# Вращение

Вращение с точки зрения Динамики.

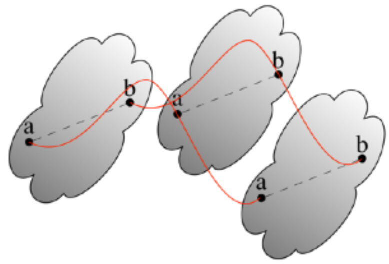
"Вращается флюгер вокруг оси - показывает ветер.
Вращается Солнце вокруг Земли -обогревает Землю.
Вращается папа вокруг мамы - наверное, провинился."
Олег Бундур

В Истории про Кинематику мы рассмотрели вращения материальной точки и твёрдого тела с точки зрения *кинематики*. Здесь же будем говорить о вращении с точки зрения Динамики. Много интересного и неожиданного.

Приведу из Истории про Кинематику несколько важных положений.

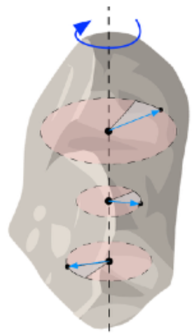
## Виды движения

Существует два принципиально разных вида механического движения: *поступательное* и *вращательное*. Наличие этих двух видов движения вытекает из базовых свойств пространства.




**Поступательное движение** - это механическое движение тела, при котором отрезок прямой, соединяющий две любые точки этого тела, не изменяется в размере и остаётся параллельным своему положению в любой предыдущий момент времени. При поступательном движении все точки тела описывают одну и ту же траекторию и в любой момент времени имеют одинаковые по направлению и абсолютной величине векторы скорости и ускорения. Это относится как движению в одной плоскости, так и к движению в пространстве.

**Прямолинейное движение** - механическое движение, происходящее вдоль прямой линии. То есть, при прямолинейном движении материальной точки траектория представляет собой прямую линию. *Прямолинейное движение является частным случаем поступательного движения*.



**Вращательное движение** - это вид механического движения, при котором ***материальная точка*** описывает окружность, а у твёрдого тела все его точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Центры всех окружностей лежат при этом на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой ***осью вращения***. Если ось вращения расположена внутри тела, то говорят, что тело вращается само по себе. Если ось вращения расположена вне тела, то говорят об ***орбитальном вращении*** (пример - Земля вокруг Солнца).

Тело может участвовать в *нескольких вращательных движениях одновременно*: примером тому опять же является наша Земля - Земля вращается вокруг своей оси и вращается вокруг Солнца.

Математически доказывается, что:

Любое механическое движение тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательных движений!

То есть любое механическое движение сводится к сумме поступательное + вращательные. ***Поступательное движение нельзя свести к вращательным, а вращательное - к поступательным.*** Они - принципиально различны!

У поступательного и вращательного движений есть кинематические аналоги - параметры движения:

| Поступательное движение | | Вращательное движение | |
|---|---|---|---|
| путь | $s = f(t)$ | угол | $\varphi = f(t)$ |
| скорость | $v = \dfrac{ds}{dt}$ | угловая скорость | $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ |
| ускорение | $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ | угловое ускорение | $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ |

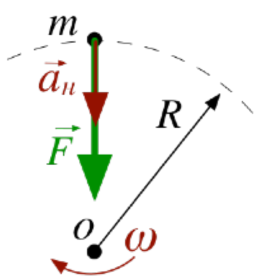
Итак,

Кинематика отвечает на вопрос *как* тело движется.
А Динамика отвечает на вопрос *почему* тело движется.

И начинаем с простейшего случая ...

## Динамика вращательного движения материальной точки

Динамика - раздел механики, в котором изучаются причины возникновения механического движения. Динамика оперирует понятиями масса, сила, импульс, момент импульса (вот об этом мы и будем говорить), энергия. Динамика решает две взаимно обратные задачи: по заданному закону движения тела определяет равнодействующую сил, действующих на тело, и по заданным силам определяет закон движения тела. Основу динамики образуют ***три закона Ньютона***, о которых мы подробно говорили в Истории про Силы.

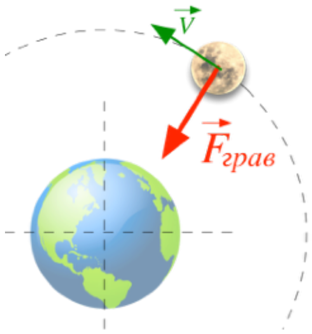



Рассмотрим привычный для нас пример: материальная точка массой $m$ равномерно вращается по окружности с постоянной угловой скоростью $\omega$.

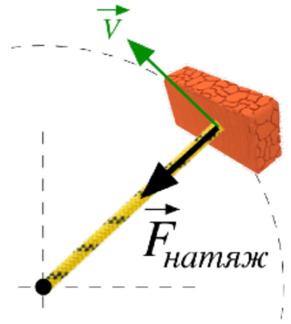
Один из выводов Первого закона Ньютона говорит: *если тело движется не по прямой, то ищите силы, на него действующие.* Вращение - это как раз движение не по прямой. Значит на вопрос "почему наша материальная точка вращается" у нас уже готов ответ: на неё действует сила.

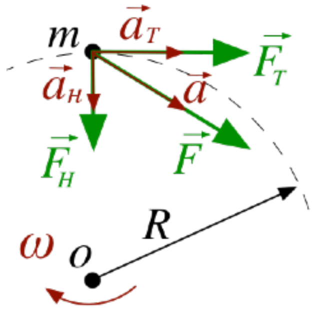
Мы уже знаем, что при равномерном вращении по окружности с постоянной угловой скоростью $\omega$ материальная точка движется с *нормальным* (центростремительным) *ускорением* $a_H = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$, направленным по радиусу вращения. Тогда по Второму закону Ньютона величина силы, это вращение порождающей, равна $\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a_H}$. Силу эту называют ***центростремительной***. Центростремительная сила - эта сила, которая действует в перпендикулярном к линии движения направлении и сворачивает тело с прямолинейной траектории. *Центростремительная сила - это НЕ какой-то специальный вид сил. Центростремительная сила - это роль (функция), которую играют те или иные силы в конкретных физических условиях.*

*Заметьте, что в процессе вращения центростремительная сила постоянно меняет свое направление - она всё время смотрит на центр вращения!!!*




При вращении по кругу кирпича на веревке центростремительной силой является сила натяжения веревки. Сила гравитационного притяжения является центростремительной силой, действующей на Луну при ее орбитальном вращении вокруг Земли. Для мотоциклиста в повороте центростремительной силой является сила трения. Сила электростатического притяжения (кулоновская сила) является центростремительной для электрона, вращающегося вокруг ядра атома (если не вдаваться в квантовую природу микромира). И так далее.



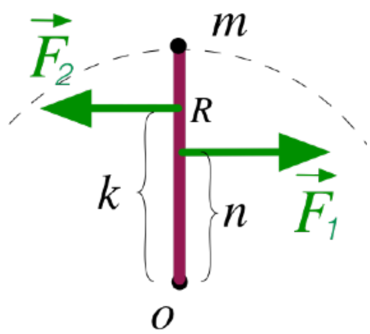

А как рассчитать вращательное движение, если к материальной точке приложена сила $\vec{F}$, направленная под некоторым углом (как на рисунке)?

Поступаем так: разлагаем силу $\vec{F}$ на две составляющие: нормальную (центростремительную) $\overrightarrow{F_H}$ и тангенциальную $\overrightarrow{F_T}$. По Второму закону Ньютона $\overrightarrow{F_H} = m \cdot \overrightarrow{a_H}$ и $\overrightarrow{F_T} = m \cdot \overrightarrow{a_T}$. Дальше уже можно писать не в векторах, а в проекциях на соответствующие оси.

Из кинематики вращения материальной точки мы знаем, что: $a_H = \omega^2 \cdot R = (\frac{d\varphi}{dt})^2 \cdot R$; $a_T = \varepsilon \cdot R = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot R$ ($\omega$ - угловая скорость; $\varepsilon$ - угловое ускорение). Поэтому получаем два уравнения: $F_H = m \cdot (\frac{d\varphi}{dt})^2 \cdot R$ и $F_T = m \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot R$.
Кинематика материальной точки ($\varphi(t)$) связана этими уравнениями с её динамикой ($F$). В зависимости от того, что дано в задаче, можем найти остальные параметры.

## Динамика вращательного движения твёрдого тела

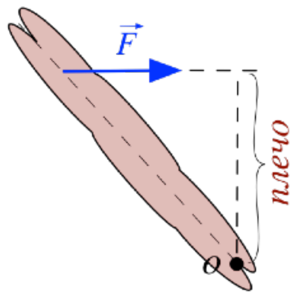
А давайте попытаемся решить вот какую задачу: материальная точка массы $m$ прикреплена невесомым жестким стержнем длины $R$ к фиксированному центру вращения $O$. К стержню на расстоянии $n$ от точки $O$ приложена перпендикулярная сила $\overrightarrow{F_1}$, а на расстоянии $k$ от точки $O$ приложена противоположная перпендикулярная сила $\overrightarrow{F_2}$ - как показано на рисунке. Опишите движение материальной точки.




Если внимательно посмотреть на условия задачи, то станет понятно, что динамика вращательного движения материальной точки, как мы её рассмотрели выше, в данном случае не работает. Почему? Ведь у нас есть материальная точка, стержень невесом. Это да, но когда мы говорим о материальной точке, то мы подразумеваем то, что она не имеет размера. И все силы, которые на неё действуют, должны быть приложены именно к ней. А в нашем случае конструкция "невесомый стержень + материальная точка" имеет размеры и *силы приложены к разным точкам* этой конструкции. Поэтому эту задачу надо уже решать *методами динамики вращательного движения твёрдого тела*.

