

Гравитация

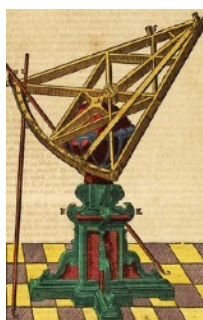
Очень большая тема. Поговорим о классическом Законе Всемирного Тяготения Ньютона. Будет много задач. Ну и, конечно, Теория Относительности Эйнштейна во всей её красоте. Скучно не будет!

"Завершая жизни круг, в замедлении движенья,
Обнаружил как-то вдруг, я земное притяженье.
Тело клонится к земле, голова в прострации,
По научному зовется это - гравитация...."

Гарри Шик

Человечество давно и часто глядит в небо. Ищет там ответы на многие вопросы. Иногда человечество смотрит вниз и видит: всё падает на Землю. Вот от этого глядения вверх и вниз и пришло осознание того, что есть в природе некая сила, от которой ни убежать, ни укрыться не получается - тяготение, гравитация (от латинского слова *gravitas* - "тяжесть").

Немного истории. Не буду рассказывать про египетских и вавилонских астрономов. Начну с более близких времен. Жил-был в Дании во второй половине 16-го века дворянин **Тихо Браге**. С юности он увлекся астрономией и посвятил ей всю свою жизнь. В те времена телескопов ещё не изобрели, а пользовались для наблюдения за планетами и звездами угломерами-визирами. Тихо Браге конструировал и совершенствовал такие инструменты, разрабатывал новые методы наблюдений, организовал несколько обсерваторий. За 20 лет непрерывных наблюдений он составил каталог более чем тысячи звезд, создал таблицы движения планет с поразительной для того времени точностью. Он накопил огромный фактический материал по траекториям движения Луны, Марса и Венеры. И привлёк для его обработки молодого немецкого математика и астронома **Иоганна Кеплера**. И



Секстант
Тихо Браге

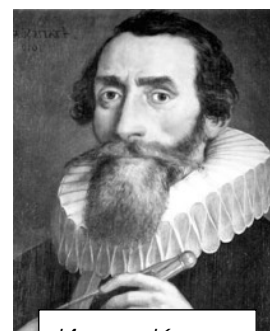
Кеплер вывел из таблиц Тихо Браге (он пользовался в основном очень точными наблюдениями за орбитой Марса) три эмпирических (то есть основанных только на

числах из таблиц) закона, которые стали первыми аналитическими (формульными) законами астрономии:

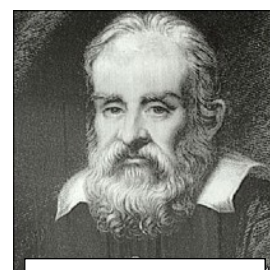
- **первый закон Кеплера:** каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;
- **второй закон Кеплера:** Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, заметает собой равные площади;
- **третий закон Кеплера:** квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит.



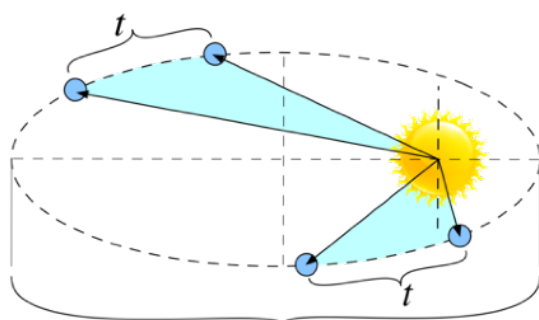
Тихо Браге
(1546-1601)



Иоганн Кеплер
(1571-1630)



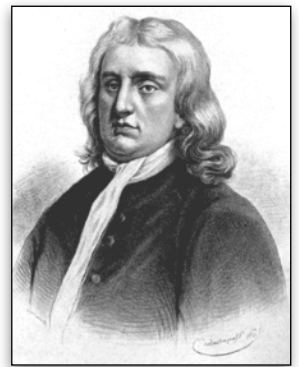
Галилео Галилей
(1564-1642)



a - большая полуось

А когда **Галилео Галилей**, первым применивший недавно изобретенный телескоп для астрономических наблюдений, сообщил Кеплеру об открытии спутников Юпитера, Кеплер нашел подтверждение своим законам и в их движении. Да и сам Галилей много обдумывал законы падения тел на землю.

И всё это происходило на фоне так и не решенного ещё вопроса - кто вокруг кого крутится: Земля вокруг Солнца или наоборот? Взгляните на лица этих людей. Глубина и мудрость смотрят на вас. Эти трое, жившие в одно время и знавшие друг друга, подготовили сцену для выхода главного героя.



Сэр Исаак Ньютон
(1642-1727)

И пришел Ньютон...

С него началось бурное развитие современной математики, с него началась классическая физика. Он сделал очень много. Касательно темы нашей Истории про Гравитацию, надо сказать о трех вещах:

- Ньютон создал методы математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисления) - математический инструмент физики;
- Ньютон сформулировал законы динамики (три закона Ньютона);
- Ньютон открыл закон всемирного тяготения.

Про три закона Ньютона мы говорили в Истории про Силы. Эти три закона отвечают на вопрос "**как себя ведут тела под действием на них сил?**" А вот закон всемирного тяготения описывает то, откуда конкретная сила - сила тяготения - рождается. Закон всемирного тяготения аналитически подтвердил (и уточнил) эмпирические законы Кеплера.

