3 ученика, набравших 100, 82 и 2 балла "до добавления". Тогда средний балл не сдавших тест "до добавления" равен $\dfrac{82 + 2}{2} = 42$. После добавления у этих учеников оказалось 105, 87 и 7 баллов. Тогда средний балл учеников, не сдавших тест, равен 7 (***понизился***). Ответ - "да".

б) В примере из п. а) средний балл учеников, сдавших тест "до добавления" (1 ученик), равен 100. "После добавления" средний балл учеников, сдавших тест (2 ученика), равен

$\frac{105 + 87}{2} = 96$ (***понизился***). Средний балл учеников, не сдавших тест "до добавления" (2 ученика), равен $\frac{82 + 2}{2} = 42$, а "после добавления" он равен 7 (1 ученик) (***понизился***). Ответ - "да".

в) Ой-ёй-ёй! *Вот тут предельная внимательность: о каких средних баллах ("до добавления"/ "после добавления") идет речь!*
Как я и говорил раньше, удобнее решать такие задачи не в средних баллах, а в суммах баллов.

Можно все неизвестные объявить как переменные (общее количество учеников, количества учеников по "видам", суммы набранных ими баллов) и, получив систему из шести уравнений при семи неизвестных, героически это всё решать, рискуя ошибиться в расчетах и преобразованиях.

А можно задать только те переменные, которые нам нужны для ответа. Ну тут уж нужна математическая "чуйка", опыт и ***внимательное чтение условий задачи*** *(ведь сказано: "... средний балл участников, сдавших тест, ... учеников, не сдавших тест...")*.

Вводим ***нужные*** обозначения:
l - общее число учеников (нам нужно будет найти минимум этой величины);
n - число учеников, набравших не менее 83 баллов, - сдавших тест "до добавления";
m - число всех учеников, сдавших тест "после добавления".
Вот и хватит нам переменных.

Тогда сумма баллов всех учеников "до добавления" равна $90l$. Она состоит из суммы баллов сдавших тест "до добавления" ($100n$) и суммы баллов не сдавших тест "до добавления" ($75(l - n)$). Поэтому $90l = 100n + 75(l - n) \quad \rightarrow \quad 3l = 5n$

Тут вот ещё что очень важно заметить: сумма баллов всех учеников "после добавления" стала $90l + 5l = 95l$. Она состоит из суммы баллов сдавших тест "после добавления" ($103m$) и суммы баллов не сдавших тест "после добавления" ($79(l - m)$). Поэтому
$95l = 103m + 79(l - m) \quad \rightarrow \quad 2l = 3m$

Итак: $3l = 5n$ и $2l = 3m$, откуда следует, что l делится на 3 и 5, n делится на 3, m делится на 3.

Покажем (***а это надо показать обязательно!!!***), что l может равняться минимальному значению 15. Пусть изначально 5 учеников набрали по 54 балла, один ученик - 60 баллов и 9 учеников по 80 баллов. Тогда средний балл равен 70, средний балл учеников, сдавших тест, равен 80, а средний балл учеников, не сдавших тест, равен 55. После добавления средний балл учеников, сдавших тест, стал равен 82, а не сдавших тест - 58. Все условия выполнены.

Ответ: 15.

В принципе задачка не сложная. Но надо не запутаться в средних баллах "до добавления" и "после добавления". И внимательно смотреть в текст задачи, вводя те переменные, которые подразумеваются условиями.

Задача №12: Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{10}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{5}{12}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 8 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 16 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Решение: ***Задача на натуральные числа.*** Общие подготовительные действия.

Пусть:

m_1 - количество мальчиков, сходивших в кино;
m_2 - количество мальчиков, сходивших в театр;
d_1 - количество девочек, сходивших в кино;
d_2 - количество девочек, сходивших в театр.

По условию: $\frac{m_1}{m_1+d_1} \le \frac{5}{12}$; $\frac{m_2}{m_2+d_2} \le \frac{3}{10}$

Далее для пунктов а) и б): $m_1+d_1+m_2+d_2=16$

Перепишем $\frac{12}{5}m_1 \le m_1+d_1$, $\frac{10}{3}m_2 \le m_2+d_2$ и сложим

$\frac{12}{5}m_1+\frac{10}{3}m_2 \le m_1+d_1+m_2+d_2=16$ или $36m_1+50m_2 \le 240$.

Из последнего очевидно, что $m_1<7$ и $m_2<5$.

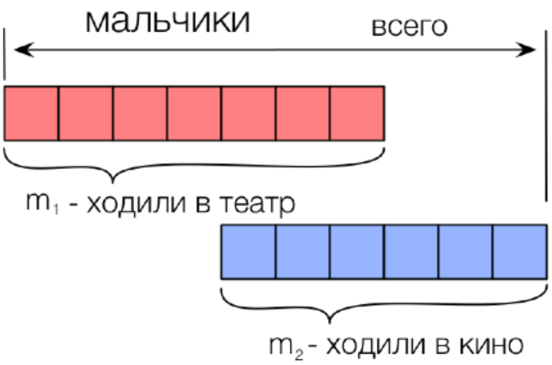
	1	2	3	4
1	86	136	186	236
2	122	172	222	272
3	158	208	258	308
4	194	244	294	344
5	230	280	330	380
6	266	316	366	416

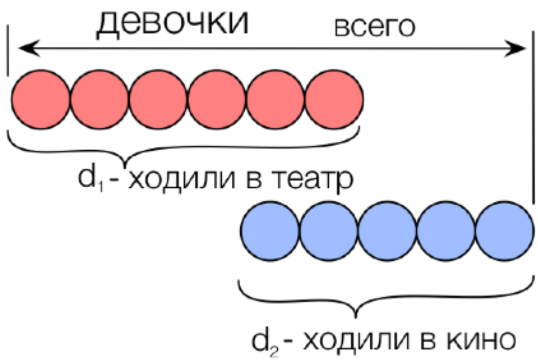
В табличке рассчитано значение $36m_1+50m_2$ (в первом столбце - m_1, в первой строке - m_2). Желтым закрашены клетки, удовлетворяющие условию $36m_1+50m_2 \le 240$. При $m_1=5$ и $m_2=1$ имеем наибольшее количество мальчиков равным 6.

Отвечаем на пункты:
а) не могло - максимум = 6.
б) 6.

в) Нам надо найти минимальное значение величины $\frac{D}{M+D}$ (D - всего девочек; M - всего мальчиков). Перепишем его как $\frac{1}{1+\frac{M}{D}}$. Чтобы найти его минимальное, надо найти максимальное $\frac{M}{D}$. Чтобы $\frac{M}{D}$ было максимально, надо, чтобы M было максимально и D было минимально.

Взглянем на рисунки:





В общем случае $m_1 + m_2 \leq M$. Максимально будет тогда, когда $m_1 + m_2 = M$: когда ***каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино***.
В общем случае $d_1 + d_2 \leq D$. Минимально будет тогда, когда $d_1 = d_2 = D$: когда ***каждая девочка сходила и в театр и в кино.***
Это важные рассуждения для облегчения решения задачи.

Из условия: $\dfrac{m_1}{m_1 + D} \leq \dfrac{5}{12}$ и $\dfrac{m_2}{m_2 + D} \leq \dfrac{3}{10}$. Значит $\dfrac{m_1}{D} \leq \dfrac{5}{7}$ и $\dfrac{m_2}{D} \leq \dfrac{3}{7}$. Тогда $\dfrac{m_1 + m_2}{D} \leq \dfrac{8}{7}$.
Поэтому доля девочек в группе $\dfrac{D}{M + D} = \dfrac{1}{1 + \frac{M}{D}} \geq \dfrac{1}{1 + \frac{8}{7}} = \dfrac{7}{15}$.
Наименьшая доля девочек в группе равна $\dfrac{7}{15}$.

Хорошая задачка. С одной стороны простая, но требующая порассуждать.

Задача №13:
а) Приведите пример трёхзначного числа, у которого ровно 5 натуральных делителей.
б) Существует ли такое трёхзначное число, у которого ровно 15 натуральных делителей?
в) Сколько существует таких трёхзначных чисел, у которых ровно 20 натуральных делителей?

Решение: ***Задача на делители натуральных чисел.***
Трехзначные числа: $100 \leq n \leq 999$
На а) еще можно ответить с помощью перебора; б) перебор может занять кучу времени; в) требует какого-либо рассуждения и обоснования.

Поэтому для решения задачи надо знать ***основную теорему арифметики и следствие*** из неё. А иначе никак. Напомню: Основная теорема арифметики

Каждое натуральное число a>1 можно единственным способом представить в виде $a = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots p_n^{s_n}$, где $p_1, p_2, \ldots p_n$ - **различные** простые числа, а $s_1, s_2, \ldots s_n$ - натуральные числа. Иначе говоря, и это интуитивно понятно, *любое натуральное больше 1 можно разложить на произведение степеней простых чисел.* Пример:
$400 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10 = 2^4 \cdot 5^2$ *(p_1=2, s_1=4; p_2=5; s_2=2)*
Следствие: ***Число натуральных делителей*** числа а равно $(s_1+1)\cdot(s_2+1)\cdot\ldots\cdot(s_n+1)$

Теперь отвечаем на вопросы задачи.
а) 5 делителей: 5 число простое - не представить как произведение, значит 5=s+1, s=4, значит наше число имеет вид p^4, где p - простое. Трехзначное число будет одно: 5^4=625, делители: 1, 5, 25, 125, 625. 7^4=2401 - уже 4-значное.

б) 15 делителей: 15 число составное - можно представить единственным способом как 3·5. Тогда $s_1=2; s_2=4$, а число будет выглядеть в виде: $p_1^2 \cdot p_2^4$. Можно поиграться простыми числами и найти такое число. В примере выше я как раз такое и приводил: $400=2^4 \cdot 5^2$. Его 15 делителей: 1,2,4,5,8,10,16,20,25,40,50,80,100,200,400.

в) 20 делителей: 20 число составное - можно представить как 2·10, как 4·5 и как 2·2·5.
Придётся много считать - не ошибитесь!