Принципиальное отличие твёрдого тела от материальной точки состоит в том, что твёрдое тело имеет *размеры, форму и внутреннюю структуру*.

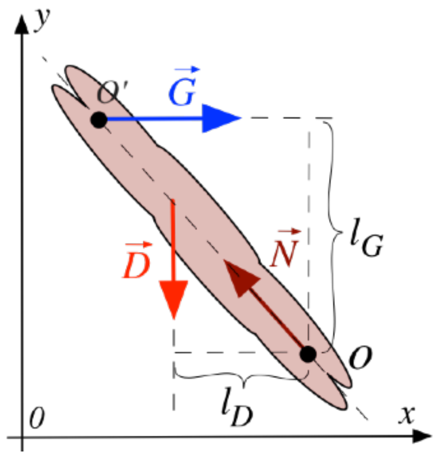
Но сначала я напомню вам о разделе механики, который вы изучали в школе - о *Статике*. Статика изучает равновесие тел. Именно тел, а не материальных точек. В статике тела имеют пространственный размер. В Статике рассматривается равновесие тел как в смысле поступательного движения, так и вращения. Вот именно из-за последнего мы и вспоминаем Статику.




В статике вводится понятие *момент силы* относительно оси (точки) вращения. ***Момент силы относительно точки вращения*** - это произведение величины этой силы на плечо действия этой силы относительно точки вращения. ***Плечом*** действия силы называют величину перепендикуляра, опущенного из точки вращения (возможного вращения) на линию действия силы.

Момент силы = величина силы x плечо

В рамках каждой задачи моменты сил разделяются на моменты, вращающие (пытающиеся вращать) тело против часовой стрелки и моменты, вращающие (пытающиеся вращать) тело по часовой стрелке. Школьная статика опять-же застенчиво не уточняет: а момент силы - это вектор или скаляр? Ничего, чуть позже мы уточним.




Так вот, статика утверждает, *что условием отсутствия вращения тела относительно данной оси (точки) является равенство сумм моментов сил, приложенных к данному телу, вращающих (пытающихся вращать) тело* ***против*** *часовой стрелки и сумм моментов сил, приложенных к данному телу, вращающих (пытающихся вращать) тело* ***по*** *часовой стрелке.* Для тела на рисунке условием отсутствия вращения относительно точки О будет условие: $\left|\vec{G}\right| \cdot l_G = \left|\vec{D}\right| \cdot l_D$

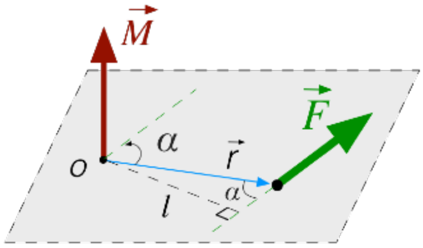
(*сила* $\vec{N}$ *проходит через точку О и момента не создает - её плечо равно 0*).

Ну а условием отсутствия ***поступательного*** движения является равенство нулю векторной суммы всех сил, приложенных к телу (из Второго закона Ньютона).

Этими методами статики решаются задачи поиска условий равновесия, подъёма грузов с помощью рычагов, поиска центров тяжести и пр.

===================

Мы возвращаемся к динамике вращения твёрдого тела. Для начала мы позаимствуем у Статики понятие момента силы. Только лишь немного уточним.

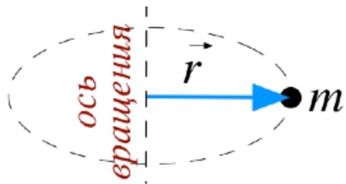



*Момент силы* относительно точки О - это ***вектор***, равный векторному произведению[1] радиус-вектора, построенного от точки О к точке приложения силы, и вектора силы: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ [н·м]

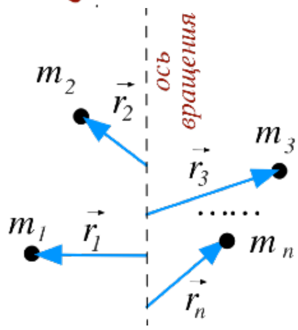
Тогда условие отсутствия вращательного движения в статике можно переформулировать так: *векторная сумма моментов тела относительно данной оси (точки) равна нулю*. Ведь проще же! Если присмотреться к рисунку, то "школьное" определение величины момента силы из него геометрически вытекает.

Важнейшее понятие динамики вращательного движения твёрдого тела - *момент инерции*. Подобно тому, как масса является мерой инертности тела при его поступательном движении, момент инерции является мерой инертности тела при его вращательном движении. В общем случае понятие момента инерции надо рассматривать в трехмерном пространстве.

*Момент инерции материальной точки относительно данной оси вращения* - скалярная величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от этой точки до оси вращения: $J = m \cdot r^2$ [кг·м²]




Соответственно момент инерции нескольких материальных точек: $J = \sum_{1}^{n} m_i \cdot r_i^2$ (*моменты инерции относительно одной и той же оси аддитивны*). *Моменты инерции тел (относительно одной и той же оси вращения), входящих во вращающуюся систему тел, можно складывать.*



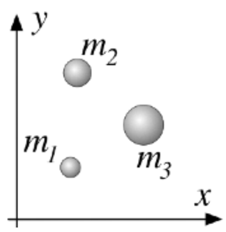

Ну а твёрдое тело можно разбить на множество "мелких материальных точек", и, сосчитав сумму их моментов инерции, получить момент инерции твёрдого тела в целом.

| |
|---|
| Момент инерции твёрдого тела относительно какой-либо оси зависит от массы, формы, распределения массы по объёму тела, а также от положения тела относительно этой оси. |

Напомню еще одно понятие, которое вы проходили в школе - ***центр масс***.

*Центр масс тела* - геометрическая точка, характеризующая движение тела как целого. Если на тело не действуют внешние силы, то центр масс тела движется с постоянной по величине и направлению скорости. Положение центра масс (центра инерции) системы из трёх материальных точек в координатах определяется так (на примере $x$-координаты):

$$x_c = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$ где $x_i$ - координата материальной точки.

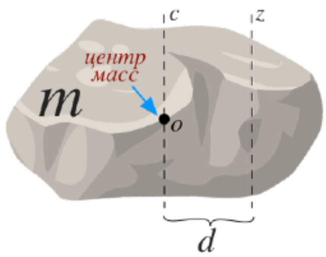


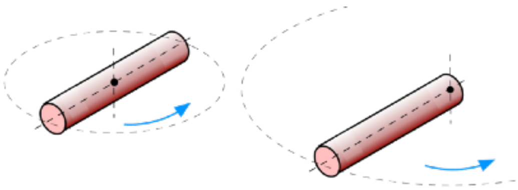

Эту формулу легко распространить на любое количество точек.

[1] *О векторном произведении рассказано в Приложении 1.*

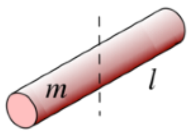
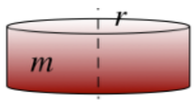
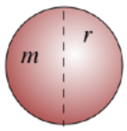
*Чтобы избежать путаницы*. Есть ещё одно похожее понятие - *центр тяжести* тела: точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести, действующих на тело, равен нулю. Центр масс и центр тяжести совпадают в однородном гравитационном поле.

Важное свойство момента инерции тела: *момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс*[2] *этого тела, и параллельной данной оси, и произведению массы тела на квадрат расстояния между осями* (***теорема Гюйгенса - Штейнера***): $J_Z = J_C + m \cdot d^2$ (оси C и Z параллельны). Эта теорема облегчает вычисление момента инерции тела относительно произвольной оси.



Вы, наверное, понимаете из жизненного опыта, что вращать стержень за его центр легче, чем за его кончик? Разные моменты инерции в обоих случаях это объясняют.

| | Тело | Момент инерции |
|---|---|---|
|  | Стержень (цилиндр) длины $l$ и массой $m$ | $J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$ |
|  | Сплошной цилиндр радиуса $r$ и массой $m$ | $J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$ |
|  | Шар радиуса $r$ и массой $m$ | $J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$ |

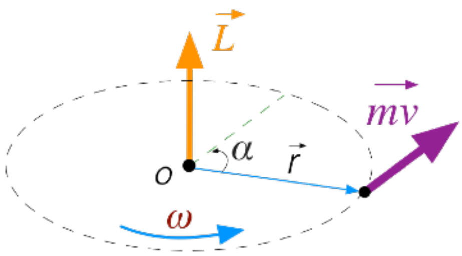
В табличке приведены формулы для расчета момента инерции простейших тел (*ось вращения проходит через центр масс*). В справочниках вы можете найти формулы и для многих других тел.

И ещё одно важное понятие динамики вращательного движения твёрдого тела - *момент импульса (момент количества движения)*.

Момент импульса характеризует количество вращательного движения. Это величина, зависящая от того, сколько массы вращается, как она распределена относительно оси вращения и с какой скоростью происходит вращение.

Для материальной точки, вращающейся вокруг центра O, и обладающей механическим импульсом $\overrightarrow{mv}$, моментом импульса $\overrightarrow{L}$ этой точки относительно O называют векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, построенного от O к материальной точке, и вектора импульса $\overrightarrow{mv}$:

$\overrightarrow{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{mv}$ [м²·кг/с]




Для системы точек $\overrightarrow{L} = \sum \overrightarrow{L_i}$ (*момент импульса аддитивен - моменты импульса каждой точки (тела) вращающейся системы можно складывать*).

[2] *Центр масс иногда называют центром инерции.*

Для ***вращающегося абсолютно твёрдого тела*** справедливо соотношение:
$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$, где $\vec{L}$ - момент импульса абсолютно твёрдого тела, $J$ - момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости, с которой вращается тело.