Законы Ньютона, Закон Всемирного Тяготения и законы электродинамики являются **фундаментальными законами Классической Физики**¹. Все её остальные законы выводятся из них. Эти законы - аксиомы, базирующиеся на обобщении экспериментальных результатов.

➔ Закон Всемирного Тяготения (ЗВТ)

В канонической формулировке ЗВТ звучит так: сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками массы m и M , разделенными расстоянием r , пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна

квадрату расстояния между ними: $F = G \frac{m \cdot M}{r^2}$, где m, M - массы взаимодействующих тел, r - расстояние между ними, G - гравитационная постоянная, равная $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$.

Несколько замечаний:

- все материальные тела притягиваются друг к другу;
- они притягиваются друг к другу просто **потому, что у них есть масса** (это есть фундаментальное свойство массы);
- тела притягиваются друг к другу как бы далеко друг от друга они ни находились;
- два тела притягиваются друг к другу с одинаковыми силами (это есть проявление третьего закона Ньютона);
- ЗВТ сформулирован для точечных тел, вектора сил гравитационного притяжения лежат на линии, соединяющей эти точечные тела.

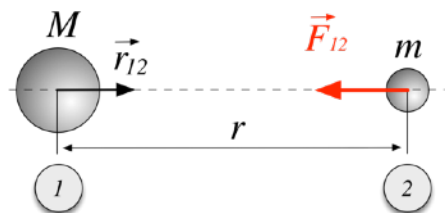
Если поставить вопрос так: "**С какой силой тело 1 массой M действует на тело 2 массой m , находящееся от него на расстоянии r ?**", то векторная формула для такой силы будет

выглядеть так: $\vec{F}_{12} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{r}_{12}$, где \vec{r}_{12} - вектор **единичной** длины, направленный от

тела 1 к телу 2. Знак минус означает, что векторы \vec{F}_{12} и \vec{r}_{12} будут разнонаправленны.

Из ЗВТ следует, что

Масса - мера гравитационного взаимодействия



¹ Смотри Историю о Законах Физики.

ЗВТ сформулирован для точечных тел. А как быть с реальными (не-точечными) телами? В некоторых случаях можно представить, что вся масса большого "неправильного" тела сосредоточена в его центре масс и рассматривать "неправильное" тело как точечное (например, при движении Луны вокруг Земли). В других случаях методы "хитрой" (в хорошем смысле) математики дают возможность рассчитать гравитационное взаимодействие тел практически любой формы (если задача требует такой детализации). Ну а в некоторых случаях достаточно просто хорошенько подумать и "выкрутиться" из сложности (пример приведу позже).

В Истории про Силы мы уже говорили, что носителем-посредником гравитационного взаимодействия является *гравитационное поле*. Поэтому когда мы говорим о гравитационном взаимодействии двух тел массами m и M , физически правильно говорить так: *тело массы M создает своё гравитационное поле, которое воздействует на тело массы m с силой \vec{F}_{12} , в свою очередь тело массы m создает своё гравитационное поле, которое воздействует на тело массы M с силой \vec{F}_{21} .*

- Тело не взаимодействует с собственным гравитационным полем.
- Для сил гравитационного взаимодействия справедлив *принцип суперпозиций*.
- Гравитационное поле *потенциально (консервативно)*: работа гравитационных сил по замкнутому контуру равна 0. Поэтому также говорят, что гравитационные силы *консервативны*.

На все тела на поверхности Земли действует сила тяжести, точно также рассчитываемая по

ЗВТ: $F = m \cdot \left[G \frac{M_3}{R_3^2} \right]$; где m - масса притягиваемого Землей тела, R_3 - радиус Земли

($R_3 = 6,371 \cdot 10^6$ м), M_3 - масса Земли ($M_3 = 5,972 \cdot 10^{24}$ кг). Ускорение свободного падения у поверхности Земли считается так: $g_3 = G \frac{M_3}{R_3^2} = 9,81365$ м/с². А ускорение свободного

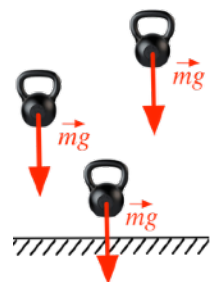
падения на высоте h над поверхностью Земли так: $g(h) = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}$.

У поверхности Земли гравитационное поле считается однородным!

Это утверждение справедливо для высот до 1 км над поверхностью Земли с точностью 0,03%.

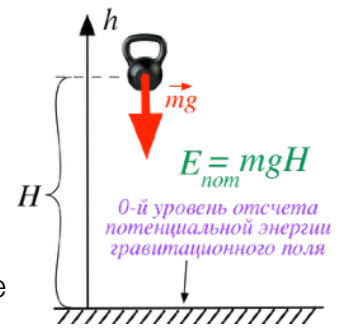
★ *Сила тяжести - это сила гравитационного притяжения к Земле, действующая на тело у её поверхности.*

Направлена она перпендикулярно поверхности Земли и считается очень просто: $F = mg$, где m - масса тела, на которое действует сила тяжести, $g = 9,81$ м/с² - ускорение свободного падения (иногда в школьных задачах это значение округляют до 10 м/с²). **И в любой точке у поверхности на тело одной и той же массы будет действовать одна и та же сила тяжести.** То есть только масса тела определяет величину силы тяжести, а не его положение - это и есть свойство однородных полей.



