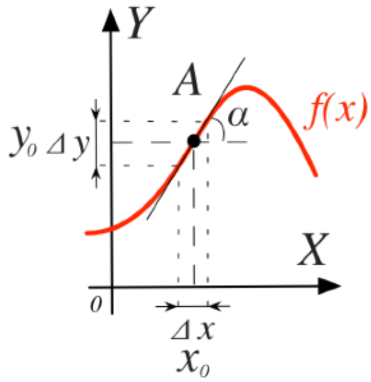
Физика: Законы сохранения

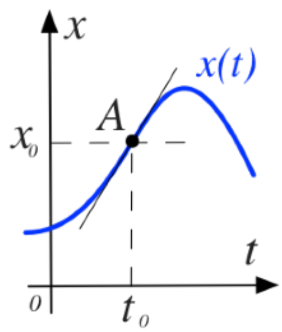
Поговорим об импульсе, моменте импульса, энергии и законах их сохранения.

„Если вы хотите познать секреты вселенной - мыслите единицами измерения энергии, частоты и вибрации.“
Никола Тесла

Для начала я напомню несколько базовых понятий.



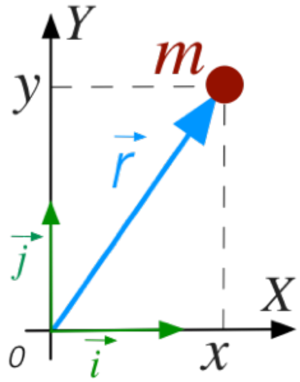
Производная. Вы изучали производную и правила дифференцирования (*взятие производной функции и дифференцирование функции - это синонимы*) в школьной математике. По определению производной функции $y = f(x)$ в точке $A(x_0, y_0)$ называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в окрестности этой точки (обозначается $f'(x_0)$). Математика требует ещё условие непрерывности в этой точке, но мы не будем вдаваться в математические детали. *Геометрический смысл производной*: значение производной в точке $A(x_0, y_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке: $f'(x_0) = tg\alpha$.
Вы ведь умеете делать много преобразований функций: к функции $y = f(x)$ можно прибавить число, умножить её на число, найти противоположную функцию $-f(x)$, обратную и т.д. Так вот производная - это ещё одно преобразование функции. Но это такое преобразование, которое позволяет находить минимумы-максимумы функций, определять интервалы возрастания-убывания функций и много чего ещё полезного. От производной функции можно брать ещё производную (вторая производная) и ещё производную и т.д. Более того, в математике зачастую встречаются ***дифференциальные уравнения***, например: $f(x) = -3f'(x) + 12f''(x) - 2$, в которых функция аналитически связывается со своими производными. Решить дифференциальное уравнение - это значит найти $f(x)$ из данной связки. Вы ведь умеете решать алгебраические уравнения, например $6x^2 - 15x + 3 = 0$, то есть находить их корни? Дифференциальные уравнения - это аналог алгебраических.



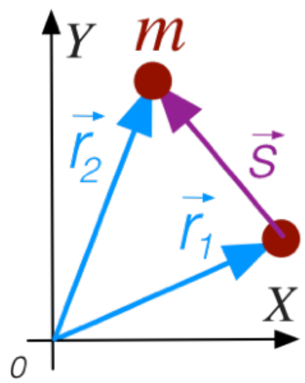
Но нас, изучающих физику, больше интересует другой смысл производной - ***физический***. Вот представьте себе материальную точку (тело), движущуюся прямолинейно. Её положение задаётся координатой x на выбранной оси. Точка в общем случае может двигаться по прямой самым причудливым способом: то ускоряться, то замедляться, то стоять, то двигаться равномерно. Её движение по прямой описывает уравнение движения $x(t)$. Ну, пусть, например: $x(t) = 6t^3 - 24t^2 + 3t - 1$ (а почему нет? вот такое движение). То есть в любой нужный нам момент времени t_n мы можем найти координату $x(t_n)$, подставив значение t_n в уравнение. А ещё нас интересует скорость. Мы можем по уравнению $x(t)$ найти скорость в момент времени t_n? Можем! Потому, что у производной есть ещё и *физический смысл: величина производной в данной точке равна скорости изменения функции в данной точке*. То есть, если мы посчитаем производную по правилу $x'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ в момент t_n, то мы получим величину скорости нашего тела в момент t_n. Величину мгновенной скорости! А посчитаем-ка мы для нашего примера величину скорости в момент $t = 2$. Легко! По известным нам правилам дифференцирования: $x'(t) = (6t^3 - 24t^2 + 3t - 1)' = 18t^2 - 48t + 3$ и, подставляя $t = 2$ в выражение для производной скорости, получим $x'(2) = -21$. А вторая производная $x''(t)$ - это что? Правильно, ускорение! В механике практически все уравнения - это уравнения зависимости тех или иных параметров от времени, поэтому для обозначения производной по времени приняты следующие обозначения (они все эквивалентны, просто уж такая сложившаяся традиция - привыкайте):

$x'(t) \leftrightarrow \dfrac{dx}{dt} \leftrightarrow \dot{x}(t)$ и $x''(t) \leftrightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} \leftrightarrow \ddot{x}(t)$. Мы привыкли в школьной физике использовать обозначения вида Δx или Δt для малых приращений x или t (или других физических величин). И говорим при этом, что $\Delta x \to 0$ или $\Delta t \to 0$. Во "взрослой" физике и математике используют более точное понятие ***дифференциал*** (от латинского *differentia* - разность), обозначаемый как dx или dt. Дифференциал - это бесконечно малое приращение. В институтском курсе математики вам дадут строгое определение дифференциала. И обозначение производной как $x'(t) \leftrightarrow \dfrac{dx}{dt}$ имеет глубокий смысл: производная - это отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента. Уравнения можно делить и умножать на дифференциалы.
Ну да, ведь в школьном курсе физики, в кинематике, скорость и ускорение при прямолинейном движении так и задаются: скорость $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, ускорение $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$. Устремив Δt к нулю, мы и получим соответствующие производные. Ну вот, производные освежили в памяти.

→ Радиус-вектор. Как задается положение материальной точки? Выбираются оси, координаты точки на этих осях задают положение точки (в трёхмерном пространстве: три оси - три координаты; на плоскости: две оси - две координаты). Чё тут еще можно придумать?
Можно придумать чуток поудобнее. Давайте для простоты объяснения я возьму двумерный случай (для пространства добавляется третья ось, а рассуждения остаются прежними).

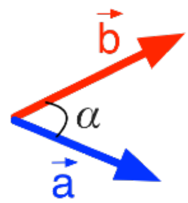


Есть у нас материальная точка m, есть традиционные оси X и Y. Координаты (x, y) задают положение нашей точки. А вот теперь - новшества. На осях откладываются ***единичные*** вектора: $\vec{i}$ и $\vec{j}$. И вводится понятие радиус-вектора положения нашей точки $\vec{r}$: вектора, начинающегося в начале координат и заканчивающегося на нашей точке. Очевидно, что $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. Радиус-вектор $\vec{r}$ однозначно задаёт положение нашей точки на плоскости. Ну да, координаты (x, y) однозначно задают, радиус-вектор $\vec{r}$ однозначно задаёт. Что в лоб, что по лбу. В чём прикол-то? Момент.
А теперь давайте рассмотрим перемещение нашей точки в плоскости.



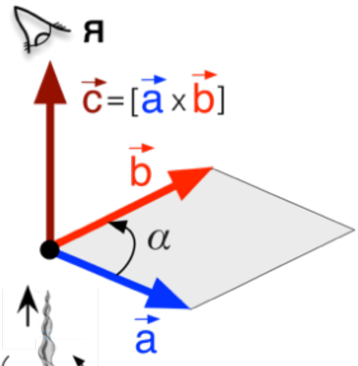
Исходное её положение соответствовало радиус-вектору $\vec{r_1}$, а конечное - радиус-вектору $\vec{r_2}$. А как определить перемещение точки $\vec{s}$? Очень просто: $\vec{s} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. Ведь перемещение - вектор. Характеризуется величиной и направлением. И такое векторное определение перемещения естественно и удобно. С координатами так не получится.
А с учетом нашего знания про производные легко и естественно определяется скорость нашей точки в ***векторной*** форме: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

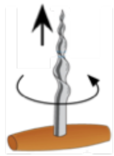
→ Векторное произведение векторов. В Истории про Силы и в Истории про Вращение я подробно объяснил новое понятие - векторное произведение векторов.



Вы знакомы из школьного курса геометрии с понятием скалярного произведения векторов. *Скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется ***число*** c (скаляр), равное $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\alpha$. Так и обозначается: $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

В физике, в которой очень много разных векторов, не все закономерности описываются ***скалярным*** произведением. Поэтому физика позаимствовала у математики и широко использует (я имею в виду - "взрослая" физика) понятие ***векторного произведения векторов***.
Если скалярное произведение векторов - это "плоский случай" (два вектора с общей начальной точкой всегда лежат в одной плоскости), то ***векторное произведение векторов рассматривается в трехмерном пространстве***.





Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что:

- длина этого вектора численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах (а именно $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\alpha$).
- вектор $\vec{c}$ **перпендикулярен** к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть из конца вектора $\vec{c}$, то поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ осуществляется ***против часовой стрелки*** *(или это направление определяется по* ***правилу правого винта - правилу буравчика****).*

Обозначается $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ (иногда просто $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$). Векторное произведение двух векторов дает вектор. Основные свойства векторного произведения:

- векторное произведение двух коллинеарных (параллельных, α=0) векторов равно 0; частный случай: $[\vec{a} \times \vec{a}] = \vec{0}$;
- $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$ - векторное произведение некоммутативно!

Векторное произведение резко упрощает запись векторных формул в физике, делает их легкими для чтения и понимания.

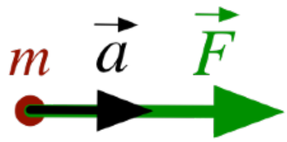
Центр масс тела - геометрическая точка, характеризующая движение тела как целого. Если на тело не действуют внешние силы, то центр масс тела движется с постоянной по величине и направлению скорости. Центр масс нескольких материальных точек (радиус-вектор центра масс) считается как $\vec{r_c} = \dfrac{\sum m_i \cdot \vec{r_i}}{\sum m_i}$.

А теперь переходим к основной теме.

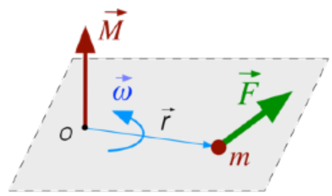
===============

> В этой Истории мы поговорим об известных вам из механики физических величинах: ***импульсе, моменте импульса, энергии и соответствующих законах сохранения***.
> Что у них общего?

Задачи механики



Давайте рассмотрим до боли знакомый пример: на материальную точку массы m действует сила $\vec{F}$. Как будет двигаться точка m? На этот вопрос отвечает второй закон Ньютона: точка будет двигаться поступательно (прямолинейно) с ускорением $\vec{a}$, определяемым по формуле $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Ну да, ничего нового. Сила $\vec{F}$ является ***внешним воздействием*** на точку, а ускорение точки $\vec{a}$ - ***реакцией*** на это воздействие. И второй закон Ньютона *связывает это воздействие на точку с реакцией точки*.



Еще пример: на материальную точку действует вращательный момент $\vec{M}$, создаваемый силой $\vec{F}$. Основное уравнение вращательного движения связывает ***внешнее воздействие*** $\vec{M}$ с ***реакцией*** точки на него: $\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$, где $\vec{\varepsilon}$ - реакция - угловое ускорение вращения точки.

Собственно, в этом и состоит *основная задача механики*:
- описать все внешние воздействия на тело (систему тел);
- с помощью законов механики связать все внешние воздействия с реакцией тела (системы тел) на них;
- определить результирующий закон движения тела (системы тел).

Под законом движения понимается формула (график, таблица и т.п.), по которой можно определить координаты (и другие кинематические характеристики движения - скорость, ускорение и пр.) положения тела в любой момент времени после внешнего воздействия.

Аддитивные интегралы движения

Ой, скажете вы. Очень страшные слова. Сейчас всё объясню.

Как определяются импульс, момент импульса[1] и энергия для материальной точки?

Импульс: вектор $\overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{v} = m \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$, где m - масса материальной точки, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор скорости материальной точки как производная по времени от радиус-вектора.

Момент импульса: вектор $\overrightarrow{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{mv} = m \cdot \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$, где m - масса материальной точки, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор скорости материальной точки как производная по времени от радиус-вектора, $\vec{r}$ - радиус-вектор материальной точки.

Энергия (мы говорим о кинетической энергии движения): скаляр $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot (\frac{d\vec{r}}{dt})^2$, где m - масса материальной точки, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ - вектор скорости материальной точки как производная по времени от радиус-вектора. (*Для простоты я не рассматриваю вращательную составляющую кинетической энергии, что не уменьшает общности рассуждений.*)

В формулах всех трёх величин есть масса m материальной точки, вектор скорости $\frac{d\vec{r}}{dt}$, а у момента импульса есть и радиус-вектор $\vec{r}$.

Во "взрослой" механике функции вида $I = I(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt})$ (то есть описываемые радиус-вектором и его производной) называются интегралами движения. Поэтому импульс, момент импульса и энергию называют интегралами движения.

Почему интегралами? Какая основная задача механики? *Определить закон движения тела при известных внешних воздействиях. Законом движения как раз и является функция $\vec{r}(t)$ - она задаёт положение материальной точки (тела) в любой момент времени. Так вот, для того, чтобы найти закон движения в виде $\vec{r}(t)$ из выражения вида $I = I(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt})$, надо решить дифференциальное уравнение. Или, как говорят в математике, проинтегрировать дифференциальное уравнение, взять интеграл. Отсюда слово "интеграл".*

Есть еще одно общее свойство у импульса, момента импульса и энергии. Если система состоит из нескольких материальных точек (их может быть очень-очень много), то:
- импульс системы равен сумме всех импульсов каждой из точек;

[1] *Про момент импульса подробно рассказано в моей Истории про Вращение*

- момент импульса системы равен сумме всех моментов импульса каждой из точек;
- энергия системы равна сумме всех энергий каждой из точек.

То есть и импульс, и момент импульса, и энергия системы состоит из сумм импульсов, моментов импульса и энергии элементов системы - то есть эти физические величины являются *аддитивными*.

Вот почему они называются аддитивными интегралами движения. ***В физике есть доказательство того факта, что аддитивным интегралам движения соответствуют свои законы сохранения***. И эти законы мы знаем:

- закон сохранения импульса,
- закон сохранения момента импульса,
- закон сохранения механической энергии.

Суть каждого из этих законов сохранения сводится к следующему: *в замкнутой системе соответствующая физическая величина (импульс, момент импульса или энергия) сохраняется (то есть не может исчезать и появляться)*. Под замкнутой понимается система, которая не обменивается с внешним миром соответстующей физической величиной. Например, система может быть замкнутой по импульсу, но не замкнутой по энергии (при неупругих ударах).

В противоположность импульсу, моменту импульса и энергии другие физические величины механики, характеризующие воздействие на тело, такими свойствами не обладают. Например:

- сила $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, где $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ - вектор ускорения материальной точки как вторая производная по времени от радиус-вектора;
- момент силы $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, где $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ - вектор ускорения материальной точки как вторая производная по времени от радиус-вектора.

Ни сила, ни момент силы не являются интегралами движения (поскольку в их формулы входит вторая производная по времени от радиус-вектора) и не существует закона сохранения силы и закона сохранения момента силы.

И импульс, и момент импульса, и энергия являются физическими величинами, описывающими ***свойства движущегося тела***[2] (а не внешних воздействий, это движение вызывающих).

В Истории про Вращение мы говорили о том, что любое движение твёрдого тела можно рассматривать как комбинацию поступательного и вращательного движений.

Импульс полностью описывает поступательное движение твёрдого тела. Импульс также иногда называют "количеством движения". Импульс тела говорит нам сколько количества поступательного движения содержится в теле. Правда, импульс ничего "не знает" про вращательное движение.

Момент импульса полностью описывает вращательное движение твёрдого тела. Момент импульса также иногда называют "моментом количества движения". Момент импульса тела говорит нам сколько количества вращательного движения содержится в теле. Правда, момент импульса ничего "не знает" про поступательное движение.

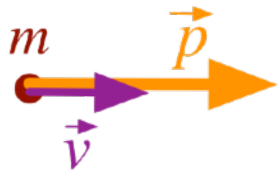
Энергия говорит нам какое количество работы содержит тело, учитывая как поступательное, так и вращательное движение. Это та работа, которая была совершена над телом внешними воздействиями, она же является работой, которую тело может совершить при взаимодействии с другими телами. Короче - запас работы.

Вот видите, как всё связано у этих трёх физических величин. Становится ясно почему мы их рассматриваем вместе.

===============

[2] *Ведь мы так и говорим: "импульс тела", "момент импульса тела", "энергия тела".*

Импульс тела



В этом разделе мы говорим только о поступательном движении тел.

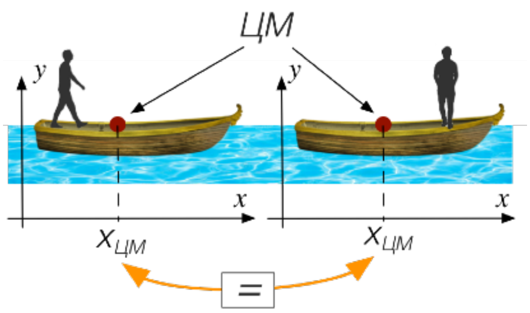
Импульс (количество движения) материальной точки массой m - вектор $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Импульс тела равен сумме импульсов материальных точек, из которых оно состоит (свойство аддитивности импульса): $\vec{P} = \sum m_i \cdot \vec{v_i}$
Импульс тела - мера его ***поступательного*** движения.