- вариант 2·10: $s_1=1; s_2=9$, число a= $p_1^1 \cdot p_2^9$.
  Поиграемся-посчитаемся простыми числами. Таких трехзначных чисел нет.
- вариант 4·5: $s_1=3; s_2=4$, число a= $p_1^3 \cdot p_2^4$.
  Поиграемся-посчитаемся простыми числами. Таких трехзначных чисел два: $3^3 \cdot 2^4=432$, $2^3 \cdot 3^4=648$.
- вариант 2·2·5: $s_1=1; s_2=1; s_3=4$, число a= $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^4$.
  Поиграемся-посчитаемся простыми числами. Таких трехзначных чисел семь (они приведены в табличке): 240, 336, 528, 624, 810, 816, 912.

	s_1	s_2	s_3	**a**
	1	1	4	
p	3	19	2	912
p	3	17	2	816
p	3	13	2	624
p	3	11	2	528
p	3	7	2	336
p	3	5	2	240
p	2	5	3	810

Тогда общее число трехзначных чисел с 20-ю делителями - ***девять***.
В задаче не просят эти делители приводить.

Если знать только школьную программу - то можно решить только п. а).
Если знать больше - то всё довольно просто. Много устного счета.

> Задача №14: Назовем натуральное число палиндромом, если в его десятичной записи все цифры расположены симметрично (совпадает первая и последняя цифры, вторая и предпоследняя, и т.д.). Например, числа 121 и 123321 являются палиндромами.
а) Приведите пример числа-палиндрома, которое делится на 15.
б) Сколько существует пятизначных чисел-палиндромов, делящихся на 15?
в) Найдите 37-е по величине число-палиндром, которое делится 15.

Решение: ***Задача на натуральные числа.***
а) Число-палиндром - это число, которое остается неизменным, если его читать наоборот. Возьмем четырехзначное число-палиндром и составим его из цифр a и b, получим: abba. Нужно подобрать цифры a и b так, чтобы число abba делилось на 15, т.е. оно должно делиться и на 3, и на 5. Чтобы число делилось на 5, цифра a должна быть равна 5 (0 не подходит по смыслу). Остается подобрать цифру b так, чтобы число 5bb5 было кратно 3 (число 10+2b должно делиться на 3), получим: ***5115, 5445, 5775 и т.д.***

б) Аналогично поступим с 5-значным числом. Получим число вида 5aba5. Оно должно делиться на 3 (10+2a+b должно делиться на 3). a и b - от 0 до 9. Начинаем перебор.
b=0 => 10+2a должно делиться на 3 => a=1,4,7
b=1 => 11+2a должно делиться на 3 => a=2,5,8
b=2 => 12+2a должно делиться на 3 => a=0,3,6,9
b=3 => 13+2a должно делиться на 3 => a=1,4,7 - то же самое, что и при b=0. И это понятно - b увеличилось на 3 и делимость на 3 числа 5aba5 сохранилась. Поэтому для b=0,1,2 10 подходящих значений a (10 5-зн чисел-палиндромов, делящихся на 15). Тоже по 10 a для b=3,4,5 и b=6,7,8. Для b=9 имеем 3 варианта. Всего: ***33*** 5-значных чисел-палиндромов, делящихся на 15.

в) Число палиндром делится на 15: значит имеет вид 5mn...nm5 и сумма цифр его делится на 3. Начнем перебор с самых младших чисел-палиндромов. Самое младшее - 3-значное вида 5a5.
- трехзначные вида 5a5: 525, 555, 585;
- четырехзначные вида 5aa5: 5115, 5445, 5775; уже 6 наковыряли!

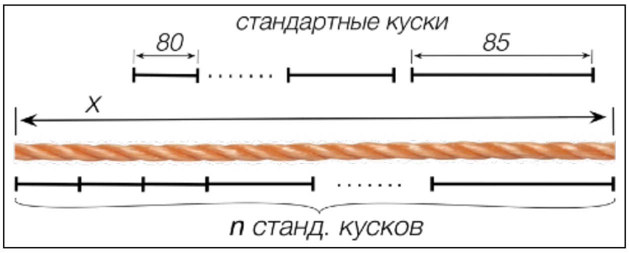
- пятизначные вида 5aba5 (из предыдущего пункта мы получили, что 5-зн всего 33, значит надо найти 37-6=*31-е* 5-зн число-палиндром - пред-пред-последнее 5-зн): это при a=9 и b=2 - число *59295*.

Хорошая простая задачка.

Задача №15: Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше 80 см, но не больше 85 см (назовем такие куски стандартными).
а) Некоторый моток веревки разрезали на 16 стандартных кусков, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число стандартных одинаковых кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?
б) Можно ли разрезать на стандартные куски моток длиной 700 см?
в) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Решение: ***Задача на натуральные числа.***
Верёвка режется без остатка! Стандартные куски: 80,81,82,83,84,85 см.
Давайте прикинем возможные виды разрезаний по условию задачи для небольших величин длин верёвки. Простым подбором.

l	разрезание	l	разрезание	l	разрезание	l	разрезание
< 80	нет	**....**	....	**240**	80 + 80 + 80	**256-319**	нет
80	1 кусок 80	**165**	80 + 85	**....**	....	**320**	4 x 80
....	....	**166**	81 + 85	**245**	80 + 80 + 85	**321**	3 x 80 + 81
85	1 кусок 85	**....**	....	**246**	80 + 81 + 85	**....**	....
86-159	нет	**170**	85 + 85	**....**	....		
160	80 + 80	**171-239**	нет	**255**	85 + 85 + 85		



Рассмотрим моток веревки длиной x см. Если бы мы разрезали эту верёвку на n кусков ***одинаковой длины 80*** ($80n$ плюс возможен маленький остаток < 80), то могли бы записать: $x \geq 80n$ (равенство возникает, если остатка нет).
А теперь разрежем эту верёвку на n кусков ***одинаковой длины 85*** так, чтобы последний кусок длиной 85 либо точно "вписывался" в верёвку, либо немного "торчал". Тогда сможем записать: $x \leq 85n$ (равенство возникает, когда последний кусок точно "вписывается" в верёвку, иначе говоря, длина веревки x кратна 85). Тогда общее условие того, что верёвку можно разрезать на n стандартных ***одинаковых*** кусков: $80n \leq x \leq 85n$.
А условие того, что верёвку можно разрезать на n стандартных ***разных*** кусков: $80n < x < 85n$ (неравенства становятся строгими).

Эту "потерю равенства" в неравенстве надо пояснить. Длина $80n$ - это минимальная длина, которую можно набрать n 80-сантиметровыми кусками. А если куски разные, то среди этих n кусков, которыми набрали длину x, есть и куски, бОльшие 80 см. Поэтому x разными кусками будет ***больше*** $80n$ одинаковыми 80-см кусками (при этом выражение $80n \leq x$ тоже будет верным, но выражение $80n < x$ ***будет точнее***). Поэтому в левой части двойного неравенства знак "$\leq$" меняется на знак "<". Аналогичные рассуждения (*85 - самый большой кусок, а коли куски разные, то есть куски и меньше*) - про замену правого знака неравенства "$\leq$" на знак "<".

Итак:
$80n < x < 85n$ - если веревка длиной x режется на n стандартных ***разных*** кусков;
$80n \le x \le 85n$ - если веревка длиной x режется на n стандартных ***одинаковых*** кусков

а) По условию имеем $80 \cdot 16 < x < 85 \cdot 16$ (куски разные). Или $1280 < x < 1360$ [1].
Спрашивается, каково максимальное n, чтобы выполнялось $80n \le x \le 85n$ [2] (куски одинаковые)?
Если веревку можно разрезать на 16 равных кусков, то:
- либо $x = 80 \cdot 16 = 1280$ - ***но этого быть не может***, поскольку 1280 не удовлетворяет [1];
- либо $x = 81 \cdot 16 = 1296$ - это возможно, поскольку 1296 удовлетворяет [1];
- либо $x = 82 \cdot 16 = 1312$ - это возможно, поскольку 1312 удовлетворяет [1];
- либо $x = 83 \cdot 16 = 1328$ - это возможно, поскольку 1328 удовлетворяет [1];
- либо $x = 84 \cdot 16 = 1344$ - это возможно, поскольку 1344 удовлетворяет [1];
- либо $x = 85 \cdot 16 = 1360$ - ***но этого быть не может***, поскольку 1360 не удовлетворяет [1].

То есть, если верёвку длиной x, удовлетворяющей $1280 < x < 1360$ [1], можно разрезать на 16 одинаковых стандартных кусков, то x может быть либо 1296, либо 1312, либо 1328, либо 1344.

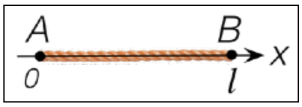
Если веревку можно разрезать на 17 равных кусков, то $x = 80 \cdot 17 = 1360$ - ***но этого быть не может***, поскольку 1360 не удовлетворяет [1]. Остальные условия и проверять не стоит, поскольку они точно не вписываются в *ОО*[2]. Значит на 17 равных кусков верёвку длиной x, удовлетворяющей $1280 < x < 1360$ [1], разрезать нельзя.

Поэтому ответ: n максимальное - 16.

n	*80n*	*85n*
10	800	850
9	720	765
8	640	680

б) То есть надо найти такое n, чтобы выполнялось $80n \le 700 \le 85n$ (двойные неравенства взял нестрогие, поскольку у них ОО шире, чем у строгих).
Перебором. Таких n нет - см. табличку. 700 ни в один из интервалов для $n = 8{,}9{,}10$ не вписывается. Ответ: нет.

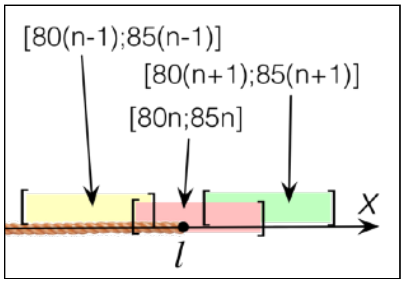
в) "Размотаем" веревку по координатной прямой так, чтобы начало верёвки (точка А) совпадало с 0, а конец веревки (точка В) имел координату l. Если верёвку можно разрезать на n стандартных кусков, то $l \in [80n; 85n]$ для некоторых натуральных n. Если верёвку нельзя разрезать на n стандартных кусков, то это означает, что $l \notin [80n; 85n]$ ни для какого натурального n.