О расчете потенциальной энергии гравитационного поля у поверхности Земли. Напомню, что потенциальная энергия определяется положением тела относительно поля. Выбирается нулевой уровень отсчета и все потенциальные энергии тел **в рамках данной задачи** рассчитываются относительно него. В случае однородного гравитационного поля все положения тела равноправны, а, следовательно, за ноль отсчета можно принять любую удобную для дальнейших расчетов точку. В конкретной задаче могут присутствовать и другие потенциальные энергии: сжатой пружины, заряженного конденсатора и пр. - эти потенциальные энергии считаются по-своему. Обычно (но это совершенно не обязательно) за такой ноль принимают потенциальную энергию у поверхности Земли. Но уж коль вы выбрали такой ноль, то будьте любезны придерживаться его в своей задаче для расчета всех потенциальных энергий гравитационного поля. И тогда потенциальная энергия считается очень просто:

$E_{\text{потенц}} = mgH$, где H - высота положения тела над выбранным нулевым уровнем.



Потенциальная энергия гравитационного поля в общем случае

Поговорим об этом по-подробнее. Зачастую возникает путаница и непонимание. Напомню базовые принципы:

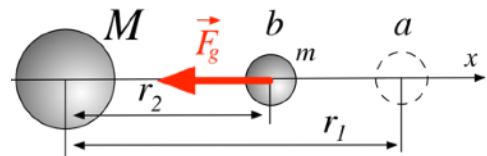
- **Потенциальная энергия** - скалярная физическая величина, представляющая собой часть полной механической энергии системы, находящейся в поле консервативных сил. Зависит от положения материальных точек, составляющих систему, и **характеризует работу, совершаемую полем при их перемещении.**
- Кинетическая энергия всегда характеризует тело относительно выбранной системы отсчёта, а потенциальная энергия - относительно источника силы (силового поля).
- Все силы, встречающиеся в классической механике, принято разделять на **консервативные (потенциальные)** и **неконсервативные (диссипативные)**.
- **Консервативные силы** (например, сила тяжести, сила упругости) - силы, работа которых определяется только начальным и конечным положением тела и не зависит от траектории движения тела. Работа консервативных сил на замкнутом участке равна нулю.
- **Если на систему частиц действуют только консервативные силы, можно для нее ввести понятие потенциальной энергии.** Работа любых консервативных сил всегда происходит за счет убыли потенциальной энергии.
- Неконсервативные силы (например, сила трения, сила сопротивления среды) - силы, работа которых зависит от форму пути тела. Неконсервативные силы могут совершать как положительную, так и отрицательную работу.
- Гравитационные силы консервативны.

Давайте рассмотрим вот такой пример: тело массой m находится в гравитационном поле тела массы M .

Изначально оно находится в положении a - на расстоянии r_1 от тела M . В этом положении оно обладает

потенциальной энергией U_1 в гравитационном поле тела M . Затем под действием силы гравитационного притяжения F_g к телу M тело m перемещается в положение b - на

расстояние r_2 от тела M . В положении b тело m уже обладает потенциальной энергией U_2 в гравитационном поле тела M . Работа гравитационных сил при таком перемещении и есть разность потенциальных энергий: $A_g = U_2 - U_1$.



А теперь представим, что перемещение тела m равно dr - оно очень маленькое - такое маленькое, что силу F_g на нём можно считать постоянной. Тогда работу гравитационных сил на пути dr можно записать как $A_g = F_g \cdot dr$. И тогда $A_g = F_g \cdot dr = dU_g$, где dU_g -

маленькое изменение потенциальной энергии при перемещении на пути dr . А из этого следует: $F_g \cdot dr = dU_g$ или $F_g = \frac{dU_g}{dr}$. А это и есть определение потенциальной энергии

из "взрослой" механики для консервативных сил. Выражение $\frac{dU_g}{dr}$ - это производная потенциальной энергии U_g по r (пути). В привычной "школьной" форме эту производную принято обозначать как $U'_g(r)$.

Тогда применительно к гравитационным силам можно записать $F_g = G \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{dU_g}{dr}$.

Из $G \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{dU_g}{dr}$ интегрированием (операции, обратной дифференцированию - смотри Приложение 1) можно найти выражение для U_g (мы решаем, по сути, дифференциальное

уравнение, с чем вас и поздравляю!): $U_g(r) = const - G \frac{m \cdot M}{r}$. Минус появился из-за

интегрирования выражения $\frac{1}{r^2}$. Константа выскочила здесь из общих правил

интегрирования. Однако она имеет физический смысл: величина потенциальной энергии гравитационного поля в точке начала её отсчета.

Принято её выбирать равной нулю, что соответствует нулю потенциальной энергии гравитационного поля в бесконечности. Поясню. Гравитационное поле, описываемое ЗВТ

$F_g = G \frac{m \cdot M}{r^2}$, неоднородно. Но есть у такого поля замечательная точка - *бесконечность*,

где это поле обращается в ноль (при $r \rightarrow \infty$ $F_g \rightarrow 0$). Вот эту точку и принимают за точку отсчета потенциальной энергии гравитационного поля: в ней гравитационного поля нет и потенциальная энергия гравитационного поля равна 0.

В итоге мы имеем выражение для потенциальной энергии гравитационного поля в

зависимости от удаленности от источника поля: $U_g(r) = -G \frac{m \cdot M}{r}$. Мы к этому

результату долго шли, но он важен.