==========

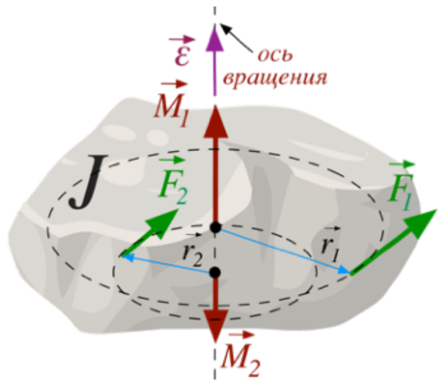
Коль уж мы с вами рассматриваем динамику вращательного движения твёрдого тела, которую в школе не рассматривают, то и приходится использовать "взрослые" приемы: векторные произведения, представление векторов вращения в пространстве. В этом ничего нет сложного. Привыкайте.

Итак, введено несколько новых понятий:

- *Момент силы* $\vec{M}$ - мера внешнего вращательного воздействия на тело;
- *Момент инерции* $J$ - мера инертности тела при вращении;
- *Момент импульса (количества движения)* $\vec{L}$ - мера количества вращательного движения в теле.

Сейчас мы увидим как это всё работает для решения задач динамики вращательного движения твёрдого тела.

## Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела




Если к твёрдому телу, вращающемуся вокруг данной оси, приложены силы, создающие вращательные моменты, то векторная сумма этих моментов пропорциональна угловому ускорению вращения тела:
$\sum \vec{M_i} = J \cdot \vec{\varepsilon}$, где $J$ - момент инерции тела относительно оси вращения. Это уравнение называется *основным уравнением вращательного движения твёрдого тела.*

На рисунке $\vec{M_1} + \vec{M_2} = J \cdot \vec{\varepsilon}$.

Непонятно? А вот очень похожая формула: $\sum \vec{F_i} = m \cdot \vec{a}$ ( $\sum \vec{F_i}$ - векторная сумма сил, приложенных к телу, $m$ - масса тела, $\vec{a}$ - ускорение тела). Она вам знакома? Ну конечно, это Второй закон Ньютона для поступательного движения. Уж мы то привыкли использовать его во всех задачках про поступательное движение.

*Так же, как второй закон Ньютона даёт основное уравнение для поступательного движения, так же и формула $\sum \vec{M_i} = J \cdot \vec{\varepsilon}$ является основным уравнением для вращательного движения.*

При этом векторная сумма моментов сил $\sum \vec{M_i}$ (как мера внешнего вращательного воздействия) аналогична векторной сумме сил $\sum \vec{F_i}$ (как мере внешнего поступательного воздействия). Момент инерции $J$ (как мера инертности тела при вращении) аналогична массе $m$ (как мере инертности тела при поступательном движении). Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ (как кинематическая характеристика вращательного движения) аналогична вектору ускорения $\vec{a}$ (как кинематической характеристике поступательного движения).

И ещё про одну аналогию поступательного и вращательного движения хочу сказать. При поступательном движении импульс тела (импульс также называют *количеством движения*) определяется как $\overrightarrow{p} = m \cdot \overrightarrow{v}$ - это нам знакомо. При вращательном движении момент импульса тела (момент количества движения) выражается как $\overrightarrow{L} = J \cdot \overrightarrow{\omega}$. И опять аналогии:

- $\overrightarrow{p}$ - количество поступательного движения тела ↔ $\overrightarrow{L}$ - количество вращательного движения тела;
- $m$ - мера инертности тела при поступательном движении ↔ $J$ мера инертности тела при вращении;
- $\overrightarrow{v}$ - кинематическая характеристика поступательного движения ↔ $\overrightarrow{\omega}$ - кинематическая характеристика вращательного движения.

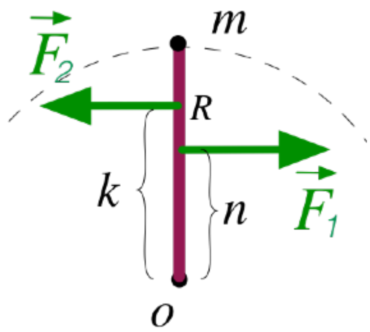
Ну про аналогии поступательного и вращательного движений мы ещё поговорим.

"Ой! Вы ввели столько новых понятий: момент импульса, момент инерции, основное уравнение вращательного движения и прочее. Это всё что? Новая физика для вращательного движения? Как это всё согласуется с законами Ньютона?" - вдумчивый ученик умеет задать правильный вопрос.

Вопрос в точку! Да, вращательное движение твёрдого тела ***принято описывать*** через момент импульса, момент инерции и основное уравнение вращательного движения. Вращательное движение твёрдого тела "сложнее" его поступательного движения. Более того, у вращательного движения твёрдого тела проявляются весьма необычные для нашего "школьного" восприятия эффекты (об этом чуть ниже). Но! Потому мы и говорим, что Законы Ньютона - это *фундаментальные*[3] законы классической механики (и физики), что из них выводятся все остальные законы классической механики. Так и в этом случае: *ВСЕ законы вращательного движения твёрдого тела выводятся из Законов Ньютона*. Вращательное движение твёрдого тела могло бы быть полностью описано *с помощью только Законов Ньютона*. Но мы описываем вращательное движение твёрдого тела в терминах момента импульса, момента инерции и основного уравнения вращательного движения потому, что *такой способ описания гораздо компактнее и эффективнее для применения*. Так что за описанием вращательного движения твёрдого тела стоят именно Законы Ньютона. Более того, Законы Ньютона "знают" всё обо всех эффектах вращательного движения. Никакой "новой физики": вращение - это другой (относительно поступательного) вид движения. Поэтому и другой вид его описания.

[3] *Смотри Историю про Силы.*

А применим-ка мы основное уравнением вращательного движения к той задачке, что мы не смогли решить. Напоминаю:




Задача №1: материальная точка массы $m$ прикреплена невесомым жестким стержнем длины $R$ к фиксированному центру вращения $O$. К стержню на расстоянии $n$ от точки $O$ приложена перпендикулярная сила $\overrightarrow{F_1}$, а на расстоянии $k$ от точки $O$ приложена противоположная перпендикулярная сила $\overrightarrow{F_2}$ - как показано на рисунке. Опишите движение материальной точки.

Решение: Основное уравнением вращательного движения $\sum \overrightarrow{M_i} = J \cdot \overrightarrow{\varepsilon}$. Можно записать это уравнение не в векторной форме, а в скалярной, по старинке подразумевая, что моменты сил, вращающих тело против часовой стрелки положительны и наоборот. Положительная величина углового ускорения будет означать, что тело вращается с возрастающей угловой скоростью и наоборот. Момент инерции конструкции "невесомый стержень + материальная точка" (относительно точки вращения О) будет равен просто моменту инерции материальной точки относительно точки вращения О: $J = m \cdot R^2$.
Тогда: $F_2 \cdot k - F_1 \cdot n = m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$, откуда легко найти угловое ускорение $\varepsilon$. Ура, работает!

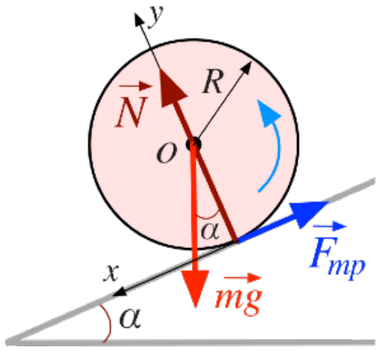
==========

Опять про аналогию. Второй закон Ньютона может быть записан в импульсной форме (вы это проходили): $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$ или: $F = m \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \dfrac{\Delta p}{\Delta t}$, где $p$ - импульс поступательного движения тела. Или уж совсем "по-взрослому": $\overrightarrow{F} = \dfrac{\overrightarrow{dp}}{dt}$ - вектор равнодействующей всех сил, действующих на тело при поступательном движении, равен производной по времени вектора импульса тела. На основании этого уравнения формулируется закон сохранения механического импульса при поступательном движении.

Есть для вращательного движения аналогичная формула: $\overrightarrow{M} = \dfrac{\overrightarrow{dL}}{dt}$ - *суммарный вектор всех моментов сил, действующих на тело при вращательном движении, равен производной по времени вектора момента импульса тела.*

*Основное уравнение вращательного движения тела можно записывать не только относительно неподвижной или равномерно движущейся оси, но и относительно оси, движущейся с ускорением. Оно не изменяет своего вида и в случае ускоренно движущихся осей при условии, что ось вращения проходит через центр массы тела и что ее направление в пространстве остается неизменным.*

**Задача №2**: по наклонной (угол $\alpha$) плоскости скатывается цилиндр радиуса $R$ с трением без проскальзывания. Опишите движение цилиндра.




Решение: Скатываясь с плоскости, цилиндр вращается вокруг оси O, проходящей через центр масс цилиндра. На цилиндр действуют три силы: сила тяжести $\overrightarrow{mg}$, сила реакции опоры $\overrightarrow{N}$ и сила трения $\overrightarrow{F_{TP}}$.