Взгляните на вышеприведенную табличку: для малых n между интервалами $[80n; 85n]$ и $[80(n+1); 85(n+1)]$ есть "зазор": для $n = 9$ интервал будет $[720; 765]$, а для $n = 10$ интервал будет $[800; 850]$. Они не перекрываются. Если веревка будет длиной $l = 780$, то её конец попадает в "зазор" между интервалами и такую верёвку нельзя разрезать на n стандартных кусков.

n	*80n*	*85n*
20	1600	1700
21	1680	1785
22	1760	1870

Но по мере роста n интервалы начинают перекрываться (см. табличку слева), и, начиная с некоторых значений n любую верёвку можно разрезать на n стандартных кусков, поскольку l обязательно попадёт в какой-нибудь из перекрывающихся интервалов. Так вот наша задача и состоит в том, чтобы найти первое такое n, для которого не будет "зазоров" в интервалах, и из него определить наименьшую соответствующую длину l.



для больших ***n***

---

[2] *ОО - "область определения" - в данном случае - интервал, соответствующего двойному неравенству*

Условие отсутствия "зазоров" очевидно: $85n \geq 80(n+1)$, откуда $n \geq 16$. То есть, начиная с $n = 16$ между интервалами не будет "зазоров". А какой длине l это соответствует? А вот такой: $80 \cdot 16 \leq l \leq 85 \cdot 16$. То есть, начиная с длины $l = 80 \cdot 16 = 1280$ см все верёвки можно разрезать на стандартные куски.
Ответ: 1280 см.

Уфф! Заковыристая задача. Старался в решении быть максимально подробным и понятным. Главное - это в начале прийти к двойному неравенству и разобраться со знаками "≤" /"<". Какие рекомендации могу дать? Только одну: внимательно проследите, поймите и запомните логику решения. Тут решение надо запоминать целиком. Много счёта.

Для любознательных: к решению это не относится

А что значит математически "разрезать моток веревки длиной x на стандартные куски длиной 80, 81, 82, 83, 84 и 85"?
Это значит: найти решение уравнения вида $x = 80k + 81l + 82m + 83p + 84q + 85r$, где k, l, m, p, q, r (количества стандартных кусков той или иной длины, используемых в данном разрезании) - либо 0, либо натуральные. А найти все решения этого уравнения - это значит найти все возможные варианты разрезаний.

В задаче мы выяснили, что начиная с $x = 1280$ такое решение всегда найдётся (разрезание возможно). А сколько разных разрезаний возможно? - спросите вы. Мне тоже стало интересно. Я исследовал диапазон длин x из интервала $1280 \leq x \leq 1360$ (то есть разрезания на 16 кусков как равной, так и разной длины). Надо было действовать перебором. И перебор этот ох-какой-здоровый. А пусть компьютер перебирает, - решил я и написал небольшую программку перебора на языке Си. Вот её текст.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
/* Разрезание мотка веревки */
int main()
{	int z;			// проверяемая длина
	int k,l,m,p,q,r;	// коэффициенты стандартных кусков
	int s;			// сумма коэффициентов
	int w;			// рабочая
	int x;			// общий счетчик успешных разрезаний
	int y;			// счетчик разрезаний одной длины