"А про минус что-нибудь скажете? Вроде математически он тут появился вполне закономерно, но каков его физический смысл? - воскликнул вдумчивый ученик.

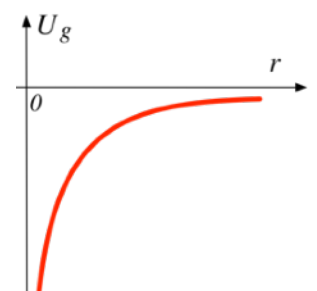
Вот объяснение минусу. Тело обладающее массой, обладает потенциальной энергией в поле гравитации. Тело вне поля гравитации обладает нулевой потенциальной энергией. Для того, чтобы удалить тело из поля гравитации, надо совершить работу - телу нужно сообщить положительную энергию. Но! После удаления тела его энергия станет нулевой! Следовательно изначально его энергия должна быть отрицательной, чтобы в сумме с положительной дать ноль.

И это общий для потенциальных полей принцип:

- если между телами действует сила притяжения, то $U_g < 0$;
- если между телами действует сила отталкивания, то $U_g > 0$.

Поэтому потенциальная энергия гравитационного поля выражается

так $U_g(r) = -G \frac{m \cdot M}{r}$ и графически выглядит вот так.



А вы заметили как математика ловко "подсунула" нам имеющие физический смысл детали: константу при интегрировании как величину потенциальной энергии гравитационного поля в бесконечности или минус в формуле потенциальной энергии, отражающий свойства притяжения гравитационных сил? Это ли не лучшее отражение правильности физической картины мира?

Это были важные рассуждения и важные выводы. С подобными рассуждениями мы столкнемся в Истории про Электростатику, когда будем говорить о потенциальной энергии электростатического поля.

Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения в 1687 году. ЗВТ объяснил множество явлений в астрономии, движении планет, очень тонкие эффекты вращения Земли и Луны. Более двухсот лет он казался универсальным и единственным законом гравитации. Однако к концу 19-го века накопилось несколько фактов, которые ЗВТ объяснить не мог (прежде всего, непонятные небольшие смещения орбиты Меркурия, ближайшей к Солнцу планеты). Наступала эпоха Общей Теории Относительности. Но об этом немного позже.

ЗВТ многократно проверяли. Подтвержденная относительная точность в обычных гравитационных условиях (что такое необычные - чуть позже) составила 10^{-11} . Это очень точно. Отдельно проверяли, что гравитационные силы обратно пропорциональны именно **квадрату** расстояния между телами. Наверное, было бы большим разочарованием узнать, что точная формула ЗВТ выглядит, например, вот так: $F_g = G \frac{m \cdot M}{r^{2,0000000000000001}}$. Но нет. Как говорил Эйнштейн: "Господь Бог изощрен, но не злонамерен." Факт равенства с очень высокой точностью показателя степени двум отражает евклидову природу трёхмерного физического пространства механики Ньютона. В трёхмерном евклидовом пространстве площадь поверхности сферы точно пропорциональна квадрату её радиуса.

=====

На сегодняшний день известны **только четыре вида** взаимодействия:

- гравитационное
- электромагнитное
- слабое ядерное
- сильное ядерное (последние два вида относятся к микромиру)

То есть в окружающем нас мире (не в микромире) есть только два вида взаимодействий:

- гравитационное: масса порождает гравитационное поле, которое воздействует на другие массы;
- электромагнитное: заряды порождают электромагнитное поле, которое воздействует на другие заряды.

А масса взаимодействует с электромагнитным полем?

А заряд взаимодействует с гравитационным полем?

Пока считается, что нет. Однако, кто знает?

А вы обратили внимание как по форме ЗВТ $F = G \frac{m \cdot M}{r^2}$ похож на закон Кулона,

описывающий электростатическое взаимодействие точечных зарядов: $F = k \frac{q \cdot Q}{r^2}$? Эта

похожесть формул и некоторые другие "похожести" гравитационного и электромагнитного взаимодействий позволяют говорить об *электро-механической аналогии*.

Но есть и принципиальные отличия. Например:

- массы, в отличие от зарядов, могут иметь только один знак - положительный. И массы "умеют" только притягиваться.
- из курса электростатики и магнетизма вы знаете (или ещё узнаете), что от электромагнитных сил можно "отгородиться" - экранироваться: залезть в ящик из металлического ферромагнетика и сидеть. И внешнее электромагнитное поле внутрь ящика проникать не будет. А от гравитационного поля "загородки" нет - от него не экранируешься.

Ну вот, мы обсудили теорию. Посмотрим как ЗВТ применяется на практике. Порешаем несколько задач.

=====

Для решения задач (и не только про гравитацию) нам полезно будет вспомнить следующее.

Когда мы имеем дело с **векторными** физическими величинами (*сила, импульс, напряженность электрического и магнитного поля и пр.*), то мы всегда можем разложить их действия по осям координат и записывать уравнения соответствующих физических законов (законов Ньютона, закона сохранения импульса и пр.) в проекциях на каждую ось. То есть физический закон, оперирующий с векторными физическими величинами, дает нам два (в "плоском" случае) или три (в пространственном случае) уравнения.

Если же мы имеем дело со **скалярными** величинами (*работа, энергия, момент силы, потенциал поля и пр.*), то получаем лишь одно уравнение из соответствующих физических законов.

