Приложение 1.

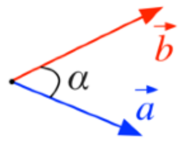
Математика

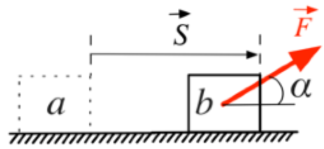
Уточню несколько математических понятий, используемых в курсе.

Векторное произведение векторов

В школе его не дают - боятся "перегрева" мозгов у "среднего" школьника. Ну мы-то с вами физики, нам ли чего бояться? Тем более, что ничего сложного в этом нет - надо чуть "усилить" своё пространственное воображение.

Вы знакомы из школьного курса геометрии с понятием *скалярного* произведения векторов.
Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число c (скаляр), равное $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\alpha$. Так и обозначается: $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

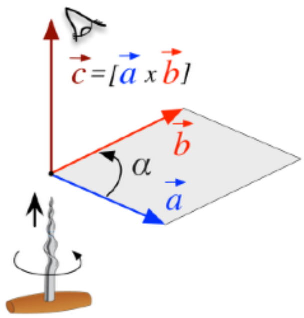




Скалярное произведение из двух векторов получает число. В физике оно применяется для определения, например, работы силы: при перемещении тела из точки a в точку b силой F, направленной под углом α к линии перемещения, работа силы F равна $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot cos\alpha$. Всё понятно. Школьные мозги переварили и усвоили это знание.

Но в физике, в которой очень много разных векторов, не все закономерности описываются лишь скалярным произведением. Поэтому физика позаимствовала у математики и широко использует понятие ***векторного произведения векторов***. Если скалярное произведение векторов - это "плоский случай" (два вектора с общей начальной точкой всегда лежат в одной плоскости), то векторное произведение векторов рассматривается в трехмерном пространстве.

- *Векторным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что:
  - длина этого вектора численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах (а именно $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\alpha$).
  - вектор $\vec{c}$ **перпендикулярен** к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
  - вектор $\vec{c}$ направлен так, что если смотреть из конца вектора $\vec{c}$, то поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ осуществляется ***против часовой стрелки***. Мнемонически определять направление вектора поворота помогает уже нам знакомое правило правого винта (правило буравчика).



Обозначается $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ (иногда просто $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$).

Векторное произведение двух векторов - это вектор!

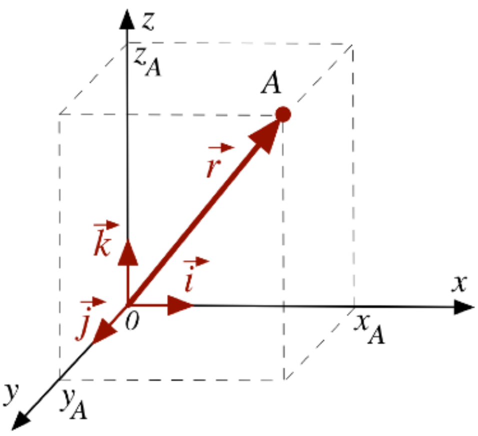
Основные свойства векторного произведения:
- векторное произведение двух коллинеарных (параллельных, α=0) векторов равно 0; частный случай: $[\vec{a} \times \vec{a}] = \vec{0}$;
- $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$ - векторное произведение некоммутативно!

Не сложно? Надо лишь аккуратненько следить за направлением вектора $\vec{c}$ и будет нам счастье.

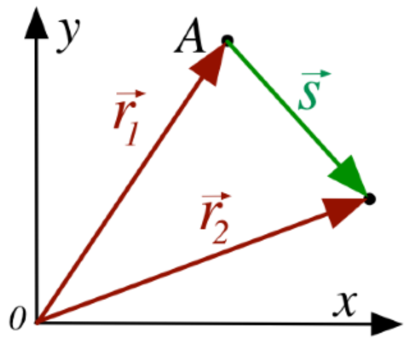
===============

Радиус-вектор

Как задается положение точки? Выбираются оси, координаты точки на этих осях задают положение точки (в трёхмерном пространстве: три оси - три координаты; на плоскости: две оси - две координаты). Что тут еще можно придумать?