Привычную нам формулу второго закона Ньютона для материальной точки
$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ можно преписать в виде: $\vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} = d\vec{p}$. Величину $\vec{F} \cdot dt$ называют импульсом силы, а $d\vec{p}$ - изменение импульса материальной точки. Поэтому второй закон Ньютона может быть переформулирован так: ***импульс силы, действующий на материальную точку равен изменению импульса этой материальной точки.*** Такую формулировку второго закона Ньютона называют ***импульсной***. В силу свойств аддитивности этот же принцип распространяется на любое тело в целом. Импульсная формулировка второго закона Ньютона иногда применяется в решении задач (кстати, Ньютон сформулировал свой второй закон именно в этой формулировке).

Выше я напомнил вам что такое центр масс (ЦМ). ***В механике есть теорема о поступательном движении центра масс:*** *центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная векторной сумме всех внешних сил, приложенным к точкам системы.* Эта теорема доказывается с использованием импульсной формулировки второго закона Ньютона.

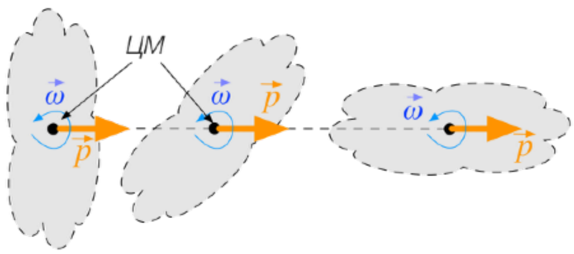
Из этой теоремы вытекают два важных свойства:
- Если на механическую систему не действуют внешние силы или векторная сумма внешних сил равна нулю, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно.
- Если сумма проекций внешних сил системы на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось остается постоянной.

Вот пример: человек переходит с одного конца лодки на другой. При этом координаты центра масс системы "лодка-человек" не изменятся: на систему не действуют внешние силы.



Из теоремы о движении центра масс также следует, что *без участия внешних сил, одними лишь внутренними силами, невозможно изменить положение центра масс механической системы*.

Но с помощью импульса тела описывается ***только поступательное его движение***. Вот на рисунке пример: центр масс тела движется поступательно (прямолинейно). Импульс центра масс тела постоянен. Но тело совершает при этом вращательное движение. И никакими импульсами это вращение не описать. Вращательное движение описывает момент импульса.



Закон сохранения импульса (ЗСИ)

Вся ценность импульса для механики заключается в том, что у импульса есть закон сохранения. Без него импульс был бы одним из параметров движения.

В механике закон сохранения импульса выводится с помощью простых преобразований из второго закона Ньютона. Но несмотря на эту простоту вывода закон сохранения импульса отражает фундаментальное свойство нашего с вами пространства-времени (*теорема Нётер*) - ***однородность пространства*** (одинаковость свойств пространства во всех его точках).

Итак: закон сохранения импульса.

Если векторная сумма внешних сил, действующих на систему тел, равна нулю (система является замкнутой), то векторная сумма импульсов всех тел системы есть величина постоянная.

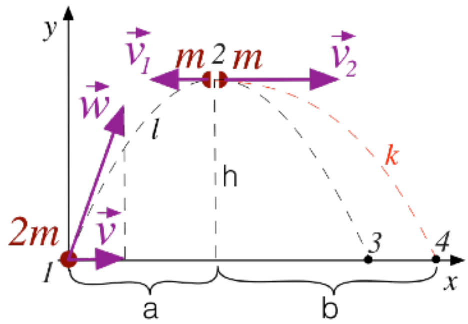
Суммарный импульс замкнутой системы сохраняется - не исчезает и не появляется. *Внутри системы тела могут взаимодействовать, обмениваться массами, импульсами.* Но закон есть закон: суммарный вектор импульса не изменится.

$$\sum \vec{p_i} = const \text{ или } \Delta \sum \vec{p_i} = 0$$

И ещё: импульс тела - вектор. Поэтому вполне возможна ситуация, когда по одной из осей система является замкнутой (проекция вектора внешних сил на эту ось равна нулю). ***Тогда закон сохранения импульса выполняется по этой оси***.

В общем случае для замкнутой системы из векторного выражения ЗСИ получаем три уравнения в проекциях на оси для трёхмерного пространства или два уравнения в проекциях на оси для плоского случая.

Нет внешних сил, действующих на систему, или векторная сумма этих сил равна нулю (хоть по одной из осей) - пиши уравнение закона сохранения импульса! Бывает, что система не является замкнутой по энергии и закон сохранения механической энергии не выполняется, однако ЗСИ работает (неупругие столкновения, разрывы снарядов и т.п.) - пиши уравнение закона сохранения импульса!



Давайте решим задачку: Снаряд, вылетевший из орудия, разрывается на два одинаковых осколка в наивысшей точке своей траектории на расстоянии a от орудия (по горизонтали). Один из осколков полетел в обратном направлении с той же скоростью, с которой летел снаряд до разрыва. На каком расстоянии от орудия упадет второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение: На рисунке изображены условия задачи. Пусть масса снаряда $2m$, тогда масса осколков - m каждый. Снаряд вылетел из орудия со скоростью $\vec{w}$ под некоторым углом к горизонту. Если бы снаряд не разорвался в наивысшей точке (точка 2), то он бы летел по параболе l и упал бы на расстоянии $2a$ от орудия в точке 3.

По оси X снаряд от точки 1 до точки 2 (до момента взрыва) двигался равномерно (сопротивления воздуха нет). В точке 2 (в наивысшей точке) скорость снаряда направлена горизонтально.

Пусть $\overrightarrow{v}$ - проекция скорости $\overrightarrow{w}$ на ось X - скорость горизонтального движения снаряда. Тогда в точке 2 у снаряда перед взрывом тоже будет скорость $\overrightarrow{v}$ (вертикальной составляющей нет).

Время подъёма снаряда на высоту h точки 2 - это время перемещения по оси X на расстояние a [1].

*Система "снаряд-осколки" (хотя осколки - это части снаряда) является **замкнутой** в смысле внешних сил по оси X (по оси У действует сила тяжести и по оси У система не является замкнутой). Значит по оси X выполняется ЗСИ.*

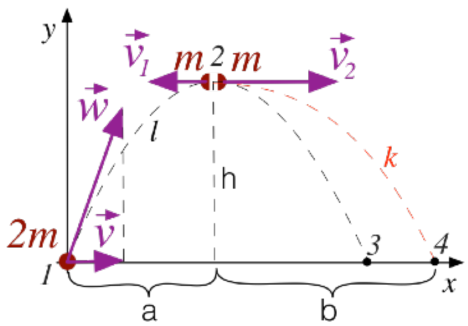
Значит проекция импульса снаряда на ось X "за микросекундочку" до взрыва равна сумме проекций импульсов осколков на ось X "через микросекундочку" после взрыва. Вот это уравнение ЗСИ в проекциях и запишем: $2m \cdot v = m \cdot v_1 + m \cdot v_2$. Всё понятно? Это будет единственное уравнение в задаче. Всё остальное - рассуждения.

Кстати, ***закон сохранения механической энергии в системе (ЗСМЭ) "снаряд-осколки" не выполняется*** - при взрыве появляется дополнительная энергия взрыва.

Но по условию задачи с учетом знаков проекции на ось X $v_1 = -v$ (первый осколок полетел в обратном направлении с той же скоростью, с которой летел снаряд до разрыва). Тогда $2m \cdot v = -m \cdot v + m \cdot v_2$ или $3m \cdot v = m \cdot v_2$ или $v_2 = 3v$. То есть второй осколок полетит в три раза быстрее, чем снаряд.
А хоть что-то про поведение импульса системы "снаряд-осколки" по оси У мы можем сказать? Можем.
На снаряд в точке 2 "за микросекундочку" до взрыва действует вниз сила тяжести $2mg$, на осколки "через микросекундочку" после взрыва действует вниз суммарная сила тяжести $2mg$. Вспомним импульсную форму записи второго закона Ньютона $\overrightarrow{F} \cdot dt = d\overrightarrow{p}$ и перепишем её для нашего случая: $\overrightarrow{2mg} \cdot dt = d\overrightarrow{p}$, где $d\overrightarrow{p}$ - изменение суммарного импульса системы "снаряд-осколки" по оси У за момент dt действия силы $\overrightarrow{2mg}$. Если считать, что взрыв произошел мгновенно ($dt = 0$), то импульс системы "снаряд-осколки" по оси У сразу перед взрывом и сразу после будет один и тот же. А это значит, что ***коль у снаряда в точке 2 сразу перед взрывом не было вертикальной составляющей импульса, то вертикальной составляющей импульса не будет и у осколков сразу после взрыва.*** Но в общем случае (когда $dt > 0$) суммарный импульс по оси У не сохраняется.

Хорошо!

Что мы можем сказать про то, по какой траектории полетит второй осколок? Он полетит по ветви параболы k до точки 4. Время его опускания по оси У с высоты h - это время его горизонтального движения от точки 2 до точки 4. Горизонтальная скорость второго осколка будет постоянна (сопротивления воздуха нет).