При решении задач по гравитации мы будем использовать (по мере применимости и целесообразности) все ранее изученные законы механики: законы Ньютона, ЗСИ, ЗСЭ, законы кругового движения и пр. Ну и как всегда, главное - это здравый смысл.

> **Задача №1.** Радиус Луны примерно в 3,7 раза меньше радиуса Земли, а масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. Найти ускорение свободного падения у поверхности Луны.

Решение: Ну, тут задачка в полтора действия. Для разминки.

Вот у нас формула для ускорения свободного падения у поверхности Земли: $g_3 = G \frac{M_3}{R_3^2}$. А

как будет выглядеть формула для ускорения свободного падения у поверхности Луны? А

вот так: $g_L = G \frac{M_L}{R_L^2}$, где M_L, R_L - масса и радиус Луны. Тогда $\frac{g_L}{g_3} = \frac{M_L}{M_3} \cdot \frac{R_3^2}{R_L^2}$. Откуда

$g_L = 1,66 \text{ м/с}^2$.

> **Задача №2.** Какой период обращения имел бы искусственный спутник Земли, удаленный от её поверхности на расстояние, равное радиусу Земли?

Решение: Чуток посложнее предыдущей, но даже рисунка рисовать не надо. Какие физические законы использовать? ЗВТ и законы кругового движения.

Спутник движется по круговой орбите вокруг Земли. Центр этого круга - в центре Земли.

Из условия задачи радиус этого круга равен $2R_3$. Центробежной силой является сила гравитационного притяжения спутника к Земле. Пишем формулы кругового движения:

$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega = \frac{v}{2R_3} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4\pi R_3}{T} [1]$, где T - период обращения спутника, ω -

угловая скорость его вращения, v - его линейная орбитальная скорость. Второй закон

Ньютона для кругового движения спутника: $ma_{цс} = F_{гп}$;

$$\frac{mv^2}{2R_3} = G \frac{m \cdot M_3}{(2R_3)^2} \Rightarrow v^2 = G \frac{M_3}{2R_3} \quad [2]. \text{ Подставляя } v \text{ из [1] во [2], получим}$$

$$\frac{16\pi^2 R_3^2}{T^2} = G \frac{M_3}{2R_3} \Rightarrow T = 4\pi R_3 \sqrt{\frac{2R_3}{G \cdot M_3}} \quad [3]. \text{ Если вспомнить, что } g_3 = G \frac{M_3}{R_3^2}, \text{ то}$$

можно [3] чуток упростить: $T = 4\pi \sqrt{\frac{2R_3}{g_3}}$, что дает $T=7100$ сек или 1 час 58 мин 20 сек.

➤ Задача №3. Звездная система состоит из двух одинаковых звезд, находящихся на расстоянии R друг от друга. Найти период обращения звезд вокруг общего центра масс, если масса каждой звезды m .

Решение: Почти что предыдущая, только с рисунком. Картина симметрична: массы звезд равны, общий центр тяжести находится посередине, орбита звезд круговая. Формулы кругового движения: $T = \frac{2\pi}{\omega}$; $\omega = \frac{2v}{R} \Rightarrow v = \frac{\pi R}{T}$ [1].

Второй закон Ньютона для кругового движения одной звезды: $ma_{цс} = F_{зр}$;

$$\frac{2mv^2}{R} = G \frac{m^2}{R^2} \Rightarrow v^2 = G \frac{m}{2R} \quad [2].$$

$$\text{Подставляя [1] во [2]: } \frac{\pi^2 R^2}{T^2} = G \frac{m}{2R} \Rightarrow T = \pi \sqrt{\frac{2R^3}{G \cdot m}}.$$

По астрономическим наблюдениям больше половины наблюдаемых звезд - двойные. Очевидно, что массы их в подавляющем случае не равны. И звезды такой пары вращаются по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой (фокусов эллипса) располагается их центр масс. При этом скорость орбитального движения меняется в зависимости от положения звезды на орбите. Ну про эллиптические орбиты мы поговорим ниже.

➤ Задача №4. Какую работу надо совершить двигателям спутника массой m , вращающегося вокруг Земли по круговой орбите высотой h над поверхностью Земли, для перехода на круговую орбиту на высоте $2h$ над поверхностью Земли?

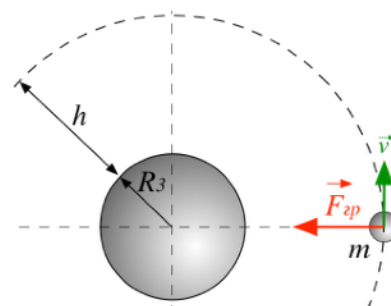
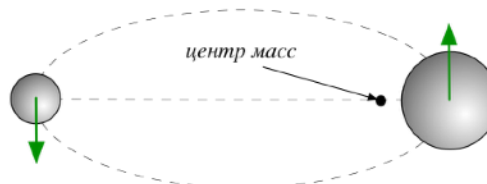
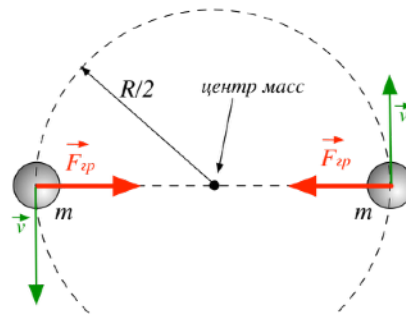
Рассуждения и решение: Хорошая задачка.