Можно придумать кое-что поудобнее.
Есть у нас точка A, есть традиционные оси X,Y и Z. Координаты (x_A, y_A, z_A) задают положение нашей точки в осях XYZ. А вот теперь - новшества. На осях откладываются ***единичные*** вектора: $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$. И вводится понятие радиус-вектора положения нашей точки $\vec{r}$: вектора, начинающегося в начале координат и заканчивающегося на нашей точке. Очевидно, что $\vec{r} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k}$. Радиус-вектор $\vec{r}$ однозначно задаёт положение нашей точки в пространстве. Ну да, координаты (x_A, y_A, z_A) однозначно задают, радиус-вектор $\vec{r}$ однозначно задаёт. Что в лоб, что по лбу. В чём преимущества-то?

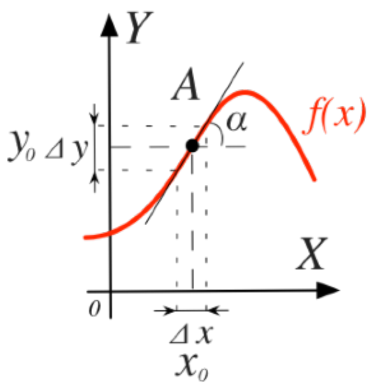


Момент. А давайте рассмотрим перемещение нашей точки. Давайте для простоты объяснения возьмём двумерный случай (для трехмерного пространства рассуждения остаются прежними). Исходное её положение соответствовало радиус-вектору $\vec{r_1}$, а конечное - радиус-вектору $\vec{r_2}$. А как определить перемещение точки $\vec{s}$? Очень просто: $\vec{s} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$. Ведь перемещение - вектор. Характеризуется величиной и направлением. И такое векторное определение перемещения естественно и удобно. С координатами так не получится. А с учетом нашего знания про производные легко и естественно определяется скорость нашей точки в ***векторной*** форме: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Использование радиус-вектора для описания положения точки зачастую бывает удобней. Только и всего.

===============

Производная



Вы изучали производную и правила дифференцирования (*взятие производной функции и дифференцирование функции - это синонимы*) в школьной математике. По определению производной функции $y = f(x)$ в точке $A(x_0, y_0)$ называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в окрестности этой точки (обозначается $f'(x_0)$). Математика требует ещё условие непрерывности в этой точке, но мы не будем вдаваться в математические детали.

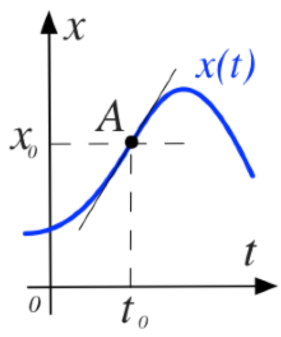
По большому счёту мы получали из одной функции $y = f(x)$ другую функцию $g = f'(x)$ по правилам дифференцирования. Вы ведь умеете делать много преобразований функций: к функции $y = f(x)$ можно прибавить число, умножить её на число, найти противоположную функцию $-f(x)$, обратную и т.д. Так вот производная - это ещё одно преобразование функции.

Но эта другая функция имеет свой *Геометрический Смысл*: значение производной в точке $A(x_0, y_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке:

$f'(x_0) = tg\alpha$. От производной функции можно брать ещё производную (вторая производная) и ещё производную и т.д. И они тоже имеют свой геометрический смысл.

Производные позволяют находить минимумы-максимумы функций, определять интервалы возрастания-убывания функций и много чего ещё полезного.

Но нас, изучающих физику, больше интересует другой смысл производной - *Физический*. Вот представьте себе материальную точку (тело), движущуюся прямолинейно. Её положение задаётся координатой x на выбранной оси. Точка в общем случае может двигаться по прямой самым причудливым способом: то ускоряться, то замедляться, то стоять, то двигаться равномерно. Её движение по прямой описывает уравнение движения $x(t)$. Ну, пусть, например: $x(t) = 6t^3 - 24t^2 + 3t - 1$. То есть в любой нужный нам момент времени t_n мы можем найти координату $x(t_n)$, подставив значение t_n в уравнение. А ещё нас интересует скорость. Мы можем по уравнению $x(t)$ найти скорость в момент времени t_0? Можем!