x=0; y=0;
printf("Режем верёвку на 16 частей. Поехали!\n");
for (z=1280; z<=1360; z++)
{	for(k=0; k<=16; k++)
	{	for(l=0; l<=16; l++)
		{	for(m=0; m<=16; m++)
			{	for(p=0; p<=16; p++)
				{	for(q=0; q<=16; q++)
					{	for(r=0; r<=16; r++)
						{	w=80*k+81*l+82*m+83*p+84*q+85*r;
							s=k+l+m+p+q+r;
							if(w==z)
							{	// есть разрезание!!!
								x++; y++;
								printf("L=%4d\t",z);
```

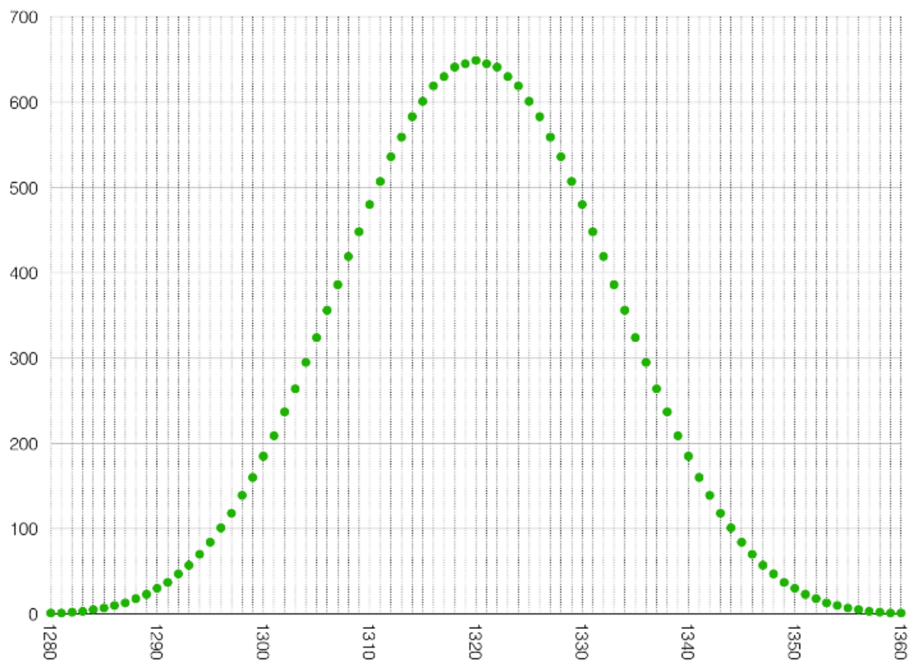
```
                                        if(k==0) printf(" \t");  else printf("%4d\t",k);
                                        if(l==0) printf(" \t");  else printf("%4d\t",l);
                                        if(m==0) printf(" \t");  else printf("%4d\t",m);
                                        if(p==0) printf(" \t");  else printf("%4d\t",p);
                                        if(q==0) printf(" \t");  else printf("%4d\t",q);
                                        if(r==0) printf(" \t");  else printf("%4d\t",r);
                                        printf("s=%4d\t",s); printf("x=%6d\n",x);
                                    }}}}}}}
        printf("---------------------------------- y=%4d\n",y); y=0;
} return 0; }
```

Программа перебирала секунд 30 и выдала все варианты разрезаний. Как вы думаете, сколько всего возможно разрезаний на стандартные куски как равной, так и разной длины в интервале длин $1280 \le x \le 1360$? Держитесь крепко за стул! ***20 349**! Двадцать тысяч триста сорок девять вариантов разрезаний на 16 кусков. И это только в диапазоне длин* $[1280, 1360]$*!* Причём на куски равной длины - всего 6 вариантов.

Я не буду приводить список всех возможных разрезаний (весь список "уложился" в 300 страниц). Просто приведу несколько примеров из него в табличке.

k	l	m	p	q	r	x
11	2	1	1	1	0	1291
11	2	1	1	1	0	1291
11	2	1	1	1	0	1291
7	6	1	0	0	2	1298
8	0	6	2	0	0	1298
8	4	1	1	1	1	1298
0	9	4	1	1	1	1309
0	10	0	5	1	0	1309
0	10	2	2	1	1	1309
2	8	1	0	5	0	1310
3	4	1	8	0	0	1310
8	1	1	1	1	4	1310
0	0	0	0	5	11	1355
1	0	0	0	0	15	1355
0	0	0	2	1	13	1355

Вы заметили, что для одной и той же длины верёвки возможны несколько вариантов разрезаний. А сколько вариантов разрезаний для одной и той же длины верёвки возможно? - спросите вы. Моя умненькая программа дала ответ и на этот вопрос: в зависимости от длины x из диапазона $[1280, 1360]$ - от 1 до 649 вариантов для одной длины. Интересным оказалось и распределение количества вариантов в зависимости от длины x из диапазона $[1280, 1360]$. Вот график этого распределения:



Красиво и неожиданно! На краях интервала при $x = 1280$ и $x = 1360$ возможен только один вариант разрезаний: на равные стандартные куски 80 и 85 соответственно. А ближе к середине количество вариантов различных разрезаний стремительно растёт. ЗдОрово же! Я всё это рассказал для того, чтобы вы увидели: даже в самой занудной и заковыристой задаче можно найти интересные для пытливого ума стороны. Дерзайте!

Задача №16: В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника - целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?
б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальные поделить поровну на 70 сотрудников?
в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Решение: Стратегия выдачи премий должна быть такая: поскольку 1000-купюрами можно выдать любую премию, то сначала надо "избавиться" (там, где это возможно) от 5000-купюр.

а) В этом случае все получают поровну. Проверим, возможно ли это? Разделим общую сумму 600 000 на 40 сотрудников, получим, что каждый должен получить по 15 000. Так как это число кратно и 1000 и 5000, то всем 40 сотрудникам можно раздать равную премию в указанных купюрах. Ответ: да.

б) Сумма, оставшаяся после выплаты 40 000, равна 560 000. При делении на 70 сотрудников получаем выплаты по 8000. Так сделать не удастся, поскольку $8000 = 5000 + 3 \cdot 1000$ (каждому из 70 придется заплатить как минимум три 1000-купюры) (вариант $8000 = 8 \cdot 1000$ тоже возможен, но куда тогда девать 5000-купюры?) и для 70 сотрудников нужно будет 210 1000-купюр, а их всего 100 (считаем, что 40 000 выплатили 5000-купюрами). Ответ: нет.

в) Решение типа "одному выдать 600 000, а остальным по 0" - не проходят. Премии могут быть разными ***ненулевыми***. Премии кратны 1000. Мы должны найти такое решение, которое будет справедливым для ***любого варианта распределения премий***.

Любую премию сотруднику можно выдать купюрами по 5000 + от 1 до 4 купюр по 1000. Представим, что попался "наихудший вариант" ("наихудший вариант" - максимум 1000-купюр на минимум сотрудников), где сотрудникам пришлось дать по 4 купюры по 1000 рублей. Максимум таких сотрудников может быть 25 (сколько им пришлось дать 5000-купюр - не суть важно). После этого остались только 5000-купюры. Чтобы удовлетворить условию "любого варианта распределения премий" мы должны 26-му сотруднику отдать остаток (ведь общая сумма - ровно 600 000). Ответ: 26.

Хорошая простая задача.

Задача №17: Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 8750.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение: ***Задача на натуральные числа.***
а) Пусть n - натуральное. Тогда по условиям задачи последовательность может быть либо n, $12n$, либо $12n$,n и $n + 12n = 13n = 8750$. Но 8750 на 13 не делится, поэтому ответ: нет.

б) По условиям задачи последовательность может быть либо $n, 12n, n$, либо $12n, n, 12n$.
В первом случае имеем: $14n = 8750$. 8750 на 14 делится.
Во втором случае имеем: $25n = 8750$. 8750 на 25 делится. Поэтому ответ: да.

в) Чтоб было наибольшее количество членов в последовательности надо взять начальное минимальное n=1. Тогда возможны 2 варианта: *1+12 + ... 1+12=8750 и 1+12 + ... 1+12+1=8750*. Или по другому: k(1+12)=8750 и k(1+12)+1=8750. 8750 не делится на 13, 8750-1=8749 делится на 13. Поэтому k(1+12)+1=8750. k=673, а число членов - 2k+1=1347

Простая задача.

➤ Задача №18: Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел -1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.
а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение: ***Задача на целые числа.***
а) Среди двух наборов этих восьми чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю. Ответ: нет.
б) Среди двух наборов этих восьми чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа (с двух сторон), и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1. Ответ: нет.
в) Среди двух наборов этих восьми чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.
Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; -2); (-2; 1); (-3; 4); (4; -3); (-5; 7); (7; -5); (-8; 9); (9; -8).

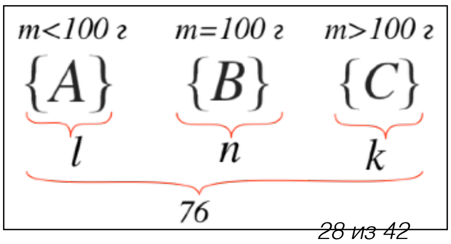
Простая задача.

➤ Задача №19: В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым (***я бы даже сказал - натуральным, говорить о фрукте нулевой и отрицательной массы не позволяет физика***) числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.
а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?
б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?
в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Решение: ***Задача в натуральных числах.***
Вводим обозначения:

$\{A\}$- подмножество всех фруктов массой меньше 100 г, l - их количество;
$\{B\}$ - подмножество всех фруктов массой 100 г, n - их количество.
$\{C\}$ - подмножество всех фруктов массой больше 100 г, k- их количество;

Тогда $k + l + n = 76$



Переводим условия задачи в формулы. ***Работаем не в средних арифметических, а в суммах.***

Масса всех фруктов: $76 \cdot 100 = \sum\{A\} + \sum\{B\} + \sum\{C\}$, под $\sum\{A\}$ понимается сумма масс всех фруктов из $\{A\}$ и аналогично для $\sum\{B\}$ и $\sum\{C\}$.
Масса фруктов легче 100 г: $85 \cdot l = \sum\{A\}$, поскольку эта масса >0, то и $l > 0$
Масса фруктов тяжелее 100 г: $124 \cdot k = \sum\{C\}$, поскольку эта масса >0, то и $k > 0$
Масса фруктов весом 100 г: $\sum\{B\} = 100 \cdot n$
Масса всех фруктов: $\sum\{A\} + \sum\{B\} + \sum\{C\}$, поэтому: $7600 = 85l + 124k + 100n$

Вот два уравнения, от которых будем плясать: $\begin{cases} k + l + n = 76 \\ 7600 = 85l + 124k + 100n \end{cases}$