- $\overrightarrow{mg}$ приложена к центру масс O $\Rightarrow$ вращательного момента силы не создаёт (плечо равно 0);
- $\overrightarrow{N}$ проходит через центр масс O $\Rightarrow$ вращательного момента силы не создаёт (плечо равно 0);
- $\overrightarrow{F_{TP}}$ - создаёт момент $M = F_{TP} \cdot R$ (*заметьте, что цилиндр, скатываясь, вращается только из-за наличия силы трения. Не было бы её - цилиндр бы просто соскальзывал*). А поскольку цилиндр скатывается без проскальзавания, то эта сила трения - *сила трения покоя!*

*Цилиндр участвует в двух движениях: поступательном и вращательном.*

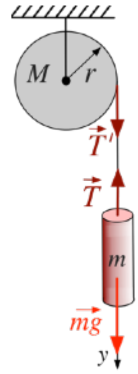
Поступательное движение центра масс цилиндра описывается Вторым законом Ньютона (ВЗН). Поступательное движение "не знает и знать не хочет" про вращательное движение цилиндра. Оси указаны на рисунке. Тогда ВЗН для центра масс цилиндра в проекции на ось $x$: $ma = mg \cdot sin\alpha - F_{TP}$ [1], где $a$ - линейное ускорение центра масс цилиндра. Вращательное движение описывается основным уравнением вращательного движения (УВД). Вращательное движение "не знает и знать не хочет" про поступательное движение цилиндра. УВД для вращения цилиндра вокруг оси O: $M = J \cdot \varepsilon$, где $M = F_{TP} \cdot R$ - момент силы трения, $J$ - момент инерции цилиндра относительно оси O, $\varepsilon$ - угловое ускорение вращения цилиндра относительно оси O. Но $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ - кинематическая связка углового ускорения и линейного. *Эта связка связывает поступательное и вращательное движения.*

Тогда УВД примет вид: $F_{TP} \cdot R = J \cdot \dfrac{a}{R}$ [2]. Исключая из [1] и [2] $F_{TP}$, получим: $a = \dfrac{mg \cdot sin\alpha}{\frac{J}{R^2} + m}$. Момент инерции цилиндра относительно оси O равен $J = \dfrac{1}{2}m \cdot R^2$ (см. табличку). Тогда $a = \dfrac{2g \cdot sin\alpha}{3}$. Заметьте, что если бы скатывался не цилиндр, а *ШАР* (уравнения ВЗН и УВД остались бы без изменений), у которого $J = \dfrac{2}{5}m \cdot R^2$, то $a = \dfrac{5g \cdot sin\alpha}{7}$, то есть *шар скатывался бы быстрее за счет меньшего момента инерции*.

## *Главное в этой простенькой задаче:*

- цилиндр участвует в двух движениях: поступательном и вращательном
- поступательное движение центра масс цилиндра описывается ВЗН
- вращательное движение цилиндра описывается УВД
- не забывайте про кинематические связки: $a = \varepsilon \cdot R$ и $v = \omega \cdot R$
- УВД можно записывать и относительно оси, движущейся с ускорением.

Помните, ранее в задачах динамики поступательного движения, если участвовал блок, то говорилось "невесомый блок". Тем самым подразумевалось, что у него нет момента инерции и динамика его вращательного движения не учитывается. Теперь мы эту динамику учитываем. В системе, изображенной на рисунке, блок массой $M$ участвует только во вращательном движении. Груз массой $m$ участвует только в поступательном движении. А кинематическая связка $a = \varepsilon \cdot R$ эти движения связывает.




## Закон сохранения момента импульса

С динамикой вращательного движения твёрдого тела познакомились. Основные принципы изложены. Можете решать задачи. Вы, наверное, заметили, что я постоянно ссылаюсь на аналогию поступательного и вращательного движений. Эта аналогия фундаментальна.

А что вы изучали в школе по теме поступательного движения после освоения динамики (Второго закона Ньютона)? Напомню, вы изучали понятие импульса поступательного движения и *закон сохранения импульса*. Динамика вращательного движения твёрдого тела следует этим же путём. Мы рассмотрели понятие момента импульса вращательного движения $\vec{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{mv} = J \cdot \vec{\omega}$ (аналог импульса поступательного движения $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$) и его свойства. Настало время познакомиться с законом сохранения момента импульса при вращательном движении.

В Истории про Законы Сохранения подробно описаны фундаментальные законы сохранения физики и истоки, из которых они возникают. И одним из них является закон сохранения момента импульса. Он является следствием *изотропности пространства* - вида симметрии, при которой свойства пространства одинаковы по всем направлениям. Причём понятие момента импульса трактуется не только в узком механическом смысле. Например, спин электрона[4] - это квантово-механический аналог его момента импульса вращения вокруг собственной оси[5]. Но в нашей Истории про механику мы будем говорить о моменте импульса как о параметре механического вращательного движения.

*Закон сохранения момента импульса является одним из трёх фундаментальных законов сохранения в механике:*
- *закон сохранения импульса - для поступательного движения*
- *закон сохранения момента импульса - для вращательного движения*
- *закон сохранения энергии - как для поступательного, так и для вращательного движений*

Напомню:
- импульс - вектор; момент импульса - вектор; энергия - скаляр;
- ***закон сохранения механической энергии***: в изолированной механической системе суммарная механическая энергия системы не изменяется. Под изолированной системой понимается система, в которую механическая энергия не поступает и из которой она не уходит.
- ***закон сохранения импульса***: если векторная сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то векторная сумма импульсов всех тел системы не изменяется.

---

[4] *Спин электрона мы обсуждаем в Истории про Магнетизм.*

[5] *Ни о каком вращении электрона вокруг собственной оси говорить не приходится, но момент импульса (спин) у него есть.*

Закон сохранения момента импульса формулируется так:

Векторная сумма моментов импульсов всех тел замкнутой системы относительно данной точки (оси) не изменяется со временем.
*Под замкнутой понимается такая система, для которой векторная сумма моментов всех внешних сил относительно данной точки (оси), действующих на систему, равна нулю.*

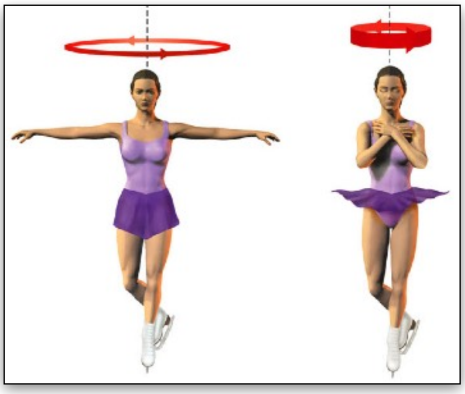
В системе с нулевой суммой моментов внешних сил момент импульса не исчезает и не появляется. Мы имеем в виду моменты импульсов относительно одной и той же точки (оси).

Для замкнутой системы математически это можно записать так:
$\sum \overrightarrow{L_i} = J_S \cdot \overrightarrow{\omega} = const$, где $\overrightarrow{L_i}$ - момент импульса элемента системы, $J_S$ - момент инерции системы, $\overrightarrow{\omega}$ - угловая скорость вращения системы.

Или так: $\dfrac{d\overrightarrow{L}}{dt} = 0$, где $\overrightarrow{L}$ - момент импульса системы.

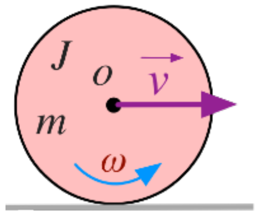
- И как следствие из закона сохранения момента импульса: *момент импульса системы (тела) изменяется только при наличии момента силы, направленной на его изменение.*

Классической иллюстрацией проявления закона сохранения момента импульса (ЗСМИ) - вращение фигуристки. Острый носок конька, которым фигуристка опирается на лёд, обеспечивает замкнутость системы (нет моментов внешних сил). Фигуристка начинает вращение, широко раскинув руки. А затем она руки прижимает, собирая массу своего тела ближе к оси вращения, тем самым уменьшая свой момент инерции. А коль момент инерции уменьшился, то из формулы ЗСМИ $J_S \cdot \overrightarrow{\omega} = const$ следует, что угловая скорость вращения должна возрасти, что и происходит - фигуристка начинает вращаться с бОльшей угловой скоростью (частотой).



- *Важное замечание*: поскольку момент импульса является вектором, то при сложном вращении тела (вокруг нескольких осей) можно писать уравнения ЗСМИ по тем осям, по которым система является замкнутой.

## Кинетическая энергия вращающегося тела




Кинетическая энергия вращающегося тела задается формулой:

$E_K = \dfrac{J \cdot \omega^2}{2}$, где $J$ - момент инерции тела, $\omega$ - угловая скорость его вращения.

Если твёрдое тело движется поступательно и одновременно вращается с угловой скоростью вокруг оси, проходящей через его центр масс, то его кинетическая энергия определяется как сумма двух составляющих: $E_K = \dfrac{J \cdot \omega^2}{2} + \dfrac{m \cdot v^2}{2}$, где $m$ - масса тела, $v$ - скорость поступательного движения. Вы заметили как похожи выражения для поступательной и вращательной кинетической энергий.

Эти формулы применяются в тех задачах, где работает закон сохранения механической энергии.

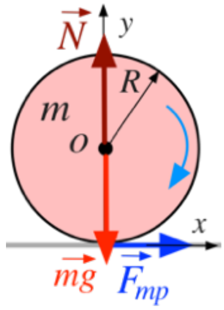
*А теперь посмотрим на динамические характеристики поступательного и вращательного движений. Опять аналогии!*

| Поступательное движение | | Вращательное движение | |
|---|---|---|---|
| масса - мера инертности | $m$ | момент инерции - мера инертности | $J$ |
| сила - мера внешнего воздействия | $\vec{F}$ | момент силы - мера внешнего воздействия | $\vec{M}$ |
| импульс - количество движения | $\vec{p}$ | момент импульса - момент количества движения | $\vec{L}$ |
| основное уравнение динамики - второй закон Ньютона | $\sum \vec{F_i} = m \cdot \vec{a}$ | основное уравнение динамики | $\sum \vec{M_i} = J \cdot \vec{\varepsilon}$ |
| кинетическая энергия | $E_K = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$ | кинетическая энергия | $E_K = \dfrac{J \cdot \omega^2}{2}$ |
| ***Законы сохранения*** | | | |
| *Закон сохранения импульса* | | *Закон сохранения момента импульса* | |
| *Закон сохранения механической энергии* | | | |

А теперь давайте порешаем ещё задачки.

========================

**Задача №3**: ***Динамика и кинематика вращения***. Цилиндр радиуса $R$ раскрутили вдоль его основной оси до угловой скорости $\omega$ и опустили на горизонтальную плоскость. Цилиндр катится по плоскости с трением с коэффициентом $k$ без проскальзывания ($F_{TP} = k \cdot N$). Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки и какой путь он пройдет?