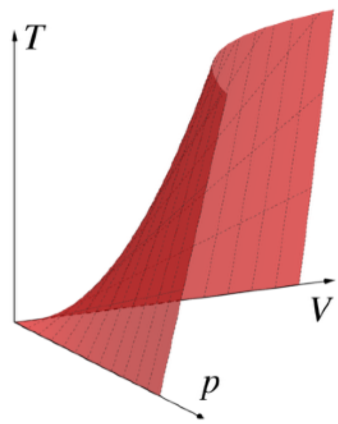
Потому, что у производной есть ещё и *Физический смысл: величина производной в данной точке равна скорости изменения функции в данной точке*. То есть, если мы посчитаем производную по правилу $x'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ в момент t_0, то мы получим величину скорости нашего тела в момент t_0. Величину мгновенной скорости! А посчитаем-ка мы для нашего примера величину скорости в момент $t = 2$. Легко! По известным нам правилам дифференцирования: $x'(t) = (6t^3 - 24t^2 + 3t - 1)' = 18t^2 - 48t + 3$ и, подставляя $t = 2$ в выражение для производной скорости, получим $x'(2) = -21$. А вторая производная $x''(t)$ - это что? Правильно, ускорение! В механике практически все уравнения - это уравнения зависимости тех или иных параметров от времени, поэтому для обозначения производной по времени приняты следующие обозначения (они все эквивалентны, просто уж такая сложившаяся традиция - привыкайте):

$$x'(t) \leftrightarrow \frac{dx}{dt} \leftrightarrow \dot{x}(t) \text{ и } x''(t) \leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} \leftrightarrow \ddot{x}(t).$$

Мы привыкли в школьной физике использовать обозначения вида Δx или Δt для малых приращений x или t (или других физических величин). И говорим при этом, что $\Delta x \to 0$ или $\Delta t \to 0$. Во "взрослой" физике и математике используют более точное понятие ***дифференциал*** (от латинского *differentia* - разность), обозначаемый как dx или dt. Дифференциал - это бесконечно малое приращение. В институтском курсе математики вам дадут строгое определение дифференциала. И обозначение производной как $x'(t) \leftrightarrow \dfrac{dx}{dt}$ имеет глубокий смысл: производная - это *алгебраическое* отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента. С дифференциалами можно выполнять алгебраические операции умножения и деления!

Мы до сих пор говорили о функции одного аргумента $y = f(x)$. Но есть и функции нескольких аргументов. Например, $u(x, t) = 4x^2t - x \cdot t^2 + x - t + 2$ или из физики - для одного моля идеального газа его давление есть функция двух аргументов $p(V, T) = \dfrac{RT}{V}$.

А для таких функций понятие производной применимо? Ведь производная берётся по какому-нибудь одному аргументу. Да, применимо: для функции нескольких аргументов применимо понятие производной по какому-либо одному аргументу.



И такая производная называется *частной производной*.

Вот примеры её обозначения и вычисления:

Для нашей функции $u(x,t)$ частная производная по x такова: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 8x \cdot t - t^2 + 1$ (правила дифференцирования - те же, аргумент t рассматривается как константа); или частная производная по t такова: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4x^2 - 2x \cdot t - 1$ (аргумент x рассматривается как константа). Не буду более забивать вам голову.

Зачастую физические формулы выражаются не непосредственно через физические величины, а через их производные. То есть функция аналитически связывается со своими производными: например $f(x) = -3f'(x) + 12f''(x) - 2$. А в физике, например - уравнение движения математического маятника: $\ddot{x} + \dfrac{g}{L} \cdot x = 0$ (x - смещение от положения равновесия).

Такие уравнения называются *дифференциальными*.

Решить такое дифференциальное уравнение - это значит найти $f(x)$ или $x(t)$ из данных связок.