Они должны решаться в натуральных числах. Кстати, проверим, может ли $n = 0$: подставляем $n = 0$ в систему, выражаем l через k и получаем $380 = 13k$, что не имеет решения в натуральных числах. Значит $k > 0, \quad l > 0, \quad n > 0$
А это значит, что в ящике есть и фрукты легче 100 г, и равные 100 г и тяжелее 100 г, поэтому условие "есть хотя бы два фрукта различной массы" - лишнее (ну это на совести составителей).

Приготовления закончены. Начинаем отвечать на вопросы задачи.

а) $k = l$? В систему подставляем $k = l$ и получаем: $\begin{cases} 2k + n = 76 \\ 7600 = 209k + 7600 - 200k \end{cases}$ или $\begin{cases} 2k + n = 76 \\ 200k = 209k \end{cases}$, но $k \neq 0$, поэтому $k \neq l$.
Ответ: *нет*.

б) $n < 8$? Из [1] выражаем l через k: $l = 76 - k - n$ и подставляем во [2]: $7600 = 85(76 - n - k) + 124k + 100n$. После упрощений: $380 = 13k + 5n$ или $n = 76 - \dfrac{13k}{5}$ [3], откуда ясно, что k кратно 5 и может принимать значения *5,10,15,20,25* (30 и больше не может: тогда $n < 0$).
Составим табличку по формулам возможных значений k, l, n:

k	l	n
5	*8*	*63*
10	*6*	*50*
15	*24*	*37*
20	*32*	*24*
25	*40*	*11*

Из таблички ясно, что $n \geq 11$. Ответ: *нет*.

в) Обратимся к формуле для массы фруктов тяжелее 100 г: $124 \cdot k = \sum\{C\}$. Причем $m_i \geq 101$ (m_i - масса фрукта из $\{C\}$, m_i - натуральное). Максимальное m_i будет тогда, когда остальные m_i будут минимальны, то есть равны 101 (продумайте это утверждение - оно не сложное!).

Тогда $124k = 101(k - 1) + M$, где M - максимальная масса фрукта. Или $M = 23k + 101$.
Надо найти максимальное натуральное M для допустимых значений $k = 5,10,15,20,25$.
Очевидно, что максимальное M будет при $k = 25$: $M = 676$ г.

Задача не сложная: составляем уравнения для натуральных чисел, находим допустимые значения, соображаем на тему "если сумма чисел постоянна, то максимальным будет одно из чисел тогда, когда остальные минимальны".

Задача №20: В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест написал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал ***натуральное*** (то есть больше 0) количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом (*я бы опять сказал - натуральным, ведь отрицательные и нулевые баллы не ставились*). После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?
б) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?
в) Средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

Решение: ***Задача в натуральных числах.***
Давайте сначала выведем общие формулы, которые нам помогут ответить на все вопросы.
Вводим обозначения:
m - число учащихся школы №1, писавших тест; в школе №2 тест писали $51 - m$ - учащихся.
m - натуральное.
X - сумма баллов, набранных учащимися школы №1 без учета баллов, набранных перешедшим учеником. X - натуральное;
z - баллы, набранные перешедшим учеником. Этого ученика стоит выделить отдельно, поскольку его переход повлиял на пересчет баллов в обеих школах. z - натуральное.
Y - сумма баллов, набранных учащимися школы №2. Y - натуральное;
M - средний балл школы №1 до перехода - натуральное;
N - средний балл школы №2 до перехода - натуральное;
M' - средний балл школы №1 после перехода;
N' - средний балл школы №2 после перехода. Про M' и N' не сказано, что они натуральные.

Условия задачи в формулах (опять не в средних арифметических, а в суммах баллов):
$M \cdot m = X + z$ - сумма баллов учащихся школы №1 до перехода;
$M' \cdot (m-1) = X$ - сумма баллов учащихся школы №1 после перехода;
$N \cdot (51 - m) = Y$ - сумма баллов учащихся школы №2 до перехода;
$N' \cdot (52 - m) = Y + z$ - сумма баллов учащихся школы №2 после перехода.

Из первых двух: $z = M \cdot m - M' \cdot (m-1)$ - школа №1 [1]
Из вторых двух: $z = N' \cdot (52 - m) - N \cdot (51 - m)$ - школа №2 [2]
Казалось бы, из этих уравнений можно выразить z и о нём забыть, но этого делать не следует, поскольку z - натуральное и эта натуральность нам поможет в дальнейшем для анализа возможных вариантов решений.

Из двух последних: $M \cdot m - M' \cdot (m-1) = N' \cdot (52 - m) - N \cdot (51 - m)$ [3]
Это уравнение отражает тот факт, что сумма баллов, набранных всеми учениками обеих школ не изменилась (как была одной до перехода, так ею же и осталась).
Приготовления закончены. Начинаем отвечать на вопросы задачи.
а) $M' = 2M$?
Этот вопрос касается только школы №1, поэтому будем пользоваться уравнением [1].
Подставляем $M' = 2M$, получаем $M \cdot (2 - m) = z$.
По условию $m \geq 2$. При $m = 2$ получается, что $z = 0$. Но этого быть не может, поскольку z - натуральное. Ответ: *нет*.

б) $M' = 1{,}1 \cdot M, \quad N' = 1{,}1 \cdot N, \quad N = 1$?
Подставляем $M' = 1{,}1 \cdot M, \quad N' = 1{,}1 \cdot N, \quad N = 1$ в уравнения [1] и [2]:
$10z = M \cdot (11 - m)$ и $10z = 62 - m$

Из первого ясно, что $m < 11$, а из второго - число $62 - m$ должно делиться на 10. Таким числом может быть только $m = 2$. Но при $m = 2$ имеем (приравнивая первое и второе) имеем $9M = 60$, что невозможно, поскольку M - целое. Ответ: *нет*.

в) $M' = 1{,}1 \cdot M, \quad N' = 1{,}1 \cdot N, N_{min} = ?$

Подставляем $M' = 1{,}1 \cdot M, \quad N' = 1{,}1 \cdot N$ в уравнения [1] и [2]:
$10z = M \cdot (11 - m)$ и $10z = N \cdot (62 - m)$
Поскольку в п. б) мы увидели, что $N = 1$ быть не может, то проверяем:
$N = 2?$ Подставляя $N = 2$ в последние уравнения, имеем: $10z = M \cdot (11 - m)$ и $5z = 62 - m$. Как и в п. б) ясно, что $m < 11$ и число $62 - m$ должно делиться на 5.
Таких m только два: $m = 2$ и $m = 7$.
При $m = 2$ имеем $z = 12$ и $120 = 9M$ - не подходит.
При $m = 7$ имеем $z = 11$ и $110 = 4M$ - не подходит.
$N = 3?$ Подставляя $N = 3$, имеем: $10z = M \cdot (11 - m)$ и $10z = 3 \cdot (62 - m)$.
При $m = 2$ имеем $z = 18$ и $M = 20$ - *подходит*.
Ответ: $N_{min} = 3$

Задача не сложная: продумываем переменные, которые надо ввести, составляем уравнения для натуральных чисел. Чётко понимать, что m, n, M, N, z - натуральные.

Задача №21: Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусах модели А количество мест больше 30, но меньше 40, а в автобусах модели Б - больше 40, но меньше 50. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) может ли потребоваться 5 автобусов модели А?
б) найдите наименьшее возможное количество детей в группе, если известно, что их больше 150.
в) найдите наибольшее возможное количество детей в группе.

Решение: *Задача в натуральных числах.*
Вводим обозначения:
D - количество детей в группе;
A - количество автобусов модели А;
a - вместимость автобуса модели А: $30 < a < 40$ [1]
b - вместимость автобуса модели Б: $40 < b < 50$ [2]
Очевидно, что все эти величины - натуральные.
a и b имеют определенные значения (автобусы ведь не резиновые с переменной вместительностью), просто под условия нашей задачи могут подходить несколько вариантов a и b.

Уравнения в натуральных числах:
Вот она, связочка!!!
размещение детей в автобусах модели А: $D = A \cdot a$
размещение детей в автобусах модели Б: $D = (A - 1) \cdot b$, откуда $b = (b - a) \cdot A$ [3]

Из [1] и [2] получаем: $1 < b - a < 19$ [4]
надо оценить диапазон (b-a)
Поясню:
Очевидно, что $(b - a)_{max} = b_{max} - a_{min}$ и $(b - a)_{min} = b_{min} - a_{max}$
Из [1] и [2]: $b_{max} = 49, \quad b_{min} = 41, \quad a_{max} = 39, \quad a_{min} = 31 \Rightarrow$
$(b - a)_{max} = 18$, $(b - a)_{min} = 2 \Rightarrow 1 < b - a < 19$

Из [3] вытекает, что $A = \dfrac{b}{b-a}$ и должно быть натуральным, то есть b должно делиться на $b-a$. А вот это мы сейчас проверим перебором, благо их не так много. Табличка: первый столбец - допустимые значения b, первая строка - допустимые значения $b-a$. В желтый цвет закрашены ячейки, в которых b делится на $b-a$. В этих ячейках посчитаны значения a. Коричневым цветом выделены допустимые (по [1]) значения a.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
41																	
42	40	39			36	35											
43																	
44	42		40							33							
45		42		40				35						30			
46	44																
47																	
48	46	45	44		42		40				36				32		
49						42											

Таким образом получается, что существуют лишь семь пар (a, b), удовлетворяющих условиям [1], [2], [3], [4]: *(39,42), (36,42), (35,42), (33,44), (35,45), (36,48), (32,48)*.