Решение: В системе "цилиндр-плоскость" трение присутствует, но ***сила трения не совершает работы*** (цилиндр катится ***без проскальзывания***)! *Это сила трения покоя!* В мгновенной точке касания цилиндра с плоскостью сила трения позволяет цилиндру перевести свое вращательное движение в поступательное. Заметьте, что если бы трения не было, то цилиндр не катился бы по плоскости, а бесконечно вращался бы на месте. Благодаря трению он катится. Обратите внимание как направлена сила трения, приложенная к цилиндру: цилиндр норовит проскользнуть по плоскости, но сила трения покоя ему препятствует. Именно из-за такого направления силы трения угловая скорость вращения цилиндра гасится: вектор момента силы трения направлен против вектора угловой скорости.

Запишем основное уравнением вращательного движения для вращения цилиндра вокруг оси О: $F_{TP} \cdot R = J \cdot \varepsilon$, где $F_{TP} \cdot R$ - момент силы трения, $J$ - момент инерции цилиндра относительно оси О, $\varepsilon$ - угловое ускорение вращения цилиндра относительно оси О.

Момент инерции цилиндра относительно оси О равен $J = \dfrac{1}{2} m \cdot R^2$ (см. табличку).

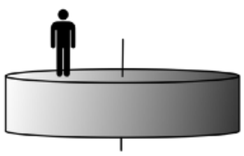
Но $F_{TP} = k \cdot N = k \cdot mg$. Тогда $k \cdot mg \cdot R = \dfrac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$, откуда $\varepsilon = \dfrac{2kg}{R} = const$. То есть цилиндр будет замедляться с постоянным отрицательным угловым ускорением.

Сколько времени он будет замедляться (пока $\omega$ не станет 0): по кинематической формуле: $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t$ получаем: $0 = \omega - \varepsilon \cdot \tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \dfrac{\omega}{\varepsilon}$, где $\tau$ - время до останова. А на какой угол повернется цилиндр за время $\tau$? По формуле $\varphi = \omega_0 \cdot t \pm \dfrac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$ получаем

$\varphi = \omega \cdot \tau - \dfrac{\varepsilon \cdot \tau^2}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\omega^2}{2\varepsilon} = \dfrac{\omega^2 R}{4kg}$. Это столько оборотов (1 оборот = $2\pi$):

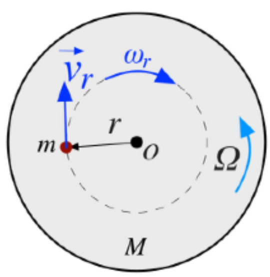
$n = \dfrac{\varphi}{2\pi} = \dfrac{\omega^2 R}{8\pi kg}$. А путь: $S = 2\pi n \cdot R = \dfrac{\omega^2 R^2}{4kg}$.

**Задача №4**: ***ЗСМИ***. На неподвижной платформе-диске радиуса $R$ и массой $M$ стоит человек массой $m$ на расстоянии $r$ от центра О. Человек начинает идти по окружности радиуса $r$ со скоростью $v$ относительно платформы. С какой частотой будет вращаться платформа?



Решение: В системе "человек-платформа" нет моментов внешних сил, поэтому к ней применим ЗСМИ. Когда человек стоял на неподвижной платформе, момент импульса системы был равен 0. Следовательно, он должен остаться нулевым и после начала движения человека и вращения платформы.

Человек, идя по платформе, отталкивается от неё ногами, следовательно платформа и человек будут вращаться в разных направлениях друг относительно друга. По рисунку можем сказать, что платформа будет вращаться против часовой стрелки (её угловая скорость $\Omega$ будет положительна, её момент импульса $L_P$ будет положителен), а человек *ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛАТФОРМЫ* будет вращаться по часовой стрелке).



Суммарный момент импульса системы "человек-платформа" относительно неподвижной оси О равен нулю. Поэтому мы можем записать: $L_P - L_H = 0$ [1], где $L_P$ - момент импульса платформы, $L_H$ - момент импульса человека.

Момент импульса платформы относительно оси О $L_P = J_P \cdot \Omega$, где $J_P$ - момент инерции платформы относительно оси О, $\Omega$ - угловая скорость вращения платформы вокруг оси О. Поскольку платформа - это диск, вращающийся вокруг своей оси, то $J_P = \frac{1}{2}M \cdot R^2$, а $\Omega = 2\pi \cdot N$, где $N$ - искомая частота вращения платформы. Тогда $L_P = \pi M \cdot R^2 \cdot N$.

Момент импульса человека $L_H = J_H \cdot \omega$, где $J_H$ - момент инерции человека относительно оси О, $\omega$ - угловая скорость человека относительно ***неподвижной*** оси О.
Человека можно рассматривать как материальную точку, поэтому: $J_H = m \cdot r^2$.

Теперь давайте разбираться с угловой скоростью человека относительно ***неподвижной*** оси О (*точнее говоря, мы должны считать момент импульса человека относительно той же оси, что мы считали момент импульса платформы. А момент импульса платформы мы считали относительно неподвижной оси О*).

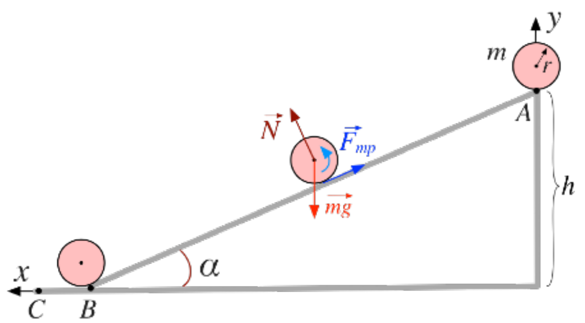
> Человек вращается относительно платформы по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_r = \frac{v}{r}$, а платформа вращается относительно ***неподвижной*** оси О с угловой скоростью $\Omega$. Значит угловая скорость человека относительно ***неподвижной*** оси О будет $\omega = \omega_r - \Omega = \frac{v}{r} - 2\pi \cdot N$.

Подставляем всё в уравнение [1]: $\pi M \cdot R^2 \cdot N - m \cdot r^2 \cdot (\frac{v}{r} - 2\pi \cdot N) = 0$. Откуда

$$N = \frac{m \cdot v \cdot r}{\pi(M \cdot R^2 - 2m \cdot r^2)} \text{ [об/с].}$$

Важное в этой задаче:
- понять, что в системе "человек-платформа" выполняется ЗСМИ
- увидеть, что в системе "человек-платформа" момент импульса системы равен 0 "до" и "после"
- выразить угловую скорость человека относительно ***неподвижной*** оси через относительную угловую скорость человека относительно платформы

Задача №5: ***Энергия вращения***. С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha$ с горизонтом, скатывается без проскальзывания и без начальной скорости сплошной диск. Определите установившуюся скорость поступательного движения центра масс диска по горизонтальной плоскости (трения скольжения нет).




Решение: ***ЗСМЭ***. Как я уже выше говорил, при скатывании диска с наклонной поверхности присутствует *сила трения покоя*, которая и обеспечивает диску вращательное движение (без него диск просто соскальзывал бы без вращения). Но эта сила не совершает работы. Поэтому полная механическая энергия диска не изменяется. В решении будем использовать ЗСМЭ.

В точке $A$ диск обладает только потенциальной энергией (за 0 потенциальной энергии принят 0 по оси $y$).

В промежуточной точке на наклонной поверхности диск обладает как потенциальной энергией, так и кинетической энергией. Причем кинетическая энергия состоит из кинетической энергией поступательного и вращательного движений.

В точке $B$ диск обладает только кинетической энергией поступательного и вращательного движений.

После точки $B$ скорость поступательного движения диска не меняется (трения скольжения нет).

Запишем уравнени ЗСМЭ для точек $A$ и $B$: $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$, где $v$ - скорость центра масс диска в точке $B$ (и во всех точках далее) - искомая скорость, $\omega$ - угловая скорость вращения диска относительно оси, проходящей через его центр масс.

$J = \frac{1}{2}m \cdot r^2$, $\omega = \frac{v}{r}$, откуда $v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$.

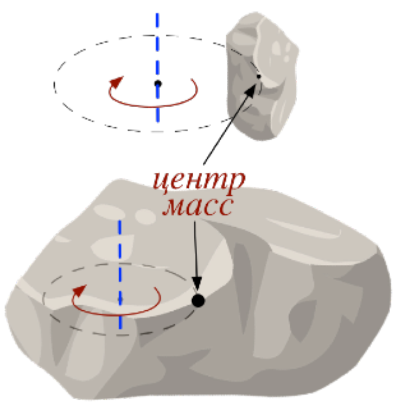
## Об осях вращения ...

Вот вы узнали основные законы вращения и посмотрели как решать простенькие задачки. Но я вам уже не раз говорил, что вращение гораздо "сложнее" поступательного движения. Вот об *эффектах* вращения я и хочу поговорить. Не буду вас мучить математикой (хотя всё, о чем я буду говорить, математически точно выводится из вышерассмотренных формул) - поговорим на качественном уровне.

При рассмотрении вращения ключевое значение имеет расположение осей вращения. Вот с этого и начнём.


Вот простейший пример. Твёрдое тело "прибито гвоздём к небесной тверди". Это, конечно, сказано фигурально. На самом деле есть *жёстко фиксированная ось*, лишь вокруг которой тело и может вращаться. Сообщим этому телу момент импульса[6], направленный вдоль этой оси. Тело начнёт вращаться вокруг этой оси. Параметры вращательного движения будут определяться моментом инерции тела относительно оси и величиной начального момента импульса (предполагаем пока, что нет моментов сил трения и сил тяжести). Очевидно, что никакого поступательного движения при этом нет - жёстко фиксированная ось не даёт. Именно жёсткое положение оси и определяет вращение. *Жёсткая ось воздействует на тело, заставляя его ТАК вращаться.*

Или вот такие примеры. Тела вращаются вокруг осей *НЕ* проходящих через их центры масс.