===============

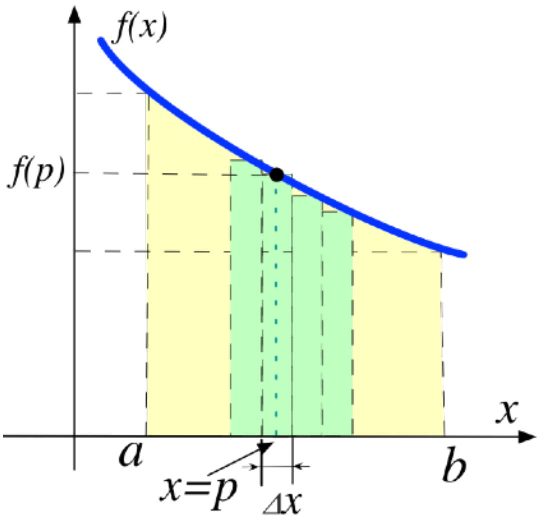
Интеграл

В школе вам давали понятие интеграла, но очень скупо. С производной, надеюсь, вы дружите больше. Как я уже сказал выше, *производная* - это, по большому счёту, *преобразование одной функции в другую*. Да, производная имеет геометрический и физический смыслы и кучу всяких полезных свойств и приложений.

Пусть нам дано такое функциональное соотношение: $f'(x) = 2x^2 + 4$. Дано аналитическое выражение производной функции $f(x)$ через аргумент. А мы можем из этого выражения восстановить функцию $f(x)$? Можем, с точностью до константы. Это как? Поясню. Зная все правила дифференцирования, мы легко можем проследить путь, как из исходной функции $f(x)$ получилась производная $f'(x) = 2x^2 + 4$ и пройти этот путь в обратную сторону. Получим: $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 4x + C$ (проверьте - продифференцируйте это выражение и получите исходное). Мы восстановили исходную функцию с точностью до константы. Константы вылезла потому, что при её дифференцировании (если только она была) получается ноль. Поэтому для общности случая мы константу должны указать в получившемся выражении для функции $f(x)$. То, что мы сделали, называется нахождением ***первообразной*** *(или ещё называют* ***неопределённого интеграла****)* функции. Было дано выражение для производной - мы получили выражение для функции - нашли первообразную. Первообразная (обозначают незатейливо: если $f(x)$ - это функция, то $F(x)$ - это первообразная: $F'(x) = f(x)$) - это тоже, по большому счёту, *преобразование одной функции в другую*.

Но сама по себе первообразная не представляет большого интереса для физиков.

Зайдём с другой стороны. Пусть у нас имеется график функции $f(x)$. И нам надо посчитать площадь под кривой $f(x)$ между a и b (закрашено жёлтеньким). В физике так, например, считается работа силы $f(x)$ на пути ab. Как мы поступим? Разобьём интервал $[a, b]$ на маленькие интервальчики Δx и построим на них прямоугольнички (зелёненькие), упирающиеся в нашу кривую $f(x)$. И можем утверждать, что сумма площадей всех зелёненьких прямоугольничков на интервале $[a, b]$ примерно равна площади под кривой $f(x)$ на интервале $[a, b]$. Чем меньше ширина маленького интервальчика Δx, тем точнее совпадение площадей. Записать это можно так: $S = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \cdot \Delta x$ при $\Delta x \to 0$. "Площадь S равна сумме площадей зелёненьких прямоугольничков при ширине прямоугольничков стремящейся к нулю". При $\Delta x \to 0$ сумма эта будет состоять из бесконечного количества слагаемых. Так вот *интегралом* (точнее говоря, *определённым интегралом*) и называется такая сумма бесконечно многих бесконечно малых слагаемых.



И записывается это так: $S = \int_a^b f(x)dx$. Правда, похоже на предыдущее выражение?

Но самое замечательное то, что для точного вычисления такого определённого интеграла надо сделать всего два действия:

- найти *первообразную* $F(x)$ функции $f(x)$;
- посчитать разность $F(b) - F(a)$.

То есть $S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

С таким математическим инструментом физикам стало гораздо легче жить: работы сил, потоки полей и жидкостей, моменты инерции тел произвольной формы и многое другое стало возможным рассчитывать аналитически.

===============