Приготовления закончены. Начинаем отвечать на вопросы задачи.

а) может ли $A = 5$?

Подставляем $A = 5$ в [3]: $b = 5(b-a)$ или $5 = \dfrac{b}{b-a}$

По табличке смотрим где b делится на $b-a$ и даёт 5. При $b = 45$, $b - a = 9$, $a = 35$.

Ответ: *может*.

б) $D > 150$, D_{min} - ?

Из таблички считаем допустимые (по желтым клеткам с коричневыми цифрами a) значения A ($A = \dfrac{b}{b-a}$) и перемножаем их на цифры в клетке (a), получая количество детей ($D = A \cdot a$).

Вот семь результатов: $39 \cdot 14 = 546$, $36 \cdot 7 = 252$, $35 \cdot 6 = 210$, $33 \cdot 4 = 132$, $35 \cdot 5 = 175$, $36 \cdot 4 = 144$, $32 \cdot 3 = 96$. Для $D > 150$ выбираем минимальный: 175.

Ответ: 175

в) По посчитанным в б) значениям $D = 546,252,210,132,175,144,96$ выбираем максимальный.

Ответ: 546.

Задача не то, чтобы сложная, но нестандартная: вроде есть и уравнения и неравенства, но решается она перебором. Ключевые моменты: 1) из [3] вытекает связка параметров по натуральным числам по умножению; 2) коль мы получили связку по $b-a$, то надо найти ограничения на $b-a$ из [1] и [2]. Ну а дальше - аккуратно считать. Полученная табличка тут же даёт ответы на вопросы задачи. Можно ли решить эту задачу аналитически (работая только с уравнениями и неравенствами) - сомневаюсь, поскольку проверка на делимость и отбрасывание неподходящих значений - не аналитическая операция.

Задача №22: Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги - натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 рублей, на неё приклеивают бирку "выгодно". Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 рублей, из-за чего количество книг с бирками "выгодно" уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой "выгодно" после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой "выгодно" до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки "выгодно" после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки "выгодно" до открытия выставки?

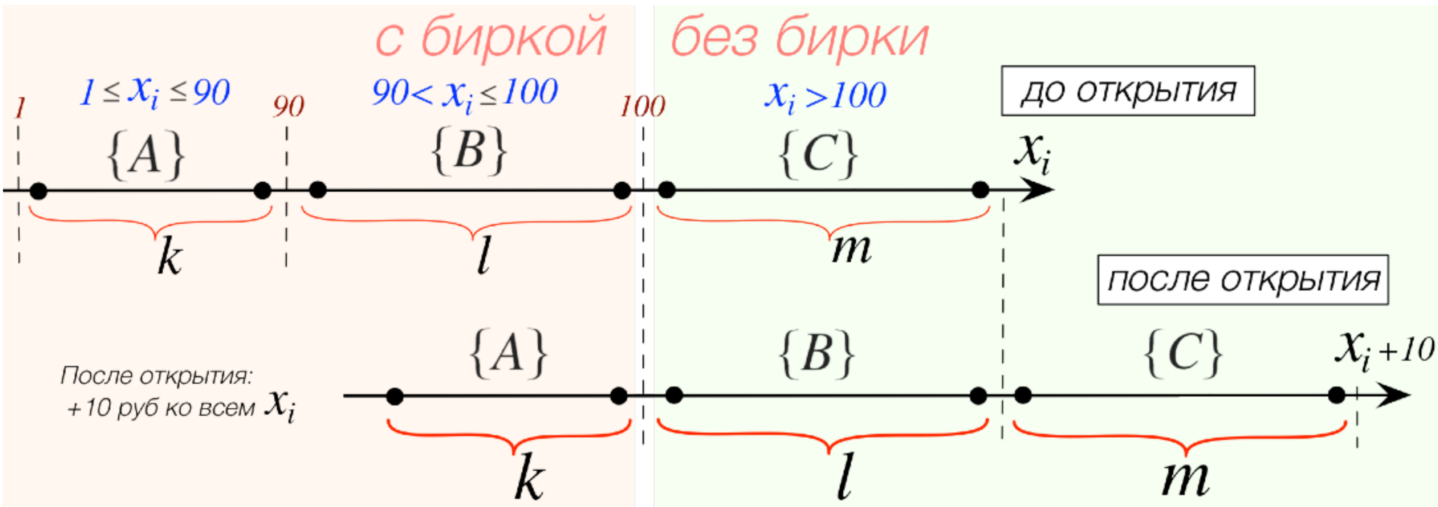
в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, а средняя цена книг с биркой "выгодно" составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки - 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой "выгодно" составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки - 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

Решение: ***Задача в натуральных числах.***

Пусть $\{x_i\}$ - множество цен книг до открытия выставки (***старые цены***), *упорядоченное по возрастанию (неубыванию).* $\{x_i\}$ *- натуральные.*

Считаем, как и всегда, не в средних ценах, а в суммах цен - так удобнее.

На картинке изобразил, что происходило с ценами книг и бирками до и после открытия.



Поясню. Если старая цена книги была, например, 75 рублей и она до открытия выставки (до изменения цены) находилась в зоне с биркой "выгодно", то после открытия выставки (после изменения цены) она стала стоить 85 рублей и осталась в этой же зоне с биркой. Если старая цена другой книги была, например, 95 рублей и она до открытия выставки (до изменения цены) находилась в зоне с биркой "выгодно", то после открытия выставки (после изменения цены) она стала стоить 105 рублей и она "переехала" в зону без бирки "выгодно". А те книги, которые до открытия выставки (до изменения цены) стоили больше 100 рублей и находились в зоне без бирки, после изменения цены (увеличения её на 10 руб) так в этой зоне и остались. Теперь понятно, что все книги, старая цена которых находилась в диапазоне 91-100 руб (включительно), находившиеся в зоне с биркой "выгодно", после открытия выставки (после изменения цены) "переедут" в зону без бирки "выгодно". Исходя из этого, вводим обозначения:

k - число книг с ценой от 1 до 90 ($1 \le x_i \le 90$) (подмножество $\{A\}$ множества $\{x_i\}$);
l - число книг с ценой от 90 до 100 ($90 < x_i \le 100$) (подмножество $\{B\}$ множества $\{x_i\}$);
m - число книг с ценой от 90 до 100 ($x_i > 100$) (подмножество $\{C\}$ множества $\{x_i\}$);
k, l, m - *натуральные.*

После открытия выставки к каждой старой цене $\{x_i\}$ добавляется 10 руб.

Приготовления закончены. Начинаем отвечать на вопросы задачи.

а) *Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой "выгодно" после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой "выгодно" до открытия выставки?*
Пусть:

V_1 - средняя цена книг с биркой "выгодно" до открытия выставки;
V_2 - средняя цена книг с биркой "выгодно" после открытия выставки.

В зоне "выгодно" до открытия выставки находились книги из подмножеств $\{A\}$ и $\{B\}$ - всего $k + l$ книг. После открытия в зоне "выгодно" остались книги из подмножества $\{A\}$ - всего k книг.

Сумму цен книг с биркой "выгодно" до открытия выставки можно записать:
$V_1 \cdot (k + l) = \sum \{A\} + \sum \{B\}$ [1] : средняя цена х количество книг = сумма цен
Сумму цен книг с биркой "выгодно" после открытия выставки можно записать:
$V_2 \cdot k = \sum \{A\} + k \cdot 10$ [2] : средняя цена х количество книг = сумма старых цен + суммарная прибавка в цене (k раз по 10 руб)

Нас спрашивают: может ли $V_2 < V_1$? То есть могут ли быть такие значения k, l и старых цен в подмножествах $\{A\}$ и $\{B\}$, что $V_2 < V_1$.
Посчитаем разность $V_2 - V_1$: $V_2 - V_1 = \dfrac{\sum \{A\} + k \cdot 10}{k} - \dfrac{\sum \{A\} + \sum \{B\}}{(k + l)}$, что даёт после преобразований: $V_2 - V_1 = \dfrac{10k^2 + 10kl + l \sum \{A\} - k \sum \{B\}}{k \cdot (k + l)}$. Очевидно, что знаменатель больше 0. Если мы найдём такие значения k, l и старых цен в подмножествах $\{A\}$ и $\{B\}$, что числитель этой дроби меньше 0, то ответом на вопрос пункта а) будет "могла". Ищем: $10k^2 + 10kl + l \sum \{A\} - k \sum \{B\} < 0$ или
$k \sum \{B\} > 10k^2 + 10kl + l \sum \{A\}$ [3].
Поиграемся для начала с ценами книг подмножеств $\{A\}$ и $\{B\}$. Найдём $\sum \{B\}_{max}$ и $\sum \{A\}_{min}$. Очевидно, что $\sum \{B\}$ максимально тогда, когда все цены книг максимальны в данном диапазоне цен, то есть все цены равны 100 руб. Тогда $\sum \{B\}_{max} = 100l$. Очевидно, что $\sum \{A\}$ минимально тогда, когда все цены книг минимальны в данном диапазоне цен, то есть все цены равны 1 руб. Тогда $\sum \{A\}_{min} = k$. Подставляя $\sum \{B\}_{max}$ и $\sum \{A\}_{min}$ в [3], получаем $89l > 10k$.

То есть при условиях $89l > 10k$; $\sum \{A\} = \sum \{A\}_{min} = k$; $\sum \{B\} = \sum \{B\}_{max} = 100l$ V_2 может быть меньше V_1 . Например при $k = l = 1$ и книгами в подмножествах $\{A\}$ и $\{B\}$ ценой 1 руб и 100 руб.

Эти цифры можно было бы подобрать "вручную", но мы дали полный анализ.

Наверняка есть и другие комбинации параметров, при котором это выполняется. Нам же было достаточно найти лишь одну комбинацию, чтобы сказать "могла".

Ответ: могла.

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки "выгодно" после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки "выгодно" до открытия выставки?

Действуем по той же схеме, что и в предыдущем пункте.

Пусть:

N_1 - средняя цена книг без бирки "выгодно" до открытия выставки;

N_2 - средняя цена книг без бирки "выгодно" после открытия выставки.

В зоне без бирки до открытия выставки находились книги из подмножества $\{C\}$ - всего m книг. После открытия в зоне без бирки стали книги из подмножеств $\{C\}$ и $\{B\}$ - всего $l+m$ книг.

Сумму цен книг без бирки до открытия выставки можно записать:

$N_1 \cdot m = \sum\{C\}$ [4] : средняя цена х количество книг = сумма цен

Сумму цен книг без бирки после открытия выставки можно записать:

$N_2 \cdot (l+m) = \sum\{B\} + \sum\{C\} + 10 \cdot (l+m)$ [5] : средняя цена х количество книг = сумма старых цен + суммарная прибавка в цене ($l+m$ раз по 10 руб)

Нас спрашивают: может ли $N_2 < N_1$? То есть могут ли быть такие значения m, l и старых цен в подмножествах $\{C\}$ и $\{B\}$, что $N_2 < N_1$.