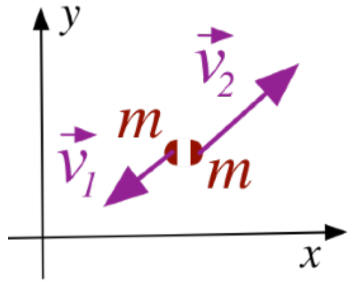


Время опускания второго осколка с высоты h равно времени поднимания снаряда по оси У из точки 1 на высоту h !!! Это очень важно - продумайте этот момент. [2]

Для поведения снаряда по оси У по условиям данной задачи взрыва как-бы и не было вовсе! Все взрывы-разлетания осколков происходят по оси X. По оси У - чистая кинематика - подбросили снаряд вертикально вверх до высоты h и он свалился обратно на землю (правда, две его половинки).

Можно, конечно, героически написать кучу кинематических уравнений движения снаряда и осколков и прийти к тому же выводу. Но, во-первых, можно ошибиться в уравнениях и преобразованиях, а во-вторых - мы же физики. Мы должны рассуждать и находить закономерности, а не тупо использовать формулы.

А из [1] и [2] вытекает, что время перемещения снаряда по оси X из точки 1 в точку 2 на расстояние a со скоростью $\vec{v}$ равно времени перемещения второго осколка по оси X от точки 2 до точки 4 со скоростью $3\vec{v}$ на расстояние b. А из этого следует, что $b = 3a$. Поэтому второй осколок упадет на расстоянии $4a$ от орудия. Задачу мы решили.

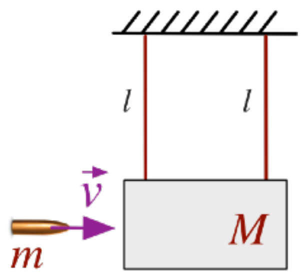


А теперь вопрос. А если бы в задаче не было сказано о том, что первый осколок "полетел в обратном направлении с той же скоростью, с которой летел снаряд до разрыва", мы могли бы её решить? Вот что мы максимум могли бы сказать: у снаряда в точке 2 перед взрывом был только горизонтальный импульс $2mv$ и не было вертикального. Значит сразу после взрыва применительно к произвольным направлениям векторов скоростей осколков мы могли бы записать: $\begin{cases} X: \quad 2mv = mv_{1x} + mv_{2x} \\ Y: \quad 0 = mv_{1y} + mv_{2y} \end{cases}$

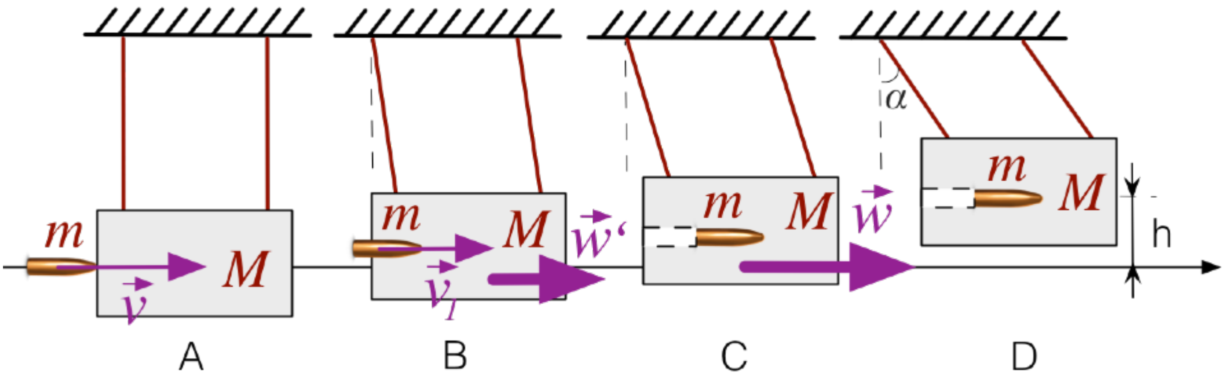
Очевидно, что для решения нужны дополнительные условия. Знаки проекций (и направления векторов) проявятся после решения этой системы уравнений в числах.

Такое подробное решение этой простенькой задачки для того, чтобы вы запомнили ход рассуждений. Большая часть этих рассуждений должна пронестись в голове при обдумывании задачи. Совершенно необязательно всё это "вываливать на стол" каждый раз. Но ответить на вопросы по задаче вы должны суметь.

Ещё задача: Пуля массой m, летящая со скоростью v, попадает в ящик с песком массой M, висящий на нитях длиной l. На какой угол отклонится ящик?



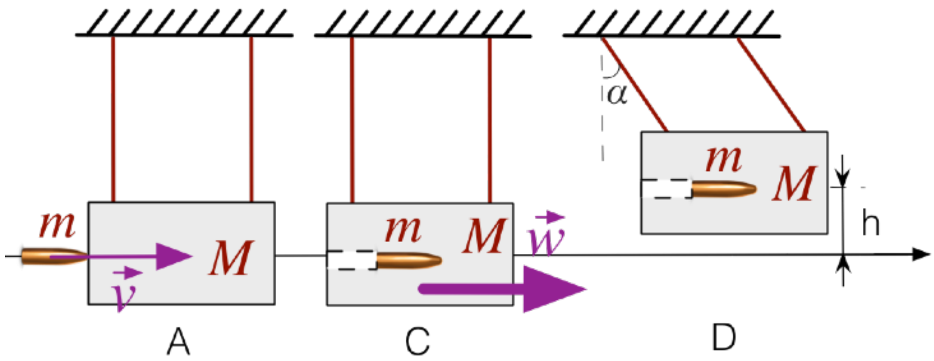
Решение: Буду объяснять подробно. Давайте весь процесс попадания пули в ящик и дальнейших событий заснимем скоростной камерой. Выделим ключевые кадры-точки.



- точка A: Ящик висит-не шевелится, пуля вот-вот коснётся ящика;
- точка B: Пуля вошла в ящик и движется в нём, замедляясь. Пуля трётся о песок, часть кинетической энергии пули переходит в тепловую. Ящик, получая импульс от пули, движется. Нити отклонились от вертикали. На интервале A-B ЗСИ выполняется, а ЗСМЭ - нет (часть энергии пули переходит в тепловую);
- точка C: Пуля только что остановилась относительно ящика, проделав в нём входное отверстие. Теперь пуля и ящик движутся с одной скоростью. Нити ещё больше отклонились от вертикали. Поднимаясь на нитях, ящик с пулей переводят часть своей кинетической

энергии в потенциальную. На интервале B-C ЗСИ выполняется, а ЗСМЭ - нет (часть энергии пули перешла в тепловую);
- точка D: Ящик с пулей остановились, поднявшись в самую высокую точку. Нити отклонились на максимальный угол от вертикали. Ящик с пулей перевели всю свою кинетическую энергию в потенциальную. На интервале C-D ЗСИ выполняется (хотя уже нет обмена импульсами между ящиком и пулей), выполняется и ЗСМЭ (уже нет превращения механической энергии в тепловую).

Казалось бы всё хорошо: мы запишем ЗСИ для системы "ящик-пуля" в точках A и C и найдём скорость $\vec{w}$ ящика с пулей. Затем мы запишем ЗСМЭ для "ящика-пули" в точках C и D и, определив их потенциальную энергию в точке D, найдём высоту h. Но вот какая закавыка: мы можем начать писать уравнения ЗСМЭ только начиная с точки C (когда уже нет превращения механической энергии в тепловую). Но до точки C ящик с пулей уже поднялись на какую-то высоту (нити уже отклонились). И эту высоту (угол отклонения нитей в точке C) нам никак ***не посчитать*** с помощью ЗСИ. Поэтому для "решабельности" таких школьных задачек подразумевается упрощение: точка B исключается из рассмотрения. То есть предполагается, что до тех пор, пока пуля не остановится в ящике с песком, ящик не движется. Завязла пуля в



ящике и остановилась - нити начали отклоняться и "ящик-пуля" начали двигаться и подниматься.

По импульсу система "ящик-пуля" замкнута по горизонтали (по вертикали действует сила тяжести). $p_A = m \cdot v$ - импульс системы "ящик-пуля" в точке A (ящик неподвижен). $p_C = (m + M) \cdot w$ - импульс системы "ящик-пуля" в точке C (ящик и пуля движутся с одной скоростью $\vec{w}$. $p_A = p_C \rightarrow m \cdot v = (m + M) \cdot w \rightarrow w = \dfrac{m}{m+M} \cdot v$ **[1]**.

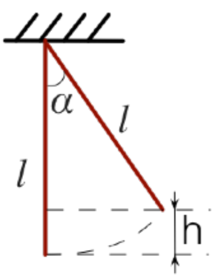
Теперь запишем механические энергии системы "ящик-пуля" для точек C и D:

$E_C = \dfrac{(m+M) \cdot w^2}{2}$ - в точке C у системы "ящик-пуля" только кинетическая энергия (за ноль потенциальной - уровень оси). $E_D = (m + M) \cdot gh$ - в точке D у системы "ящик-пуля" только потенциальная энергия (ящик с пулей остановились).