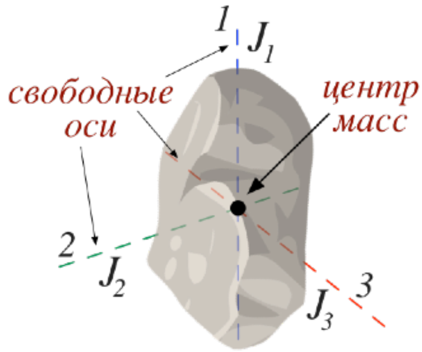



[6] *Напоминаю. Поскольку мы говорим о вращении, то используем категории: момент импульса, момент силы, момент инерции, угловые ускорение и скорость.*

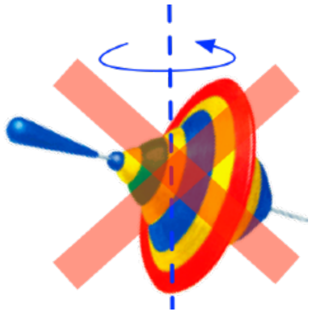
Что общего в этих примерах? Это примеры *несвободного* вращения.

1. Для того, чтобы удерживать ось такого вращения в неизменном положении, к ней надо *постоянно прилагать* моменты внешних сил.
2. Если таких моментов не прилагать и предоставить тело самому себе (отпустить), то положение оси вращения в пространстве изменится: ось будет либо поворачиваться, либо перемещаться относительно инерциальной системы отсчета.

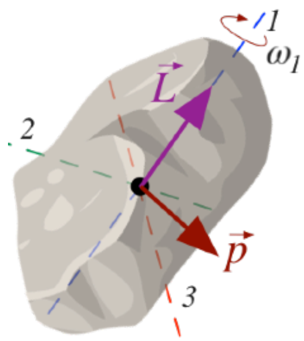
Практический опыт (быть может, немного смутно) подсказывает, что это так. Чтобы сохранять положение оси вашего вращения на карусели, сила трения должна постоянно создавать удерживающий момент силы. Не будет момента силы трения - не будет вращения вокруг оси карусели.



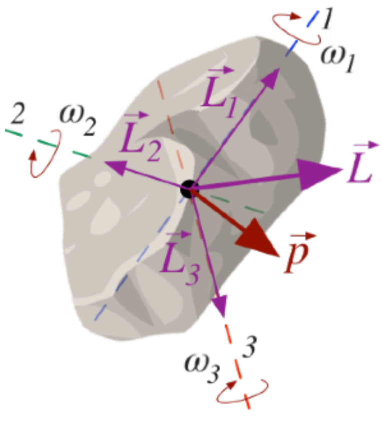

Математически можно доказать, что в любом твёрдом теле существуют как минимум *три взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр масс* тела, положение которых в пространстве сохраняется без приложения извне моментов каких-либо внешних сил. Такие оси называются *СВОБОДНЫМИ осями тела* или *главными осями инерции*. Моменты инерции тела относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.



Попробуйте закрутить знакомую с детства юлу как обычно - вокруг её вертикальной оси симметрии. Она будет долго и стабильно вращаться. А попробуйте тепеть закрутить её же вокруг какой-нибудь "кривой" оси. Попробовать-то можно, но стабильного вращения не получится - юла начнёт совершать сложное вращение вокруг нескольких осей. Почему? Да потому, что вертикальная ось симметрии юлы совпадает с одной из её *свободных осей* (как и у всякого симметричного тела) - поэтому вращение будет стабильным. А во втором случае вы попытались закрутить юлу вокруг *несвободной оси* - вот и не получилось стабильного вращения.



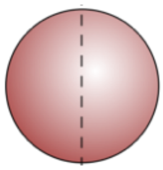

В общем случае: если вы сообщаете телу момент импульса, направленный вдоль одной из его свободных осей, то получаете стабильное вращение без необходимости его внешнего поддержания. А поскольку момент импульса связан с импульсом, то в общем случае получаете ещё и поступательное движение тела.

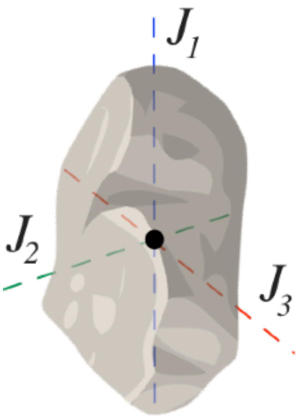



Если же сообщаемый момент импульса не совпадает ни с одной из свободных осей тела, то вот как это можно представить. Разложим вектор сообщаемого момента импульса по свободным осям (это всегда можно сделать). И тогда становится понятно, что тело при этом начинает совершать три вращательных движения вокруг каждой из свободных осей. В общем случае получается ещё и поступательное движение.

*Ориентация основных осей тела зависит от его формы и распределения массы в нём.*

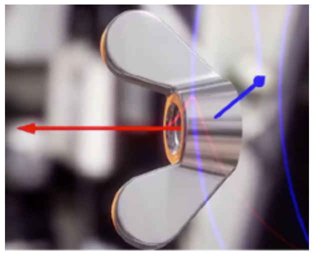
А вот у шара - бесконечно много свободных осей (проходящих через его центр). Ну это и понятно - ведь у него же бесконечно много осей симметрии.






Если у тела главные моменты инерции по свободным осям таковы, что $J_1 > J_2 > J_3$, то можно показать, что вращение вокруг осей $1$ и $3$ (то есть осей с максимальными и минимальными моментами инерции) будет устойчивым, а вокруг оси $2$ (с промежуточным по величине моментом инерции) - неустойчивым.

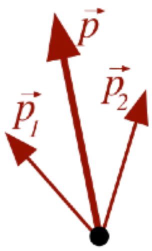
И самой яркой иллюстрацией этого факта является "*эффект Джанибекова*" - не поленитесь и наберите это в поисковике и посмотрите видео поведения гайки-барашка в невесомости.



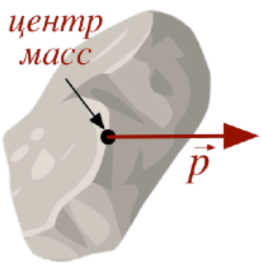
Вот неожиданно и удивительно - момент импульса "умеет перетекать" с одной свободной оси на другую, оставаясь суммарно постоянным!

А теперь давайте вернёмся на шаг назад.

Если на *материальную точку* воздействовать двумя импульсами, то материальная точка начнёт совершать поступательное движение так, как будто на неё воздействовал один импульс, равный векторной сумме двух. То есть поступательные движения (от двух исходных импульсов) сложились в одно. Это понятно.

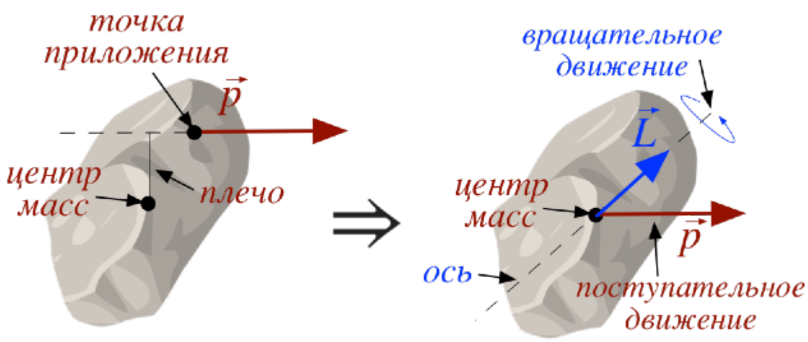


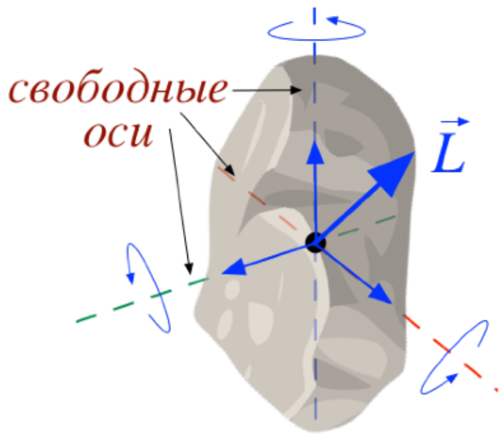

- *Для вектора импульса важна точка его приложения!*
- *Для вектора момента импульса важна линия (ось) его приложения!*




Воздействуем на свободное *твёрдое тело* импульсом. И вектор импульса приложим к центру масс тела. Действие такого импульса приведет ***только*** к поступательному движению твёрдого тела - плечо такого импульса относительно центра масс равно нулю - не создаётся момента импульса - не возникает вращательного движения.

Воздействуем на свободное *твёрдое тело* импульсом, вектор которого приложен *НЕ* к центру масс тела. В этом случае плечо такого импульса относительно центра масс *НЕ* равно нулю - порождается момент импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ и возникают (в общем случае) вращательные движения тела вокруг его свободных осей. Но приложенный импульс порождает и поступательное движение тела, которое можно рассматривать как если бы вектор импульса был приложен к центру масс тела.





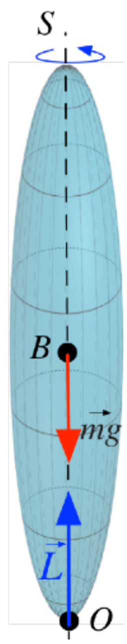

Выше мы говорили, что при свободном вращении тела (*когда нет внешне удерживаемых осей*) вращение происходит вокруг *свободных осей* тела.