Посчитаем разность $N_2 - N_1$: $N_2 - N_1 = \dfrac{\sum\{B\} + \sum\{C\} + 10(l+m)}{l+m} - \dfrac{\sum\{C\}}{m}$, что даёт после преобразований: $N_2 - N_1 = \dfrac{m\sum\{B\} + 10m(l+m) - l\sum\{C\}}{m(l+m)}$. Очевидно, что знаменатель больше 0. Если мы найдём такие значения m, l и старых цен в подмножествах $\{C\}$ и $\{B\}$, что числитель этой дроби меньше 0, то ответом на вопрос пункта б) будет "могла". Ищем: $m\sum\{B\} + 10m(l+m) - l\sum\{C\} < 0$ или $l\sum\{C\} > m\sum\{B\} + 10m(l+m)$. Поскольку в подмножестве $\{C\}$ цены книг не ограничены сверху, то всегда можно найти такую большую цену, чтобы неравенство выполнялось. Например при $m = l = 1$ и книгами в подмножествах $\{B\}$ и $\{C\}$ ценой 80 руб и 120 руб.

Эти цифры можно было бы подобрать "вручную", но мы дали полный анализ.

Наверняка есть и другие комбинации параметров, при котором это выполняется. Нам же было достаточно найти лишь одну комбинацию, чтобы сказать "могла".

Ответ: *могла*.

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, а средняя цена книг с биркой "выгодно" составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки - 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой "выгодно" составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки - 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

Пусть:

S_1 - средняя цена всех книг до открытия выставки.

Все книги - это книги из подмножеств $\{A\}$, $\{B\}$ и $\{C\}$ - всего $k+l+m$ книг.

Сумму цен всех всех книг до открытия выставки можно записать так:

$$S_1 \cdot (k+l+m) = \sum\{A\} + \sum\{B\} + \sum\{C\} \qquad [6]$$

Используя обозначения предыдущих пунктов, запишем условия пункта в):

$$81(k+l) = \sum\{A\} + \sum\{B\} \qquad [1]$$

$$90k = \sum\{A\} + 10k \qquad [2]$$

$$226m = \sum\{C\} \qquad [4]$$

$$210(l+m) = \sum\{B\} + \sum\{C\} + 10(l+m) \qquad [5]$$

$$110(k+l+m) = \sum\{A\} + \sum\{B\} + \sum\{C\} \qquad [6]$$

Нас спрашивают: при каком наименьшем $(k+l+m)$ это возможно?
Пять уравнений, шесть переменных. Решая систему этих уравнений, получим соотношения: $k = 15l, \quad m = 4l$. Минимальными являются значения: $l = 1, \quad k = 15, \quad m = 4$, а общее минимальное количество книг равно 20.

Ответ: *20*.

Задача простая. Надо аккуратненько разобраться что происходит при изменении цен - рисунок помогает - и определить: книги какого ценового диапазона влияют на зоны бирок при изменении цен.

========================

За полное правильное решение любой из этих задач на ЕГЭ можно получить 4 балла. В каждой из них есть три вопроса: а), б), в). Вопросы а) и б) даже в сложных задачах вполне по силам для решения. За правильное решение только пунктов а) и б) можно получить 2 балла. А если ещё и сформулировать только идеи как решить пункт в) - то можно получить ещё 1 балл. Я это вот к чему: ну не решается у вас легко и быстро пункт в). Бывает. Чем тратить всё оставшееся драгоценное время экзамена на штурм этой крепости (в погоне за 1-2 баллами), гораздо разумнее отвлечься от в) и ещё раз проверить всё ранее сделанное на предмет ошибок/описок. Глядишь, да и "спасёте" пару баллов, обнаружив ошибку в устном счёте. А уж когда вы будете уверены во всем остальном, то тогда и "бомбите" пункт в).

Задач на натуральные числа - большинство. Заметьте как устроены эти задачи и как их следует решать. Формулируется условие задачи (в основном тексте задачи и в вопросах). Это условие связывает несколько натуральных параметров задачи в систему уравнений и неравенств (эти уравнения и неравенства составляете вы, переводя текстовые формулировки в математические формулы). *Но эти уравнения и неравенства могут иметь несколько решений на разных наборах натуральных параметров задачи.* Составленные вами неравенства описывают ограничения на их значения. А уравнения дают связки между ними. Уравнения должны иметь натуральные решения. Связка обычно имеет вид $n = k \cdot m$, где n, m, k - натуральные параметры задачи. Зная ограничения на значения параметров (задающиеся неравенствами), можно перебором (если, конечно, этот перебор не запредельно велик) подобрать подходящие для связки натуральные значения n, m, k, на основе делимости натуральных чисел. Переборы удобно представлять табличками. В результате вы получаете множество допустимых решений. А уж отвечать на вопросы задачки после этого совсем легко.

Задачи на кредиты

Задачи на кредиты: это модный тренд в погоне за банковской грамотностью населения. Всё бы ничего, но порой эти задачи уродливо-громоздки. Да и косяки присутствуют.

Запомним: *есть всего **два** характерных **типа** задач на кредиты.*

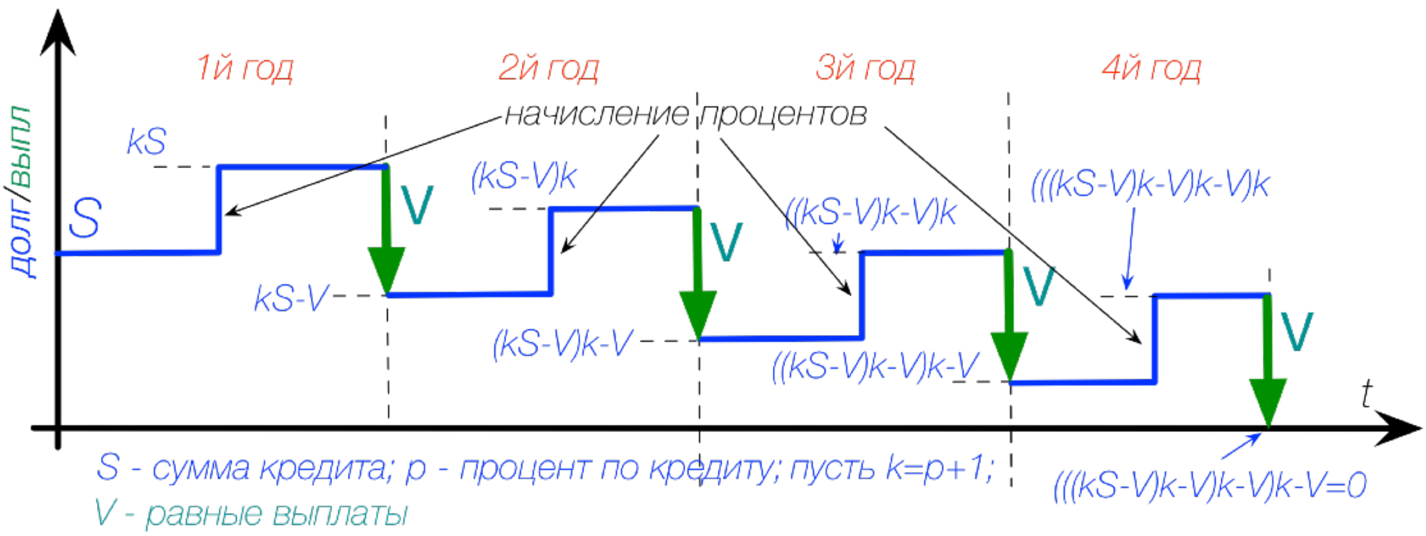
1 тип. Выплаты кредита производятся равными платежами (схема выплат называется "аннуитет"). К этому типу относятся все задачи, где известны платежи (или дана закономерность платежей).

2 тип. Выплаты кредита подбираются так, что сумма долга уменьшается равномерно ("схема выплат называется схемой с дифференцированными платежами"). К этому типу относятся также задачи, где известна закономерность уменьшения суммы долга.

Задачи 1-го типа - "аннуитет"

выплаты = const

Выдаётся кредит размером S сроком на n лет (в нашем примере - 4 года) под p процентов годовых (проценты начисляются в середине года). В конце каждого года кредитор выплачивает ***фиксированную сумму*** V. В конце n-го года кредит должен быть погашен. Пусть $k = p + 1$ (так удобней формулы писать). Рассмотрим наш 4-летний пример. Рисунок иллюстрирует пример.



Составим табличку со значениями долга:

	Долг	
в начале первого года	S	взят кредит
в конце первого года перед выплатой	kS	начислены %
в начале второго года после выплаты	$kS - V$	выплатили
в конце второго года перед выплатой	$(kS - V)k$	начислены %
в начале третьего года после выплаты	$(kS - V)k - V$	выплатили
в конце третьего года перед выплатой	$((kS - V)k - V)k$	начислены %
в начале четвертого года после выплаты	$((kS - V)k - V)k - V$	выплатили
в конце четвертого года перед выплатой	$(((kS - V)k - V)k - V)k$	начислены %
в начале пятого года после выплаты	$(((kS - V)k - V)k - V)k - V = 0$	долг погашен

В последней строке формула как раз и описывает условие погашения кредита: после взятия кредита, начисления процентов и выплат сумма долга на начало пятого года равна 0.

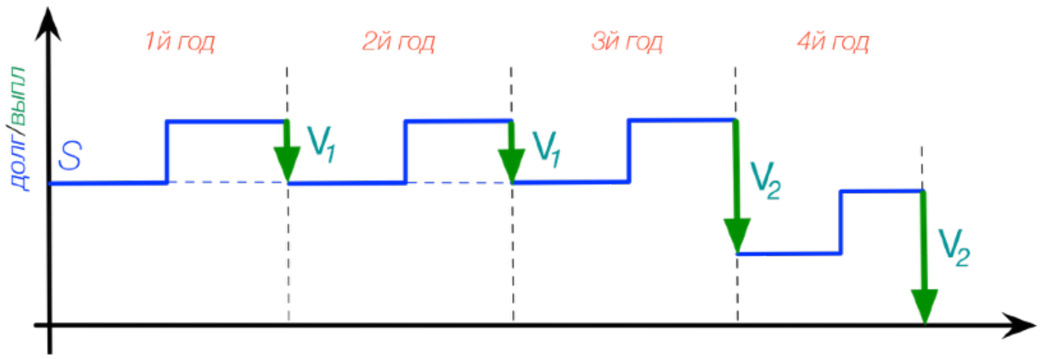
Раскроем скобочки в последней формуле:
$(((kS - V)k - V)k - V)k - V = 0 \Rightarrow k^4S - V(1 + k + k^2 + k^3) = 0 \Rightarrow$
$k^4S = V(1 + k + k^2 + k^3)$ - это для нашего 4-лнтнего случая.

Формулу можно обобщить на случай n лет: $k^nS = V(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1})$ [1] и, применяя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем: $k^nS = V\dfrac{1 - k^n}{1 - k}$. Напомню: $k = p + 1$. В зависимости от того, что дано в задаче и что требуется найти, используем последнюю формулу по назначению. Обычно в задачах n небольшое.

Итак, в задачах этого типа четыре параметра описывают кредит: S, p (k), n, V. И они связаны формулой [1]. Всё внимание сосредотачиваем на ***текущем долге*** кредитора. Считаем текущий долг после начисления процентов и выплат и условием ***погашения кредита*** (а именно это является ключевым условием любой задачи на кредит) является ***равенство нулю*** текущего долга. Никаких других дополнительных условий задачи и не требуется.

*Бывает такой **упрощенный** вариант этой задачи:*
Выдаётся кредит размером S сроком на 4 года (можно обобщить на n лет) под p процентов годовых (проценты начисляются в середине года). Первые 2 года кредитор двумя равными выплатами в конце каждого года погашает начисленные проценты, а в оставшиеся 2 года двумя другими равными выплатами в конце каждого года погашает весь кредит. В конце 4-го года кредит должен быть погашен.

Вот картинка. Логика рассуждений та же. Реальное погашение кредита S начнётся только в конце третьего года. Для случая 4-х летнего кредита всё расписывается безо всякой геометрической прогрессии.



Так как решать-то?
- убеждаемся, что перед нами "кредитная" задача типа 1: выплаты постоянны или дано правило расчёта выплат;
  - если число платёжных периодов n невелико - не больше четырёх - аккуратненько рисуем картинку "долг/выплаты", расписываем на ней долги (после начисления процентов перед выплатой и после выплат) и приравниваем 0 ***долг после последней выплаты последнего периода***;
    - до формулы с геометрической прогрессией дело и не дойдёт;
    - решаем получившееся уравнение относительно того, что надо найти в задаче;