$E_C = E_D \rightarrow \dfrac{(m+M) \cdot w^2}{2} = (m+M) \cdot gh \rightarrow h = \dfrac{w^2}{2g}$. Используя [1], получаем:

$h = \dfrac{m^2 \cdot v^2}{2g(m+M)^2}$. Угол α находим из геометрии: $h = l(1 - cos\alpha)$, откуда

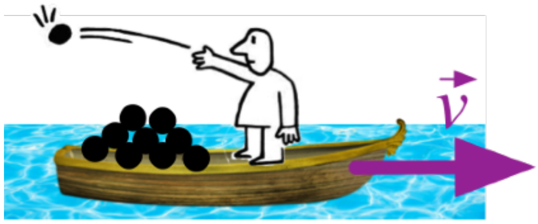
$cos\alpha = 1 - \dfrac{h}{l} = 1 - \dfrac{m^2 \cdot v^2}{2gl(m+M)^2}$. Задача решена.



Несколько правил по решению задач на закон сохранения импульса:

- из условий задачи определите *что является системой* ("ящик-пуля", "человек-лодка", "снаряд-осколки" и т.п.);
- выберите удобные оси. Под удобными я понимаю оси, по которым (хотя бы по одной) выбранная система является *замкнутой* (внешних сил нет или их векторная сумма равна нулю). Если таких осей нет, то и задача не про ЗСИ;
- выделите два (три, четыре, ...) ключевых состояния системы, в которых надо определить те или иные параметры движения;
- для этих состояний запишите суммарный импульс выбранной системы в проекции на те оси, по которым система является замкнутой;
- приравняйте эти суммарные импульсы состояний (равенство суммарных импульсов замкнутой системы - это и есть ЗСИ) - получите уравнения;
- если есть дополнительные условия в задаче - переведите их на язык формул;
- решаем-получаем ответ.

Реактивное движение



Представьте себе человека в лодке. В лодке есть куча камней. Человек периодически бросает камни в воду. Что происходит с лодкой? Правильно - лодка плывет в противоположную броску сторону. Чем сильнее и чаще человек будет бросать камни и чем тяжелее эти камни, тем быстрее поплывет лодка. Как это движение объяснить? "Человек-лодка-камни" - замкнутая по горизонтали система - внешних сил нет. Центр масс системы "человек-лодка-камни" при бросании человеком первого камня из покоящейся лодки должен оставаться на месте (по следствию теоремы о движении центра масс). Человек бросил первый камень влево - лодка переместилась вправо (чтобы центр масс остался на месте). Забыли про первый камень. Человек готов бросить второй камень. ЦМ системы "человек-лодка-оставшиеся камни" движется вправо. Человек бросает второй камень. Суммарный импульс системы "человек-лодка-оставшиеся камни" не должен измениться. Второй камень получил от человека импульс влево, значит лодка получит дополнительный импульс вправо, то есть увеличит скорость. И т.д. Я описал ***простейший реактивный двигатель***.

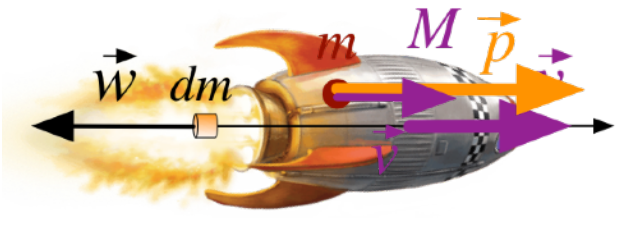
Реактивное движение - это движение тела, возникающее при отделении от него с какой-либо скоростью некоторой его части. Возьмем, например, детский резиновый шарик, надуем его и отпустим. Мы увидим, что, когда воздух начнет выходить из него в одну сторону, сам шарик полетит в другую. Это и есть реактивное движение.

По принципу реактивного движения плавает в море кальмар: он вбирает в себя морскую воду, а затем энергично выбрасывает её через своё "заднее сопло". Развивает при этом скорость до 60 км/ч.

На принципах реактивного движения основано ***движение ракет***. Движение ракет - это движение тел с *переменной массой* (топливо сжигается и выбрасывается наружу - масса ракеты уменьшается).

Рассмотрим ракету массы M, летящую со скоростью $\vec{v}$ (относительно неподвижной системы координат). На ракету не действуют внешние силы. По горизонтальной оси (как минимум) выполняется закон сохранения импульса. Масса ракеты M включает в себя массу конструкции плюс массу топлива.

За малый интервал времени dt реактивный двигатель ракеты выбрасывает из ракеты массу газов dm со скоростью $\overrightarrow{w}$ ***относительно ракеты***. В результате ракета прибавляет в скорости dv. Горение топлива необходимо для скоростного выбрасывания газов.



- Импульс системы до выбрасывания газов dm: $M \cdot v$;
- Импульс ракеты после выбрасывания газов dm: $(M - dm) \cdot (v + dv)$ - масса ракеты уменьшилась на dm;
- Импульс выброшенного газа массой dm: $dm \cdot (v + w)$; $v + w$ - скорость выброшенного газа *относительно неподвижной системы координат*.

По ЗСИ импульс до выбрасывания равен сумме импульсов после выбрасывания:
$M \cdot v = (M - dm) \cdot (v + dv) + dm \cdot (v + w)$
После раскрытия скобок имеем: $M \cdot dv = dm \cdot dv - w \cdot dm$
Величина $dm \cdot dv \ll w \cdot dm$, поэтому получаем $M \cdot dv = -\, w \cdot dm$

Из последнего уравнения методом простого интегрирования (не буду вас этим мучить) получаем: $v = w \cdot \ln \dfrac{M_0}{M}$, где M_0 - начальная масса ракеты на старте (при $v = 0$); M - текущая масса ракеты (за минусом выгоревшего топлива); w - скорость истечения газов (относительно ракеты); v - текущая достигнутая скорость. Эта формула называется ***формулой Циолковского***. Из этой формулы следует:

- максимально возможная скорость v_{max}, которую может развить ракета чистой массы M_P (без топлива), имеющая на старте топливо массой M_T, равна $v_{max} = w \cdot \ln(1 + \dfrac{M_T}{M_P})$;
- эффективнее добиваться увеличения v_{max}, увеличивая скорость истечения газов w, чем количество топлива M_T: пропорциональная зависимость растёт быстрее, чем натуральный логарифм.

==============================

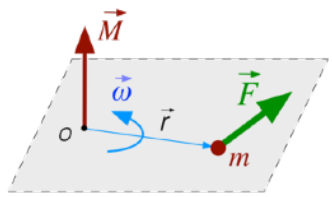
Мы завершили обсуждение импульса и закона сохранения импульса.

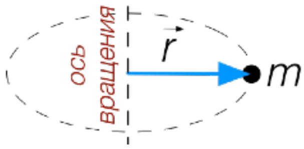
Момент импульса тела

Понятие момент импульса тела относится ко вращательному движению тел. Подробно о вращательном движении рассказано в Истории про Вращение.

Напомню основные понятия, касающиеся вращения:

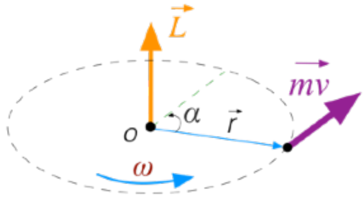
Момент силы $\overrightarrow{M}$ - мера ***внешнего*** вращательного воздействия на тело:
Момент силы относительно точки О - это ***вектор***, равный векторному произведению радиус-вектора, построенного от точки О к точке приложения силы, и вектора силы: $\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \overrightarrow{F}$ [н·м]





Момент инерции J - мера инертности тела при вращении:
Момент инерции материальной точки относительно неподвижной оси вращения - скалярная величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от этой точки до оси вращения: $J = m \cdot r^2$

[кг·м²] Момент инерции нескольких материальных точек: $J = \sum_{1}^{n} m_i \cdot r_i^2$ (*моменты инерции относительно одной и той же оси аддитивны*). Подобно тому, как масса является мерой инертности тела при его поступательном движении, момент инерции является мерой инертности тела при его вращательном движении.



Момент импульса (количества движения) $\vec{L}$ - мера количества вращательного движения в теле: для материальной точки, вращающейся вокруг центра O, и обладающей механическим импульсом $\overrightarrow{mv}$, моментом импульса $\vec{L}$ этой точки относительно O называют векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, построенного от O к материальной точке, и вектора импульса $\overrightarrow{mv}$: $\vec{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{mv}$ [м²·кг/с]
Для системы точек $\vec{L} = \sum \vec{L_i}$ (*момент импульса аддитивен - моменты импульса каждой точки (тела) вращающейся системы можно складывать*).

Для ***вращающегося абсолютно твёрдого тела*** справедливо соотношение: $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$, где $\vec{L}$ - момент импульса абсолютно твёрдого тела, J - момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости, с которой вращается тело.

Основное уравнением вращательного движения (аналог второму закону Ньютона для поступательного движения): $\sum \vec{M_i} = J \cdot \vec{\varepsilon}$, где $\sum \vec{M_i}$ - векторная сумма моментов сил, приложенных к телу, $\vec{\varepsilon}$ - вектор углового ускорения, J - момент инерции тела.