Когда на свободное тело воздействует произвольный момент импульса - *это не значит, что свободное тело начнёт вращаться по оси действия вектора этого момента импульса*.

А это значит, что *воздействующий вектор момента импульса разложится по свободным осям и начнётся три вращательных движения по каждой из свободных осей*.

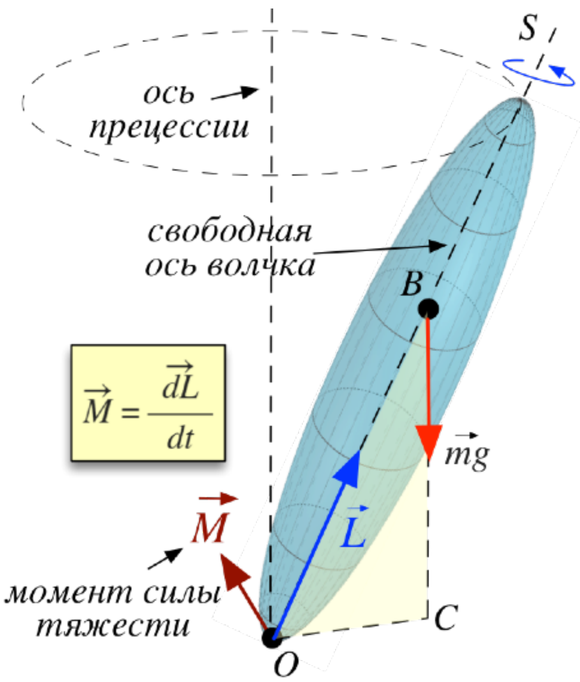
И добавление нового воздействующего момента импульса приведёт к тому же: разложению вектора нового воздействующиего момента импульса по свободным осям и добавлению дополнительного к существующему вращения по каждой из свободных осей.

Вот это надо понять.




## Прецессия волчка

А сейчас мы рассмотрим частный случай несвободного вращения. Возьмём волчок - симметричную фигуру. И, раскрутив его вокруг вертикальной оси (а эта ось из соображений симметрии является одной из его свободных осей), поставим на стол вращаться идеально вертикально. Точка $O$ оси вращения фиксирована на столе - это и есть *частный случай несвободного вращения с одной фиксированной точкой оси*. Волчок вращается стабильно: сила его тяжести проходит через точку $O$ и не создаёт момента силы. Трения нет. Момент импульса равен $\vec{L}$. Всё предельно просто.

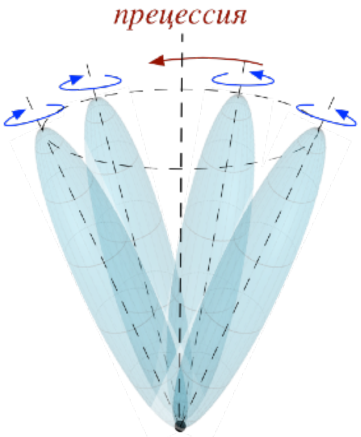



А теперь немного наклоним вращающийся волчок. В статике это привело бы к немедленному опрокидыванию волчка. Но мы же вращаемся! Тут всё по-другому.

Наклонённый волчок продолжает вращаться. Из-за наклона сила тяжести создаёт момент силы тяжести $\vec{M}$. Куда направлен вектор момента силы тяжести? $\vec{M} = \vec{OC} \times \vec{mg}$ и вектор момента силы тяжести направлен перпендикулярно плоскости треугольника $OBC$ вглубь рисунка.

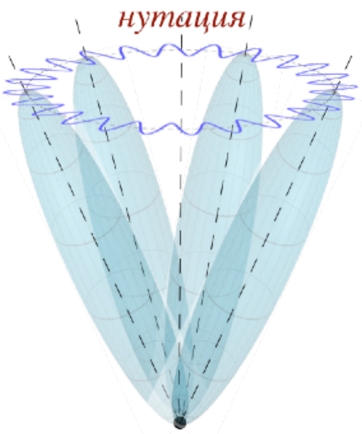
Внешний момент силы тяжести $\vec{M}$ будет изменять вектор момента импульса системы: $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$.

*Вектор момента внешней силы тяжести сонаправлен с вектором изменения момента импульса системы.* Если приглядеться к геометрии, то будет ясно как вектор $\vec{M}$ будет влиять на вектор $\vec{L}$: он будет пытаться *повернуть плоскость* $OBC$, а вместе с ней и вектор $\vec{L}$ в данном случае против часовой стрелки!



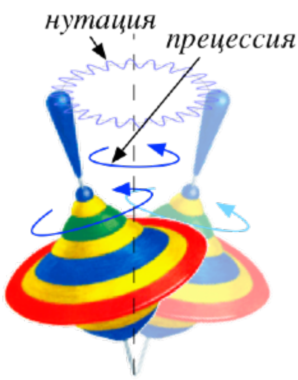

И к чему это приведёт? Это приведёт к повороту оси вращения волчка $OS$. Точка $O$ - фиксирована, значит начнётся вращательное движение самой оси $OS$ вокруг точки $O$. Но момент силы тяжести $\vec{M}$ наклонённого волчка действует постоянно, значит постоянным будет и вращение оси $OS$ вокруг точки $O$. Это явление называется *прецессией* волчка.

В статике наличие постоянно действующего некомпенсированного момента внешней силы привело бы к немедленному опрокидыванию волчка. А при вращательном движении - лишь к вращению оси. То есть к исходному вращению добавилось ещё одно.




Но скажу более: если внимательно присмотреться к такому установившемуся вращению с прецессией, то обнаружится ещё одно необычное явление - *нутация*. Оказывается у волчка появляется и третье вращательное движение: верхняя точка волчка (как и весь он в целом) начинает "выписывать" некие небольшие колебательные движения как показано на рисунке.

Ну что ж, у волчка три свободных оси (хоть одна точка и фиксирована), почему бы не возникнуть трём разным движениям?




Формулы вращения описывают эти все явления математически точно. Просто при рассмотрении вращения интуиция и здравый смысл перестают зачастую правильно подсказывать.

Ну уж удивлять так удивлять! В конце 19-го века в Германии в одной физической лаборатории поставили такой эксперимент: на чашки весов поставили два одинаковых и одинаково закрученных волчка - как на рисунке. Весы остались в равновесии. Как и подсказывал "здравый смысл".

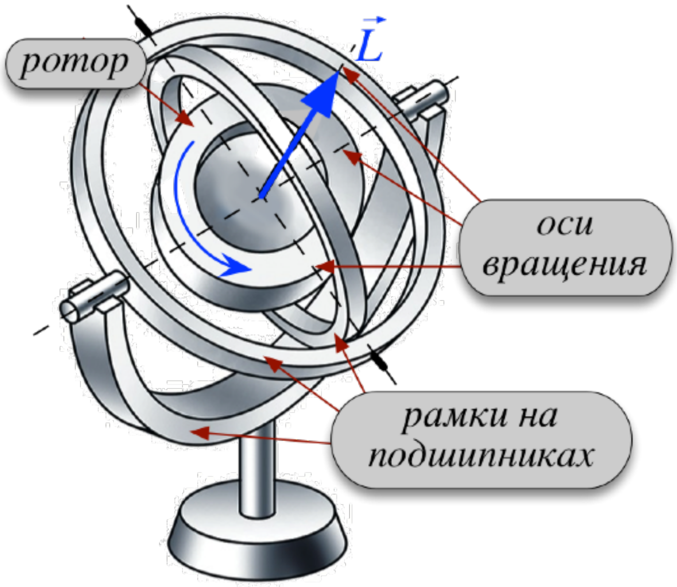
А потом один из волчков закрутили с той же угловой скоростью, но в другую сторону. И каково же было удивление, когда весы вышли из равновесия! "Здравый смысл, ты это видел?" - кричали все вокруг. А один известный немецкий физик чуть в монахи не ушёл[7].

[7] *Разгадка тут довольно проста: надо учитывать, что оба волчка участвуют ещё и во вращательном движении Земли вокруг своей оси. Но пока разобрались, много нервов потратили.*

## Гироскоп

Слово "гироскоп[8]" давно вошло в общеупотребительный язык и мы интуитивно понимаем под ним нечто, сохраняющее равновесие. Разберёмся подробнее.

Вот перед нами конструкция классического механического гироскопа. Такой гироскоп был предложен в первой половине 19-го века.




Конструкция его такова:

- в центре - достаточно массивный цилиндр-ротор;
- ось вращения ротора закреплена в первой рамке;
- ось вращения первой рамки закреплена во второй рамке, а ось вращения второй рамки закреплена в третьей рамке, которая стоит на столе. Такой способ закрепления называется *карданным*;
- ротор, первая и вторая рамки могут вращаться, причём оси их вращения совпадают с тремя взаимно-перпендикулярными *свободными осями* ротора;
- оси крепятся к рамкам с помощью игольчатых подшипников, сокращающих до минимума моменты сил трения в местах крепления;
- ротор приводится во вращение (в современных механических гироскопах частота вращения ротора лежит в диапазоне 100 - 500 оборотов в секунду);
- моменты сил трения в подшипниках, хоть и минимальные, но присутствуют. У хороших механических гироскопов уход оси вращения ротора от своего первоначального положения из-за трения (погрешность) составляет до $10^{-5}$ градусов в час.