И Землю, и спутник рассматриваем как материальные точечные тела. Спутник, вращаясь по круговой орбите в гравитационном поле Земли, обладает кинетической и потенциальной энергией. Рассмотрим эти энергии. Кинетическая энергия считается так же, как и всегда: $E_K = \frac{m \cdot v^2}{2}$. Скорость v получим из уравнения

$$\text{кругового движения: } \frac{m \cdot v^2}{R_3 + h} = G \frac{m \cdot M_3}{(R_3 + h)^2} \Rightarrow v^2 = G \frac{M_3}{R_3 + h},$$

$$\text{откуда получим величину кинетической энергии на высоте } h: E_K(h) = G \frac{m \cdot M_3}{2(R_3 + h)}.$$

Выше мы детально обсудили вопрос о потенциальной энергии тела в гравитационном поле.



Поэтому потенциальная энергия спутника на высоте h : $E_{\Pi}(h) = -G \frac{m \cdot M_3}{R_3 + h}$.

А полная энергия спутника на высоте h :

$$E(h) = E_K(h) + E_{\Pi}(h) = G \frac{m \cdot M_3}{2(R_3 + h)} - G \frac{m \cdot M_3}{R_3 + h} = -G \frac{m \cdot M_3}{2(R_3 + h)}.$$

То есть каждой стационарной орбите спутника соответствует определенная величина его полной энергии.

Тогда работу, которую надо совершить двигателям спутника при переводе его со стационарной круговой орбиты высотой h на стационарную круговую орбиту высотой $2h$ равна разности полных энергий спутника на этих орбитах: $A = E(2h) - E(h)$. Или:

$$A = -G \frac{m \cdot M_3}{2(R_3 + 2h)} - \left(-G \frac{m \cdot M_3}{2(R_3 + h)}\right) = G \frac{m \cdot M_3}{2} \left(\frac{h}{(R_3 + 2h)(R_3 + h)} \right).$$

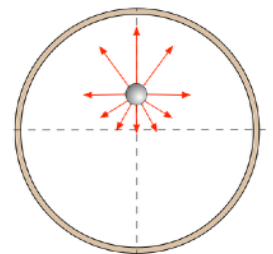
Очевидно, что величина этой работы A - положительная.

А вот чтобы понизить орбиту (уменьшить h), двигатели спутника должны его "тормознуть", понизив скорость. И тогда спутник опустится до той орбиты, которой соответствует его новая полная энергия. Орбиты большей части спутников, вращающихся вокруг Земли (спутники связи, спутники-шпионы, метео-спутники, Международная Космическая Станция), расположены на высоте порядка 400 км от поверхности Земли. На этой высоте ощутимо действие сверх-разряженной земной атмосферы, о которую спутники "трутся", гася свою скорость. Поэтому периодически приходится корректировать орбиту, включая двигатели и увеличивая погасшую скорость. Если этого не делать (или если кончилось топливо в спутниковых двигателях), то такой спутник неминуемо свалится на Землю (если целиком не сгорит от трения в плотных слоях атмосферы). И задача управляющей команды - на остатках топлива скорректировать его линию падения так, чтобы его несгоревшие остатки упали бы где-нибудь в несудоходных районах океана, а не на Париж, например.

> Задача №5. Определите величину ускорения свободного падения в шахте на глубине h от поверхности Земли.

Решение: *Важная задачка для понимания.*

Для начала представим себе тонкую сферу массы M , создающую гравитационное поле. Для тел, находящихся снаружи сферы, картина гравитационного притяжения будет такая же, как если бы всю массу сферы M поместили бы в центр сферы. И мы бы рассматривали гравитационное взаимодействие точечного тела массы M и "внешних" тел.



Теперь рассмотрим тело внутри сферы. Представим сферу как большое количество материальных точек, из которых сфера состоит, и нарисуем вектора сил гравитационного притяжения тела каждой из этих материальных точек (на рисунке я изобразил несколько таких векторов). Во-первых, очевидно, что из-за симметрии картинка сила результирующего гравитационного притяжения (если она вообще не окажется равной нулю) будет направлена по вертикали (на рисунке). Симметрия - великая сила и помогает быстро сконцентрироваться на главном. Во-вторых видно, что точки сферы, к которым тело находится ближе, будут притягивать тело сильнее. Но таких точек меньше, чем "далеких". Если методами математического анализа просуммировать (проинтегрировать) все силы гравитационного притяжения тела каждой из этих материальных точек, то окажется, что результирующая сумма равна нулю.

То есть внутри сферы её собственное гравитационное поле отсутствует!

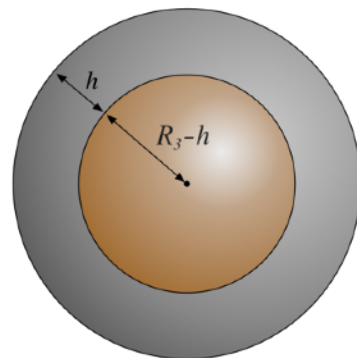
Но сфера **не экранирует** другие ("чужие") гравитационные поля, и если они есть, то они будут действовать внутри сферы.

Не надо особо переживать, что в данном (да и в некоторых других) утверждении я ссылаюсь на некую магию высшей математики в подтверждение своих рассуждений. Главное - я сообщаю вам об интересном факте, который легко запомнить. Просто в школе не проходят математический анализ в полном объеме. К середине второго курса технического вуза вам станет понятна вся эта "магия".