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ - суммарный вектор всех моментов сил, действующих на тело при вращательном движении, равен производной по времени вектора момента импульса тела.

В Истории про Вращение я рассказал об аналогии параметров и уравнений поступательного и вращательного движений.

Итак:

- Момент силы $\vec{M}$ - характеристика внешнего вращательного воздействия (аналог силы для поступательного движения);
- Момент инерции J - характеристика инертности тела к вращательному движению (аналог массы для поступательного движения);
- Момент импульса (количества движения) $\vec{L}$ - характеристика вращающегося тела - количество вращательного движения в теле (аналог импульса для поступательного движения).

Переписав формулу для момента импульса материальной точки в виде $\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ и учтя аддитивность моментов импульса материальных точек, образующих вращающуюся систему, мы можем утверждать, что момент импульса является аддитивным интегралом движения. А это значит, что ***моменту импульса соответствует свой закон сохранения***.

Закон сохранения момента импульса

Закон сохранения момента импульса вытекает из основного уравнения динамики вращательного движения и формулируется так:

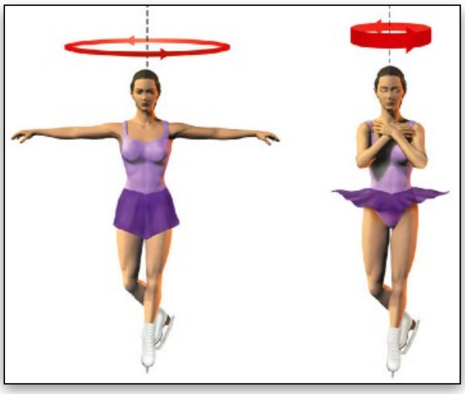
Векторная сумма моментов импульсов всех тел замкнутой системы относительно данной точки (оси) не изменяется со временем. *Под замкнутой понимается такая система, для которой векторная сумма моментов всех внешних сил относительно данной точки (оси), действующих на систему, равна нулю.*

В системе с нулевой суммой моментов внешних сил момент импульса не исчезает и не появляется. Мы имеем в виду моменты импульсов относительно одной и той же точки (оси).

Для замкнутой системы математически это можно записать так: $\sum \vec{L_i} = J_S \cdot \vec{\omega} = const$, где $\vec{L_i}$ - момент импульса элемента системы, J_S - момент инерции системы, $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения системы. Или так: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, где $\vec{L}$ - момент импульса системы.

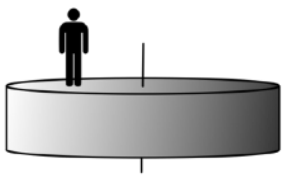
Закон сохранения момента импульса отражает ещё одно фундаментальное свойство нашего с вами пространства-времени (*теорема Нётер*) - ***изотропность пространства*** (одинаковости свойств пространства во всех его направлениях).

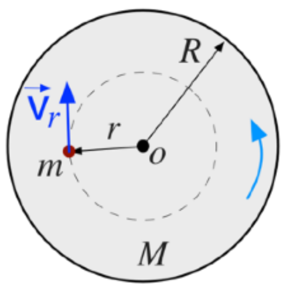
И как следствие из закона сохранения момента импульса: *момент импульса системы (тела) изменяется только в присутствии момента силы, направленной на его изменение.*



Классической иллюстрацией проявления закона сохранения момента импульса (ЗСМИ) - вращение фигуристки. Острый носок конька, которым фигуристка опирается на лёд, обеспечивает замкнутость системы (нет моментов внешних сил). Фигуристка начинает вращение, широко раскинув руки. А затем она руки прижимает, собирая массу своего тела ближе к оси вращения, тем самым уменьшая свой момент инерции. А коль момент инерции уменьшился, то из формулы ЗСМИ $J_S \cdot \vec{\omega} = const$ следует, что угловая скорость вращения должна возрасти, что и происходит - фигуристка начинает вращаться с бОльшей угловой скоростью (частотой).

Важное замечание: поскольку момент импульса является вектором, то при сложном вращении тела (вокруг нескольких осей) можно писать уравнения ЗСМИ по тем осям, по которым система является замкнутой.

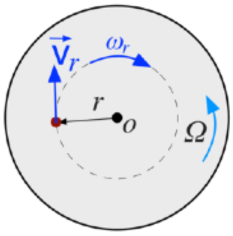




Давайте решим задачку на ЗСМИ: На неподвижной платформе-диске радиуса R и массой M стоит человек массой m на расстоянии r от центра О. Человек начинает идти по окружности радиуса r со скоростью v относительно платформы. С какой частотой будет вращаться платформа?

Решение: В системе "человек-платформа" нет моментов внешних сил, поэтому к ней применим ЗСМИ. Когда человек стоял на неподвижной платформе, момент импульса системы был равен 0. Следовательно, он должен остаться нулевым и после начала движения человека и вращения платформы.

Человек, идя по платформе, отталкивается от неё ногами, следовательно платформа и человек будут вращаться в разных направлениях друг относительно друга. По рисунку можем сказать, что платформа будет вращаться против часовой стрелки (её угловая скорость Ω будет положительна, её момент импульса L_P будет положителен), а человек ***относительно платформы*** будет вращаться по часовой стрелке).



Суммарный момент импульса системы "человек-платформа" относительно неподвижной оси О равен нулю. Поэтому мы можем записать: $L_P - L_H = 0$ [1], где L_P - момент импульса платформы, L_H - момент импульса человека.

Момент импульса платформы относительно оси О $L_P = J_P \cdot \Omega$, где J_P - момент инерции платформы относительно оси О, Ω - угловая скорость вращения платформы вокруг оси О.

Поскольку платформа - это диск, вращающийся вокруг своей оси, то $J_P = \frac{1}{2}M \cdot R^2$, а $\Omega = 2\pi \cdot N$, где N - искомая частота вращения платформы. Тогда $L_P = \pi M \cdot R^2 \cdot N$.

Момент импульса человека $L_H = J_H \cdot \omega$, где J_H - момент инерции человека относительно оси О, ω - угловая скорость человека относительно ***неподвижной*** оси О.

Человека можно рассматривать как материальную точку, поэтому: $J_H = m \cdot r^2$.
Теперь давайте разбираться с угловой скоростью человека относительно ***неподвижной*** оси О (точнее говоря, мы должны считать момент импульса человека относительно той же оси, что мы считали момент импульса платформы. А момент импульса платформы мы считали относительно неподвижной оси О).

Важно!

Человек вращается относительно платформы по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_r = \frac{v}{r}$, а платформа вращается относительно ***неподвижной*** оси О с угловой скоростью Ω. Значит угловая скорость человека относительно ***неподвижной*** оси О будет $\omega = \omega_r - \Omega = \frac{v}{r} - 2\pi \cdot N$.

Подставляем всё в уравнение [1]: $\pi M \cdot R^2 \cdot N - m \cdot r^2 \cdot (\frac{v}{r} - 2\pi \cdot N) = 0$. Откуда

$$N = \frac{m \cdot v \cdot r}{\pi(M \cdot R^2 - 2m \cdot r^2)}$$ [об/с].

Важное в этой задаче:
- понять, что в системе "человек-платформа" выполняется ЗСМИ
- увидеть, что в системе "человек-платформа" момент импульса системы равен 0 "до" и "после"
- выразить угловую скорость человека относительно ***неподвижной*** оси через относительную угловую скорость человека относительно платформы

Это пример задачи, когда тело совершает вращательное движение вокруг одной оси. Но тело может одновременно вращаться и вокруг нескольких осей. Например в тренажере для проверки вестибулярного аппарата. Такое сложное вращательное движение в механике описывается уравнениями Эйлера.

Мы завершили обсуждение момента импульса и закона сохранения момента импульса.

Энергия

Если импульс и момент импульса относятся к механике и в других разделах физики не фигурируют[3], то понятие энергии фундаментально и универсально.

По самому общему определению

> Энергия - это ***скалярная*** физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения и взаимодействия материи, мерой перехода движения материи из одних форм в другие. Измеряется в *джоулях* [Дж].

Энергия в природе многолика в своих формах: механическая энергия движущихся тел, гравитационная энергия, термодинамическая внутренняя энергия, электромагнитная энергия электрических и магнитных полей, химическая энергия, энергия взрыва, ядерная энергия, энергия вакуума, тёмная энергия (пока - гипотетическая).

С другой стороны, ***энергия является мерой способности физической системы совершить работу***. То есть можно сказать, что энергия физической системы - это ***количество работы***, запасённой в ней.

С научной точки зрения *энергия обладает тремя важнейшими свойствами*:

- энергия может проявляться в различных формах;
- различные формы энергии могут переходить друг в друга;
- при любых физических процессах совокупная энергия в замкнутой системе сохраняется.