  - если число платёжных периодов n больше четырёх - поступаем также, как и в предыдущем случае (четырёх периодов) и обобщаем формулу самого последнего долга (равного нулю) на случай n (до формулы [1]). Далее - очевидно. Но я пока не встречал в ЕГЭ задач этого типа для $n > 4$.

Формулу [1] и, тем более, формулу с геометрической прогрессией бесполезно запоминать. Коль уж вам досталась задача, где n - большое (я таких не видел), то придётся их вывод повторить (это не ~~больно~~ страшно, если вы помните формулы геометрической прогрессии).

Вот пример решения такой задачи из ЕГЭ.

Задача №23: В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,523 млн. рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

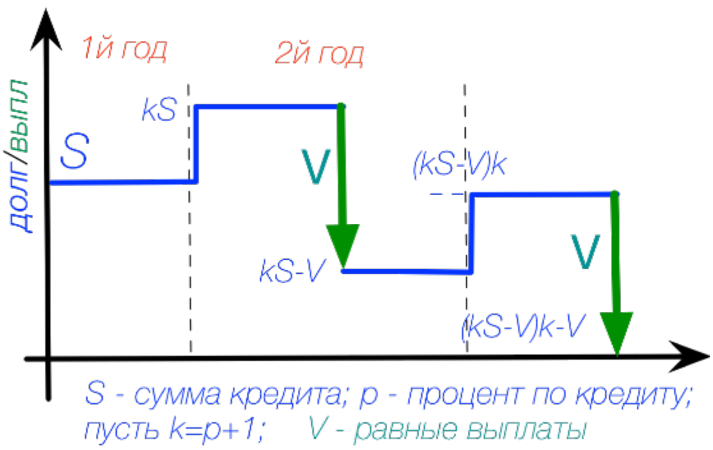
Решение: Задача 1-го типа: равные платежи. Всего два платёжных периода. Проще не бывает. Считаем в миллионах рублей.
Обозначения: S - сумма кредита; p=0,16; V=2,523; $k = p + 1$=1,16

Рисуем картинку:

Расписываем на картинке долги после начисления процентов перед выплатой и после выплат. Долг после последней выплаты равен $(kS - V)k - V$. Приравниваем его нулю как условие погашения кредита и получаем формулу для нахождения S:

$$(kS - V)k - V = 0 \quad \Rightarrow \quad S = V\frac{k+1}{k^2}$$

Откуда S=4,05 миллиона рублей.



Задачи 2- го типа - "схема с дифференцированными платежами"

Задачи этого типа будут "помуторней" предыдущих.

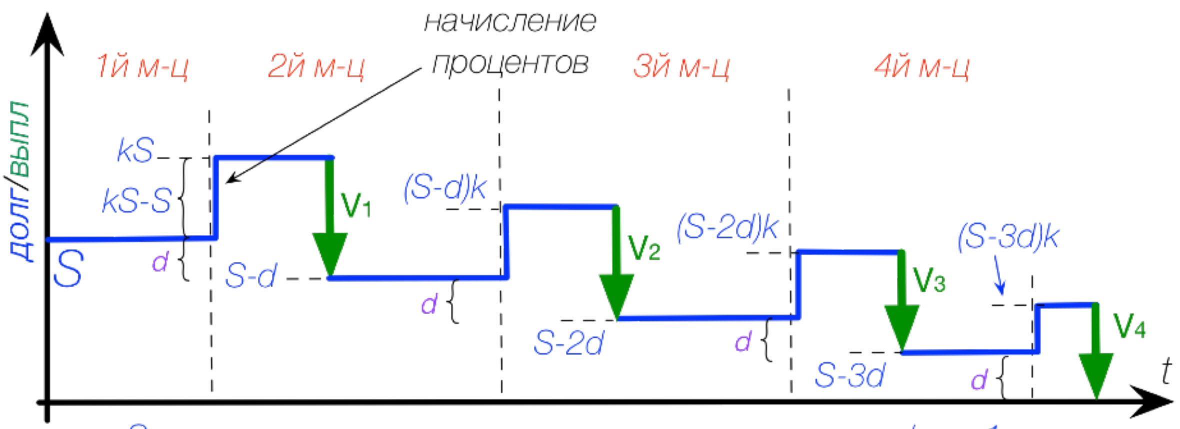
долг уменьшается на const

Типовая формулировка: Выдаётся кредит размером S сроком на n месяцев (в нашем примере - 4 месяца) под p процентов (проценты начисляются в начале месяца). В середине каждого месяца кредитор выплачивает такую сумму, чтобы долг уменьшался на *фиксированную величину* d. В конце n-го месяца кредит должен быть погашен. Плюс ещё дополнительные условия (о них - ниже).

Пусть $k = p + 1$ (так удобней формулы писать). Рассмотрим наш 4-месячный пример. Рисунок иллюстрирует пример. В этом типе задач меняются выплаты, а долг после выплаты уменьшается на одну и ту же величину по сравнению с долгом месячной давности.

Картинка нашего примера при количестве платёжных периодов n=4 месяца. С текущими долгами всё ясно - они уменьшаются на одну и ту же величину. *Смотрим на выплаты и долги*.

Составим табличку со значениями выплат и долгов после выплат:



S - сумма кредита; p - процент по кредиту; пусть k=p+1;

выплаты		долг	
V_1	$kS-(S-d)=(k-1)S+d$	после V_1	$S-d$
V_2	$k(S-d)-(S-2d)=(k-1)S-d(k-2)$	после V_2	$S-2d$
V_3	$k(S-2d)-(S-3d)=(k-1)S-d(2k-3)$	после V_3	$S-3d$
V_4	$k(S-3d)-(S-4d)=(k-1)S-d(3k-4)$	после V_4	$S-4d=0$

Внимательно посмотрите как я считал промежуточные выплаты. Для первой выплаты расписаны все величины.

Если рассмотреть последовательность выплат: $V_1=(k-1)S+d$, $V_2=(k-1)S-d(k-2)$, $V_3=(k-1)S-d(2k-3)$, $V_4=(k-1)S-d(3k-4)$, то она представляет собой ***арифметическую прогрессию*** с первым членом $a_1=(k-1)S+d$ и разностью прогрессии $z=d(1-k)$. Последовательность долгов тоже образует арифметическую прогрессию с первым членом $S-d$ и разностью прогрессии $-d$.

Тогда, обобщая на случай n месяцев:

- Выплата в промежуточном месяце номер m $(1\le m\le n)$ (как m-й член арифметической прогрессии) равна: $V_m=(k-1)S+d+d(1-k)(m-1)$ [2]
- Суммарная выплата за все n месяцев: $S_n=[(k-1)S+d+\frac{1}{2}d(1-k)(n-1)]\cdot n$ [3]
- Долг в промежуточном месяце номер m $(1\le m\le n)$ (как m-й член арифметической прогрессии) равен: $D_m=(S-d)-d(m-1)=S-dm$ [4]
- Долг в последнем месяце номер n равен (после последней выплаты V_n): $D_n=S-dn=0$ [5] (равенство 0 как условие погашения кредита).

Следите за номерами рассматриваемых месяцев (годов) и соответствующими индексами в формулах!

И для задач 1-го типа и для задач 2-го типа главное событие - это погашение кредита. Вокруг этого всё и вертится. В задачах 1-го типа всё достаточно просто: выплаты постоянны, мы следим за уменьшающимся долгом и, как только он станет равен 0, всё - кредит погашен.

В задачах 2-го типа и долг уменьшается, и выплаты изменяются. Имеются четыре параметра, описывающих кредит: S, p (или k), n, d. В задаче обычно только два из них заданы численно. Формула [5] всегда работает: если даны S и d, то из неё можем определить n. В задачах 2-го типа даются ***дополнительные условия***, которые позволяют определить все недостающие параметры кредита.

Этими условиями бывают:

Числа

- величина какой-либо выплаты (и тогда работает формула [2]);
- сумма всех выплат после погашения кредита (и тогда работает формула [3]);
- величина долга после како-либо выплаты (и тогда работает формула [4]);
- нестандартности: например, величина долга перед последней выплатой может отличаться от d (как в разбираемой ниже задаче).

Смотрим на дополнительные условия и выбираем формулу (-лы) для составления уравнений. (*А я и говорил, что задачи 2-го типа - муторные*).

Так как решать-то?

- убеждаемся, что перед нами "кредитная" задача типа 2: выплаты изменяются так, что долг уменьшается на одну и ту же величину;
- обычное число платёжных периодов: от 12 до 15 месяцев.

Формулы [2]-[5] запоминать бессмысленно - их придётся каждый раз выводить (это хоть и муторно, но не страшно, если вы помните формулы арифметической прогрессии).

- аккуратненько рисуем картинку "долг/выплаты" для 4-х месяцев, расписываем на ней выплаты и долги после выплат, приравниваем 0 ***долг после последней выплаты*** и обобщаем на случай n - получаем формулы [2]-[5];
- внимательно смотрим на дополнительные условия задачи и понимаем, какая из формул [2]-[5] работает. Составляем уравнения;
- решаем получившиеся уравнения относительно того, что надо найти в задаче.

Вот пример решения такой задачи из ЕГЭ

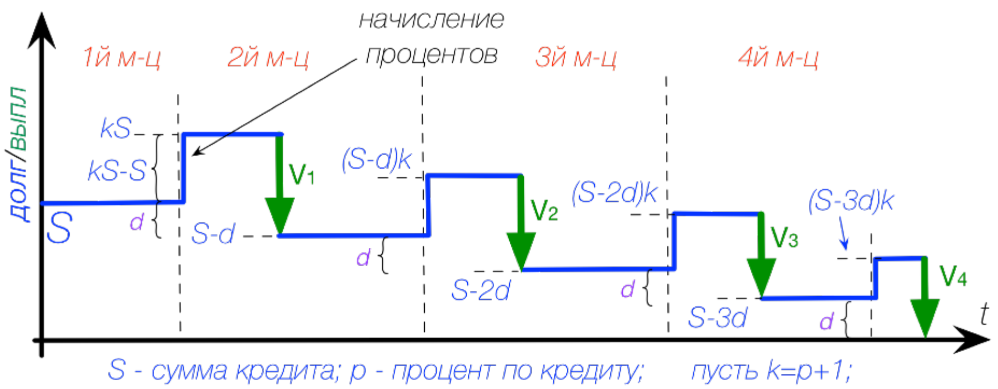
Задача №24: 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 600 тысяч рублей **на месяц** (*Почему "на месяц"??? Мы срок кредита должны определить в задаче. Чистый косяк составителей.*) Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-е по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца (с 1-го по n-й) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $n+1$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 852 тысячи рублей.

Решение: Задача 2-го типа: долг уменьшается на одну и ту же величину. Всего n платёжных периодов (n астрономических (не календарных!) месяцев). Считаем в тысячах рублей. Обозначения: S - сумма кредита; p=0,03; d - величина уменьшения кредита; $k=p+1$.

Та же самая картинка, что и раньше.



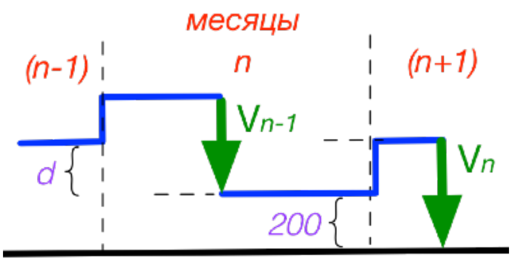
Составляем табличку со значениями выплат и долгов после выплат и выводим формулы.

Итак, формулы:

- выплата в m-ом месяце: $V_m = (k-1)S + d + d(1-k)(m-1)$ [2]
- сумма всех выплат: $S_n = [(k-1)S + d + \frac{1}{2}d(1-k)(n-1)] \cdot n$ [3]
- промежуточный долг: $D_m = S - dm$ [4]
- долг после последней выплаты: $D_n = S - dn = 0 \Rightarrow S = n \cdot d$ [5]

Смотрим на ***дополнительные условия*** задачи:

- "15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей" и "*15-го числа каждого месяца (с 1-го по n-й) долг должен быть на d меньше долга на 15-е число предыдущего месяца*".



  В этой формулировке - ~~уродливость~~ нестандартность этой задачи. Поясню. Когда мы разбирали задачу 2-го типа в общем, мы подразумевали, что долг (в том числе и нулевой после погашения кредита) всегда на d меньше долга месячной давности и тогда формула [5] применима. Но в условии этой задачи сказано, что долг меньше на d только *с 1-го по n-й* месяцы, а в $(n+1)$-м месяце он меньше на 200 - смотри картинку. Что делать? А вот что: смело записать $S = (n-1)d + 200$ - ну да: с начального долга S мы $(n-1)$ раз спускались на d-ступеньку и последняя ступенька равна 200. *Я извиняюсь перед школьниками за эти нестандартности (хоть задач этих и не составлял).*
- сумма всех выплат составит 852 тысячи рублей - используем формулу [3]. Имеем:

  $[(k-1)S + d + \frac{1}{2}d(1-k)(n-1)] \cdot n = 852$ или $[pS + d - \frac{1}{2}dp(n-1)] \cdot n = 852$

Итого: $S = 600$; $p = k - 1 = 0{,}03$ и $\begin{cases} S = (n-1)d + 200 \\ [pS + d - \frac{1}{2}dp(n-1)] \cdot n = 852 \end{cases}$

Решаем-получаем.

=====================

Удачи!