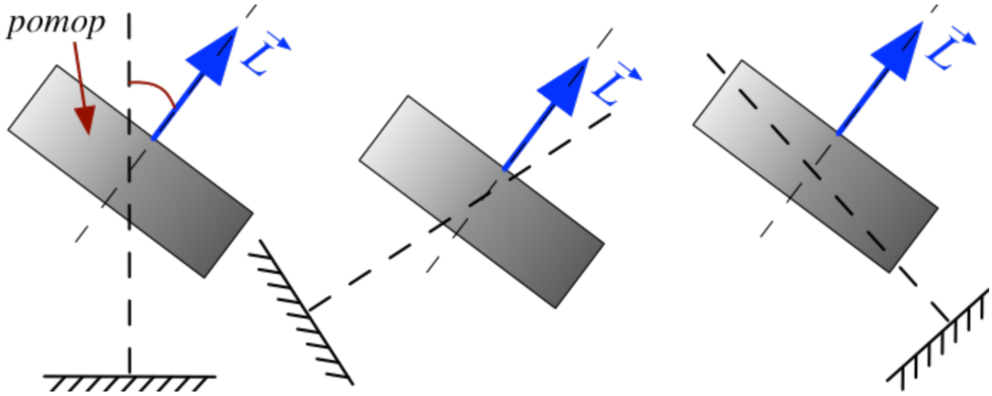
"А в чём смысл?" - спросите вы.

А смысл в том, что:

- при такой конструкции *ротор гироскопа является свободным телом вращения* (на него не действуют моменты внешних сил);
- ротор гироскопа является замкнутой в смысле воздействия моментов внешних сил системой и в этой системе выполняется *закон сохранения момента импульса*;
- а поэтому: момент импульса, который был сообщен ротору при его разгоне, сохраняется: как по величине, так (что самое главное) и *по направлению*;
- каково бы ни было изменение положения основания, на котором стоит гироскоп, *ось вращения ротора всегда будет направлена в одну сторону*.

---

[8] *С древне-греческого переводится как "смотрящий по кругу".*




Вот на рисунке условно изображено свойство гироскопа сохранять положение оси вращения ротора. А коли так, то мы *можем в любой момент определить угловое отклонение основания (подставки) гироскопа от начального положения*.

Вот это свойство гироскопа и используется на практике. Гироскоп чаще всего применяется как датчик угла поворота или угловой скорости для устройств автоматического управления.

Существует такое понятие - *инерциальная навигация*. Под ней подразумевается возможность определения координат корабля или самолёта в любой точке его нахождения. Да, сейчас эта задача решается с помощью спутниковых систем навигации. Но раньше (да и сегодня в качестве дублирующей системы) эта задача решалась с помощью гироскопов. Гироскопы применяются и во всевозможных системах стабилизации положения.

На сегодня в технике используются три типа гироскопов:

- классический механический, о котором мы говорили;
- лазерный;
- микромеханический на микросхемах.

В каждом современном смартфоне или планшете есть гироскоп в виде микросхемы.

*Лазерный авиационный гироскоп*

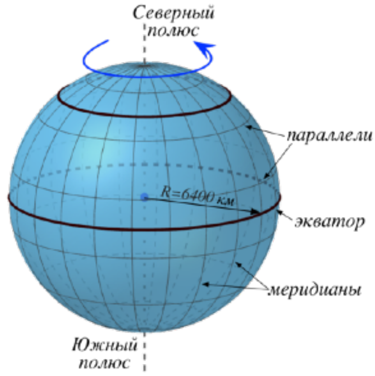

*Микросхемы гироскопических датчиков*

=======================

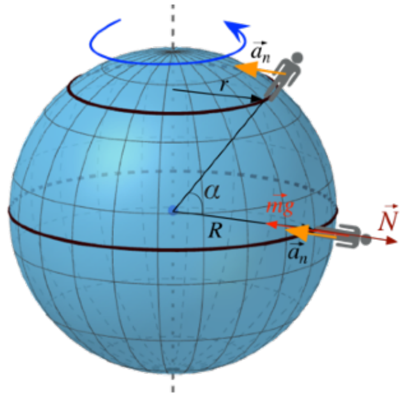
## Неинерциальные системы отсчёта, связанные с вращающейся Землей

В школьных задачках на бросание камня, скатывание шайбы по наклонной плоскости и прочих незатейливых мы привычно выбираем систему отсчёта, связанную с Землёй, объявляем её инерциальной и смело пишем Законы Ньютона.

Но теперь, говоря о вращательном движении, невольно закрадывается вопрос: а коль Земля вращается вокруг своей оси, то так ли инерциальны системы отсчёта, связанные с ней? Попробуем ответить.



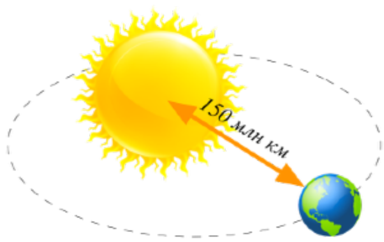

Вначале - краткие сведения для тех, кто считает, что Земля плоская и покоится на трёх китах. Увы, Земля - почти шар[9] радиусом $R = 6400$ километров. Земля вращается вокруг своей оси с перидом $T = 24$ часа или $86400$ секунд. Для определения положения точки на поверхности Земли на неё условно нанесена сетка из параллелей и меридианов. Положение точки задаётся в градусах широты и долготы. Точка с координатами 0 градусов широты и долготы находится на экваторе в Гвинейском заливе (у берегов Африки).




А давайте оценим центростремительное (нормальное) ускорение, которое испытывает человек на экваторе из-за суточного вращения Земли. По знакомой формуле $a_n = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R$ получим: $a_n = 3{,}38 \cdot 10^{-2}$ $м/с^2$. Это в *290* раз меньше ускорения свободного падения $g$=9,81 $м/с^2$. Не на экваторе такое нормальное ускорение будет ещё меньше (радиус вращения будет меньше). Кстати, из этого всего вытекает, что вес человека на экваторе меньше, чем не на экваторе.

Таким образом в задачах, в которых допускается погрешность более $\frac{100}{290}$%=0,34%, мы смело можем считать системы отсчёта, связанные с Землёй, инерциальными. А в задачах, в которых нужна меньшая погрешность (например, в задачах баллистики для расчёта полёта снаряда), приходится такие системы отсчёта считать неинерциальными и вводить фиктивные силы инерции, действующие на тело[10]. Для того, чтобы иметь возможность записать уравнения в форме Второго закона Ньютона.

"А каково центростремительное ускорение из-за вращения Земли вокруг Солнца?" - вдумчивый ученик хочет знать всё.




А по той же формуле $a_n = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R$, положив $T = 365$ дней или 31.536.000 секунд и радиус вращения Земли вокруг Солнца $R = 150.000.000.000$ м (полагаем орбиту Земли круговой), получим $a_n = 5{,}95 \cdot 10^{-3}$ $м/с^2$. То есть центростремительное ускорение орбитального вращения Земли вокруг Солнца в $\sim 5{,}7$ раза меньше центростремительного ускорения, связанного с суточным вращением Земли.

---

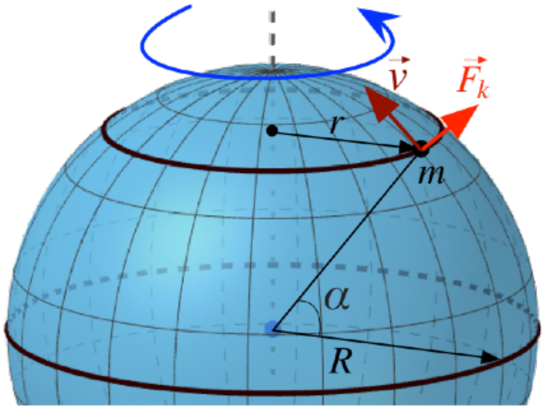
[9] *"Шар", чуть сплюснутый с полюсов. Такую фигуру называют* ***геоид****.*

[10] *Об этом говорилось в Истории про Силы.*

Но это ещё не всё про эффекты вращения Земли.

Можно выбирать какие-угодно системы отсчёта, называть их инерциальными и не обращать внимания на эффекты вращения Земли при решении задач. Но факт остаётся фактом: мы живём на поверхности вращающейся планеты и эффекты вращения присутствуют в нашей жизни. И одним из таких эффектов является *сила Кориолиса*.

Во вращающейся неинерциальной системе отсчёта (читай: на поверхности Земли) на *движущееся* тело действует сила инерции - сила Кориолиса.




Для её определения выведена строгая формула: $\overrightarrow{F_k} = 2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}$. Так на человека массой $m = 70$ кг, движущегося из Мытищ (северная широта Мытищ $\alpha = 55^o$) строго на север со скоростью $v = 5$ км/ч (1,4 м/с), действует сила Кориолиса $F_k = 8{,}1 \cdot 10^{-3} H$.

8 миллиньютонов! "Ой," - скажете вы - "какая ерунда!"


Да, эта величина невелика. Но сила Кориолиса действует 24 часа в сутки без выходных. И её эффекты становятся заметными лишь при длительных периодах наблюдения за крупномасштабными объектами. Хотите примеры? Пожалуйста.

- В нашем северном полушарии у рек, текущих по меридиану на север, всегда подмыт правый берег. Например, у реки Лена.
- Силой Кориолиса объясняется разный износ железнодорожных рельс, идущих вдоль меридиана.
- Сила Кориолиса проявляются и при качаниях маятника (маятник Фуко). Я очень любил раньше в Питере в Исаакиевском соборе долго наблюдать за поворотом плоскости качаний маятника Фуко. К сожалению, сейчас его там сняли.
- Кориолисова сила влияет и на полёт снаряда.

> Но! Сила Кориолиса не является "настоящей" в смысле механики Ньютона. Она никак не связана с каким-либо взаимодействием рассматриваемого тела с другими телами, а все её свойства определяются только обстоятельствами кинематического характера, обусловленными выбором конкретной неинерциальной системы отсчёта. В связи с этим о силе Кориолиса говорят, что она не является физической силой, и называют её "псевдосилой".

===================

Завершаем рассмотрение вопросов, связанных с вращением. Очень много неожиданного, интересного. Конечно, в институте все эти темы будут подробно подкреплены формулами. Зато у нас много картинок!