По большому счёту энергию можно разделить на три вида:

Энергия движения

Движущееся тело способно оказывать силовое воздействие на другие тела на отрезке своего пути. Следовательно, оно способно совершить работу, и значит, оно обладает энергией. Энергия движения такого рода называется ***кинетической энергией***.
Согласно молекулярно-кинетической теории, *теплота - это проявление движения молекул вещества, и значит, ее можно считать особым видом кинетической энергии.*

Энергия положения

Материальное тело, находящееся в гравитационном поле (например, Земли), может совершить работу (если его отпустить). Говорят, что такое материальное тело обладает ***потенциальной энергией*** гравитационного поля, поскольку оно в нем находится. Именно гравитационное поле реально производит работу при падении тела. Точно так же электрически заряженная частица, помещенная в электрическое поле, обладает потенциальной энергией электрического поля. Имеется множество видов потенциальной энергии, связанных с магнитными и электрическими полями, с различными свойствами веществ. Потенциальная энергия может быть связана и со взаимным расположением и взаимодействием частей одного тела (например, пружина).
Потенциальная энергия присутствует в любой системе, где может быть совершена работа, которая до сих пор не совершена.

Энергия массы

В рамках теории относительности Эйнштейн открыл совершенно неожиданный для всех вид энергии, описываемый знаменитой формулой $E = m \cdot c^2$. Материальное тело обладает такого вида энергией просто потому, что оно имеет массу.

Превращение и сохранение энергии

Различные формы энергии взаимозаменяемы - энергия может переходить из одной формы в другую. Все формы энергии, за исключением тепловой, могут полностью

[3] Есть понятие импульса в электродинамике и гидродинамике, но в этих разделах физики это нечто другое.

преобразовываться друг в друга (тепловая энергия, согласно *второму началу термодинамики*, может преобразовываться в другие формы лишь частично). Все формы энергии, за исключением тепловой, представляют собой энергию направленного движения. Тепловая энергия - энергия хаотического движения.

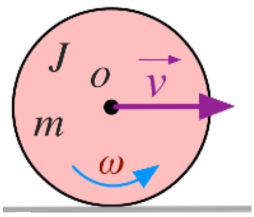
Каждое тело в любом его состоянии может обладать одновременно различными формами энергии, в том числе тепловой, механической, электрической, химической, внутриядерной, а также потенциальной энергией различных физических полей. Сумма всех форм энергии, которыми обладает тело, представляет собой его ***полную энергию***. Все прочие формы энергии, связанные с перемещением тела, а также потенциальная энергия внешних физических полей относятся к его ***внешней энергии***.

Но вернёмся в механику.

В механике различают два типа энергии: ***кинетическую и потенциальную***. Кинетическая энергия связана с движением тела (как поступательным, так и вращательным). Потенциальная энергия связана с положением тела относительно других тел и полей или со взаимодействием частей тела. Кинетическая энергия всегда характеризует тело относительно выбранной системы отсчёта, а потенциальная энергия - относительно источника силы (силового поля).

Кинетическая энергия в механике

Если твёрдое тело движется поступательно и одновременно вращается, то его кинетическая энергия определяется как сумма двух составляющих - кинетических энергий поступательного и вращательного движений:



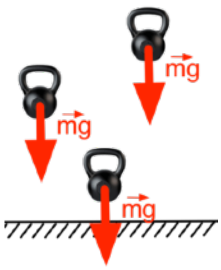
$E_K = \dfrac{m \cdot v^2}{2} + \dfrac{J \cdot \omega^2}{2}$, где m - масса тела, v - скорость поступательного движения, J - момент инерции тела, ω - угловая скорость его вращения.

Потенциальная энергия в механике

Как я говорил выше, потенциальная энергия присутствует в любой системе, где может быть совершена работа, которая до сих пор не совершена.

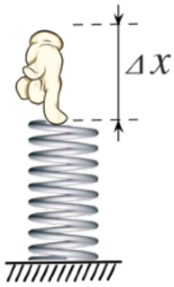
Какие виды потенциальной энергии мы встречаем в механике?

Прежде всего - потенциальная энергия гравитационного поля или потенциальная энергия силы тяжести. Есть между ними различия? Принципиально нет.

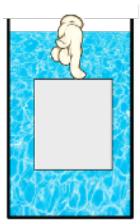


Потенциальная энергия силы тяжести. У поверхности Земли гравитационное поле ***считается однородным*** (вплоть до высот в 10 км). Конечно, это некое допущение, но оно весьма удобно при расчетах. А коли поле однородно, то все точки пространства в этом поле равноправны и невозможно выделить абсолютный уровень отсчета. Поэтому за отсчёт уровня нуля потенциальной энергии силы тяжести принимают ***любой удобный для данной задачи уровень***. Но коль вы уж такой уровень выбрали, то будьте любезны в рамках данной задачи вычислять потенциальную энергию силы тяжести относительно него. И тогда потенциальная энергия силы тяжести считается как знакомая нам $E_{ПОТ} = mgh$, где h - высота положения тела относительно выбранного нулевого уровня отсчёта.

Потенциальная энергия гравитационного поля. Мы с вами знаем, что на самом деле гравитационное поле неоднородно. В тех задачах, где действие разворачивается выше 10 км от поверхности Земли (или вообще - в космосе), учитывать эту неоднородность обязательно. Сила гравитационного взаимодействия между двумя телами определяется законом всемирного тяготения $F = G\dfrac{m \cdot M}{r^2}$. Она убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. И обращается в ноль на бесконечности. Такая неоднородность поля даёт нам возможность выделить абсолютный уровень отсчета его нуля - бесконечность. И формула для потенциальной энергии гравитационного поля будет[4]: $E_{ПОТ} = -G\dfrac{m \cdot M}{r}$



Потенциальная энергия сжатой пружины. Тоже знакомый нам[5] вид потенциальной энергии, выражающийся формулой $E_{ПОТ} = k\dfrac{\Delta x^2}{2}$.



А ещё? Да пожалуйста! Представьте себе плавающим в сосуде с водой деревянный кубик. Мы пальцем "утопили" его и держим под водой. Получил ли кубик от нашего пальца потенциальную энергию? Да, получил: если мы палец уберём, то кубик всплывёт, совершив работу.

Полная механическая энергия тела - это сумма его кинетической и потенциальной энергий:

$$E_{полн} = E_{кин} + E_{пот}$$

Ранее мы сказали, что энергия является мерой способности физической системы совершить работу.

Напомню:

> **Механическая работа** - это величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

> Все силы, встречающиеся в классической механике, принято разделять на ***консервативные*** *(потенциальные)* и ***неконсервативные*** *(диссипативные)*.

> **Консервативные силы** (например, гравитационные, электростатические) - силы, работа которых определяется ***только*** начальным и конечным положением тела и не зависит от траектории движения тела. Работа консервативных сил на замкнутом участке равна нулю.

> **Неконсервативные силы** (например, сила трения, сила сопротивления среды) - силы, работа которых зависит от формы пути тела. Неконсервативные силы могут совершать как положительную, так и отрицательную работу. Работа неконсервативных сил сопровождается появлением дополнительной тепловой энергии тел, над которыми совершена такая работа.

> ***Если на систему тел действуют только консервативные силы, можно для нее ввести понятие потенциальной энергии.*** Работа любых консервативных сил всегда происходит за счет убыли потенциальной энергии.

Теорема о кинетической энергии выводится из законов Ньютона:

Изменение кинетической энергии системы равно работе всех внутренних и внешних сил, действующих на тела системы.

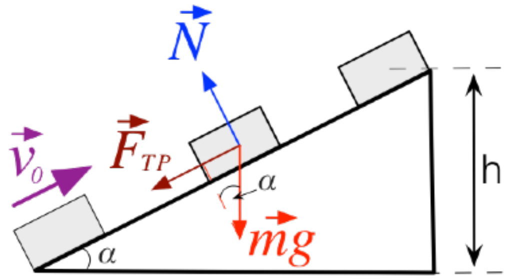
Эта теорема справедлива независимо от того, какие силы действуют на тела системы: консервативные или неконсервативные (включая силы трения).

Заметьте, это никакой не закон сохранения механической энергии!

[4] Подробности смотри в Истории про Гравитацию

[5] Смотри Историю про Силы

Вот простенький пример: Тело, имеющее начальную скорость, движется вверх по наклонной поверхности (с постоянным трением) и останавливается. Опишем этот процесс с учетом теоремы о кинетической энергии (ТКЭ). Системой является "тело-поверхность".



Имеем два состояния: начальное - тело начинает двигаться по наклонной поверхности со скоростью v_0; конечное - тело остановилось на высоте h.

В начальном состоянии кинетическая энергия тела была $E_K = \dfrac{m \cdot {v_0}^2}{2}$, в конечном - 0 (тело остановилось). Изменение кинетической энергии ("стало" - "было"): $\Delta E_K = -\dfrac{m \cdot {v_0}^2}{2}$.

Какие силы есть в системе и какую работу они совершают в нашем процессе?
Сила трения совершает отрицательную работу (вектор силы трения направлен в противоположную вектору перемещения сторону): $A_{TP} = -F_{TP} \cdot S$.
Сила тяжести (проекция вектора силы тяжести на линию поверхности) совершает отрицательную работу (вектор проекци силы тяжести на линию поверхности направлен в противоположную вектору перемещения сторону): $A_{mg} = -mg \cdot sin\alpha \cdot S$.
Сила реакции опоры работы не совершает, поскольку она направлена перпендикулярно вектору перемещения.