А коли так, то, рассуждая последовательно по аналогичной схеме, можно утверждать, что гравитационное поле и *толстостенной* сферы внутри этой сферы равно нулю (просто рассмотрим толстостенную сферу как множество вложенных тонкостенных сфер).

Вот мы и подошли к рассмотрению нашей задачи.

После всего сказанного становится ясно, что на тело, опущенное в шахту на глубину h , не будет действовать гравитационное притяжение всех точек Земли, которые располагаются выше тела (не будет гравитационно действовать толстостенная сфера (серенькая на рисунке) с толщиной стенки h). А будет гравитационно действовать только та часть Земли, которая находится ниже h - внутри этой сферы (коричневенькая на рисунке). Как-будто Земля "скукожилась" и стала иметь радиус $R_3 - h$.



Настало время посчитать. Пусть масса этой "внутренней" Земли (коричневенькой) равна M_k . Масса пропорциональна объёму, объём сферы пропорционален кубу радиуса сферы. Предполагая среднюю плотность всей Земли и

"внутренней" Земли одинаковыми, можем записать: $\frac{M_3}{M_k} = \frac{R_3^3}{(R_3 - h)^3}$ [1].

Запишем уравнение ускорения свободного падения для "внутренней" Земли:

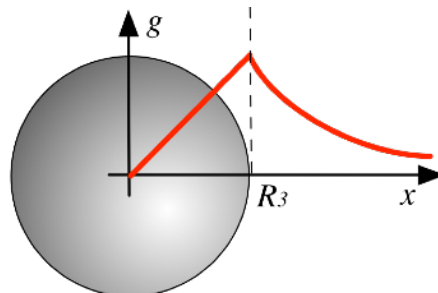
$$g(-h) = G \frac{M_k}{(R_3 - h)^2} \quad [2]. \text{ Подставляя } M_k \text{ из [1] во [2], получаем:}$$

$$g(-h) = G \cdot M_3 \frac{(R_3 - h)}{R_3^3} \text{ или, помня, что } g_3 = G \frac{M_3}{R_3^2} \text{ (} g_3 \text{ - любимое нами ускорение}$$

свободного падения у поверхности Земли = 9,81 м/с²), запишем $g(-h) = g_3 \cdot \frac{(R_3 - h)}{R_3}$.

То есть ускорение свободного падения на глубине h убывает линейно с возрастанием h .

На графике изображена зависимость величины g от расстояния от центра Земли. Эта зависимость очень похожа на зависимость потенциала электростатического поля заряженного шара - в этом проявляется ранее мной обозначенная электро-механическая аналогия. Поэтому величину g принято также рассматривать как потенциал гравитационного поля.



Кстати, электростатическое поле внутри заряженной сферы тоже отсутствует!

Ну вот мы и решили эту задачку. Заметьте: задачка в одну строчку, а сколько рассуждений и фактов она за собой "потянула". Это физика, детка!

➤ **Задача №6.** На какой высоте должен вращаться спутник, чтобы период его вращения совпадал с периодом вращения Земли? Как должна располагаться орбита такого спутника, чтобы он всё время висел над одной и той же точкой на Земле?

Решение: Ну с периодом-то мы сейчас быстро разберемся. Период вращения Земли (а Земля вращается, если вы не знали²) равен $T_3 = 24$ часа = 86.400 сек. Формулы кругового движения: $T_3 = \frac{2\pi}{\omega}$; $\omega = \frac{v}{R}$; $v = \frac{2\pi R}{T_3}$ [1].

Второй закон Ньютона для кругового движения: $\frac{mv^2}{R} = G \frac{m \cdot M_3}{R^2} \Rightarrow v^2 = G \frac{M_3}{R}$ [2].

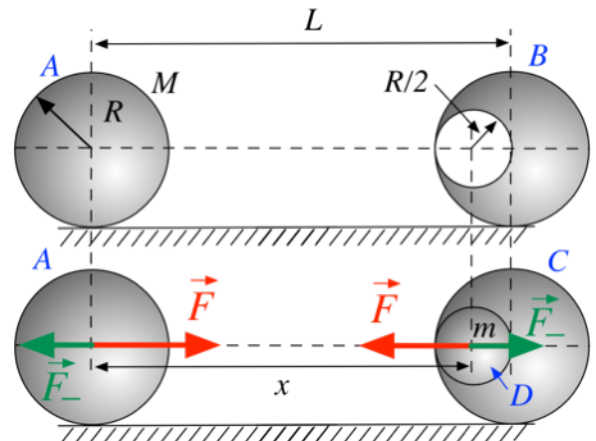
Подставляя [1] во [2]: $R = \sqrt[3]{G \frac{M_3 \cdot T_3^2}{4\pi^2}}$. Вычисляем: $h = R - R_3 = 35.800$ км над

поверхностью Земли. Окей!

Теперь о положении орбиты. Плоскость орбиты по-любому проходит через центр Земли. По здравому размышлению, орбита такого спутника должна лежать в плоскости экватора (плоскость экватора перпендикулярна оси вращения Земли) и спутник должен вращаться в сторону вращения Земли.

Такие орбиты высотой около 36 тысяч км, на которых спутник "зависает" над какой-либо экваториальной точкой Земли (а на самом деле синхронно вращается вместе с этой точкой), называются **геостационарными**. На них удобно размещать связные и ретрансляционные спутники.