По ТКЭ: $\Delta E_K = A_{TP} + A_{mg}$ или $-\dfrac{m \cdot {v_0}^2}{2} = -F_{TP} \cdot S - mg \cdot sin\alpha \cdot S$. Но $S = \dfrac{h}{sin\alpha}$, тогда $-\dfrac{m \cdot {v_0}^2}{2} = -F_{TP} \cdot S - mgh$ или $\dfrac{m \cdot {v_0}^2}{2} = F_{TP} \cdot S + mgh$.
Из последнего уравнения следует, что изначальная кинетическая энергия тела израсходована на совершение работы силой трения и на увеличение потенциальной энергии тела. Более того, вся работа силы трения (диссипативной силы) пошла на увеличение внутренней энергии системы "тело-поверхность" (проще говоря, они нагрелись). А работа силы тяжести (потенциальной силы) пошла на увеличение потенциальной энергии тела. Можно записать: $E_{кин} = Q_{тр} + E_{пот}$
Получили уравнение энергетического баланса: энергия системы "до" равна суммарной энергии системы "после". Ещё раз подчеркну, в этой задаче речи не идёт ни о каком законе сохранения механической энергии (часть механической энергии перешла в тепловую, какое уж тут сохранение!).

Ранее мы показали, что ***механическая энергия является аддитивным интегралом движения***. Значит ей соответствует свой закон сохранения. Поговорим о нём.

Закон сохранения энергии

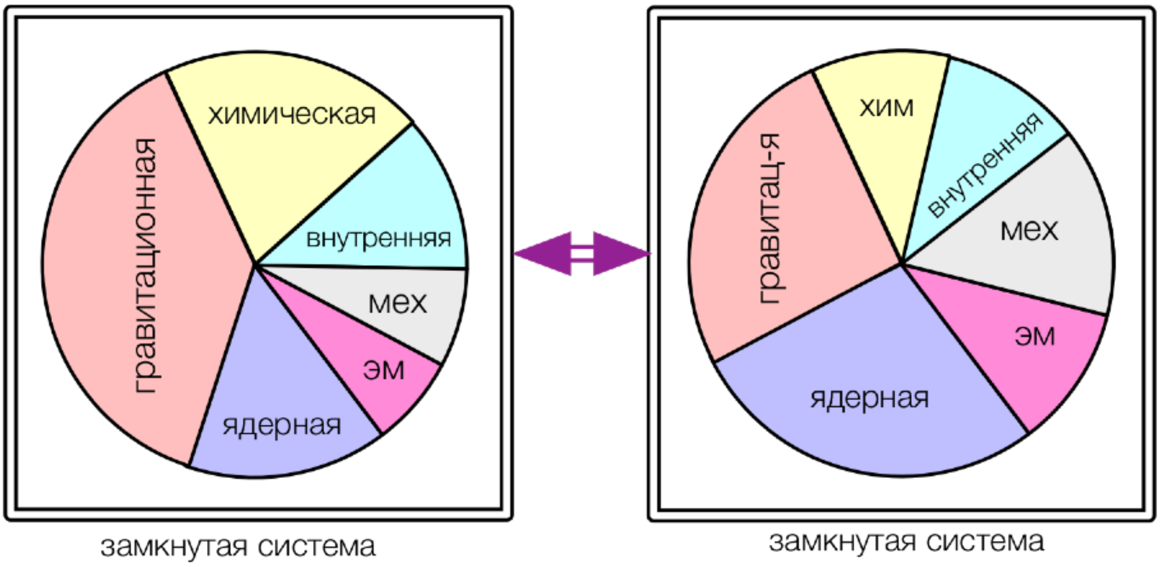
Так же, как мы начали разговор о механической энергии с общих "энергетических" вопросов, начнём разговор с *общего закона сохранения энергии*.

> *Закон сохранения энергии* - фундаментальный закон природы, установленный эмпирически и заключающийся в том, что для замкнутой физической системы полная энергия системы сохраняется с течением времени.

Закон сохранения энергии является (*теорема Нётер*) следствием ***однородности времени***, то есть независимости законов физики от момента времени, в который рассматривается система.

Мы говорили выше, что энергия может принимать различные формы: механическая энергия, гравитационная, термодинамическая внутренняя, электромагнитная, химическая, ядерная и пр.

$$\Sigma E_i = \Sigma E_j$$



Под замкнутой понимается система, которая не обменивается ни одной из форм энергии с внешним миром. Возможен переход энергии из одной формы в другую (перераспределение энергии по формам) внутри системы, но полная энергия замкнутой системы, равная сумме энергий отдельных форм, сохраняется. ***В замкнутой системе энергия не может появиться ниоткуда и пропасть в никуда***.

В различных разделах физики по историческим причинам закон сохранения энергии формулировался независимо. Для каждой формы энергии закон сохранения имеет свою, отличающуюся от универсальной, формулировку. Например, в классической механике был сформулирован ***закон сохранения механической энергии***, в термодинамике - ***первое начало термодинамики***, а в электродинамике - ***теорема Пойнтинга***.

И это понятно. Зная, что в замкнутой системе полная энергия всех форм сохраняется, потребуем от системы, чтобы в ней не перераспределялась механическая энергия и получим **закон сохранения механической энергии (ЗСМЭ)**.

В замкнутой системе, где действуют только консервативные (потенциальные) силы, полная механическая энергия сохраняется.

Напомню: Полная механическая энергия тела - это сумма его кинетической и потенциальной энергий: $E_{полн} = E_{кин} + E_{пот}$

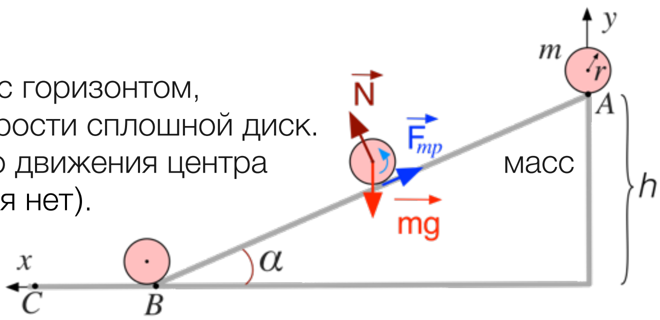
Оговорка "действуют только консервативные (потенциальные) силы" как раз и предназначена для того, чтобы уточнить: в системе нет перераспределения между механической и внутренней (тепловой) формами энергий. А какие внутренние силы разрешены в такой замкнутой системе? Консервативные. Например, силы упругости и силы тяготения. Но как только в системе обнаруживается ***действующая*** (совершающая работу) сила трения - ЗСМЭ перестает выполняться - часть механической энергии уходит в тепловую..

Уравнением закон сохранения механической энергии можно выразить так:
$E_{K1} + E_{P1} = E_{K2} + E_{P2}$, где E_{K1}, E_{P1} - кинетическая и потенциальная энергии замкнутой системы в состоянии 1, E_{K2}, E_{P2} - кинетическая и потенциальная энергии замкнутой системы в состоянии 2.

Важно отметить, что ЗСМЭ позволяет получить связь между координатами и скоростями тела в двух разных точках траектории без анализа закона движения тела во всех промежуточных точках. Применение ЗСМЭ может упростить решение многих задач.

Но поскольку энергия - это скаляр, то ЗСМЭ даёт только одно уравнение (в отличие от ЗСИ и ЗСМИ, где можно записать 2 (или 3 - для пространственного случая) уравнения по осям, по которым система является замкнутой), связывающее два состояния системы.

Решим задачку.



Задача: С наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, скатывается без проскальзывания и без начальной скорости сплошной диск. Определите установившуюся скорость поступательного движения центра масс диска по горизонтальной плоскости (трения скольжения нет).

Решение: При скатывании диска с наклонной поверхности присутствует ***сила трения покоя***, которая и обеспечивает диску вращательное движение (без него диск просто соскальзывал бы без вращения). Но эта сила не совершает работы. Поэтому полная механическая энергия диска не изменяется - будем использовать ЗСМЭ.

В точке А диск обладает только потенциальной энергией (за 0 потенциальной энергии принят 0 по оси У).
В промежуточной точке на наклонной поверхности диск обладает как потенциальной энергией, так и кинетической энергией. Причем кинетичес кая энергия состоит из кинетической энергией поступательного и вращательного движений.
В точке В диск обладает только кинетической энергией поступательного и вращательного движений.
После точки В скорость поступательного движения диска не меняется (трения скольжения нет).
Запишем уравнени закона сохранения механической энергии для точек А и В:
$mgh = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}$, где v - скорость центра масс диска в точке В (и во всех точках далее) - искомая скорость, ω - угловая скорость вращения диска относительно оси, проходящей через его центр масс, J - момент инерции диска относительно оси вращения ($J = \dfrac{1}{2}m \cdot r^2$).

$\omega = \dfrac{v}{r}$ - кинематическая связка. Откуда $v = 2\sqrt{\dfrac{gh}{3}}$. Задача решена.

====================

Мы закончили рассматривать механические понятия: импульс, момент импульса, энергия и законы их сохранения.

Удачи!