➤ **Задача №7.** На поверхности Земли находятся два свинцовых шара радиусом R каждый. Расстояние между центрами этих шаров L . В одном из них вырезана сферическая полость радиуса $R/2$. Центр полости находится на расстоянии $R/2$ от центра шара. Определите силу гравитационного притяжения этих шаров.



Решение: Итак, мы имеем два тела: тело A - шар радиуса R (к нему напрямую можно применить формулу ЗВТ) и тело B - шар с полостью. Тело B - не сферическое и к нему формулу ЗВТ не применить. Возможны два варианта действий: а) рассчитать положение центра тяжести тела B и уж потом пользоваться формулой ЗВТ и б) использовать **метод отрицательных масс**. Пойдём путём б).

А давайте представим тело B как два тела: тело C - полный шар радиуса R и тело D - шар радиуса $R/2$, но с **отрицательной** массой. Что я имею ввиду под отрицательной массой? Только то, что **отрицательная масса не притягивается к другой положительной массе, а отталкивается от неё**. А формула для величины силы такая же, что и для положительной массы. Что это нам даёт? А то, что в смысле результирующей гравитационной силы тело B полностью эквивалентно комбинации "тело C + тело D ". Ну да, в теле C мы заполнили полость тела B массой, сделав его сферическим, а такую же заполнившую полость массу вынесли в тело D , сделав её отрицательной. По принципу суперпозиций заполнившая полость тела B масса и отрицательная масса тела D компенсируют друг друга в гравитационном смысле. В этом и состоит метод отрицательных масс.

² тонкая шутка автора

А посчитать гравитационную силу притяжения между исходными телами A и B будет очень просто. Заменив тело B на комбинацию "тело C + тело D ", мы не изменили гравитационную силу, действующую на тело A . Просто теперь её можно представить формулой:

$F_R = F - F_-$, где F_R - гравитационная сила, действующая на тело A (искомая), F - сила гравитационного притяжения между телом A и телом C , F_- - сила гравитационного отталкивания между телом A и телом D . Готовы писать формулы. Только сначала надо уточнить: расстояние между центрами тел A и D $x = L - R/2$; масса тела пропорциональна его объёму, объём сферы пропорционален кубу её радиуса. Поэтому масса тела D $m = \frac{1}{8}M$, где M - масса тел A и C . Итак: $F = G \frac{M^2}{L^2}$; $F_- = G \frac{1}{8} \frac{M^2}{(L - R/2)^2}$;

$F_R = G \frac{M^2}{L^2} - G \frac{1}{8} \frac{M^2}{(L - R/2)^2} = G \cdot M^2 \cdot \left[\frac{1}{L^2} - \frac{1}{8(L - R/2)^2} \right]$. Задача по сути решена.

Можно еще выразить M через плотность свинца и радиус: $M = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \cdot \rho_{Pb}$, где ρ_{Pb} - плотность свинца.

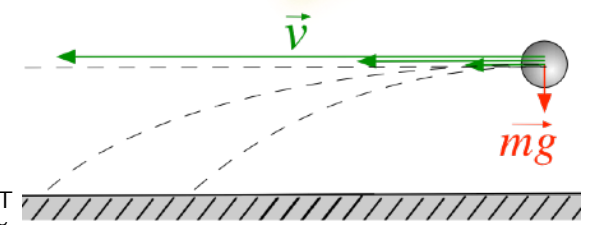
=====

А теперь давайте поговорим о движении спутников, планет и о том, как закон всемирного тяготения всё это регулирует.

Давайте представим себе массивную планету массы M и движущееся вокруг него тело массы m . Воздействия на это движение Земли, Солнца и пр. нет. Никакой атмосферы, тормозящей движение тела, у планеты нет. Чисто математическая модель. Пусть тело (спутник) имеет двигатель, с помощью которого можно управлять скоростью движения тела во всех направлениях.



Начнем с простого и знакомого. Пусть тело находится у самой поверхности планеты (стоит на маленькой подставке). У поверхности планеты (если она достаточно велика и массивна) мы считаем гравитационное поле однородным. На тело действует сила тяжести. Тело на короткое время включает свой двигатель так, что приобретаемая телом скорость направлена горизонтально.



Раз включили на очень короткое время, тело приобрело скорость v , но под действием силы тяжести, пролетев по параболе, тело падает на поверхность (ну точно как камень, брошенный горизонтально). Еще раз включили на время подольше, тело приобрело бОльшую скорость, но всё равно упало по параболе дальше от первоначальной точки. Стали увеличивать начальную скорость тела. Тело всё равно падает, но падает всё дальше. Но вот, по достижении ещё бОльшей скорости, тело вдруг перестало падать, а начало двигаться параллельно поверхности планеты. При рассмотрении картинка в более мелком масштабе становится понятно, что тело начало вращаться по круговой орбите вокруг планеты у самой ее поверхности. Мы-то понимаем, что при малых скоростях сила тяжести просто "роняло" тело на поверхность. Но при последнем значении скорости у силы тяжести не хватило "силенок" тело уронить, а хватило лишь на то, чтобы вектор скорости поворачивать, обеспечивая тем самым вращение тела вокруг планеты. То есть величина силы тяжести стала равной необходимой величине центростремительной силе для вращения тела вокруг планеты. Вот эта скорость и называется *первой космической*.

Первая космическая скорость - минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться по круговой орбите у **поверхности** планеты.

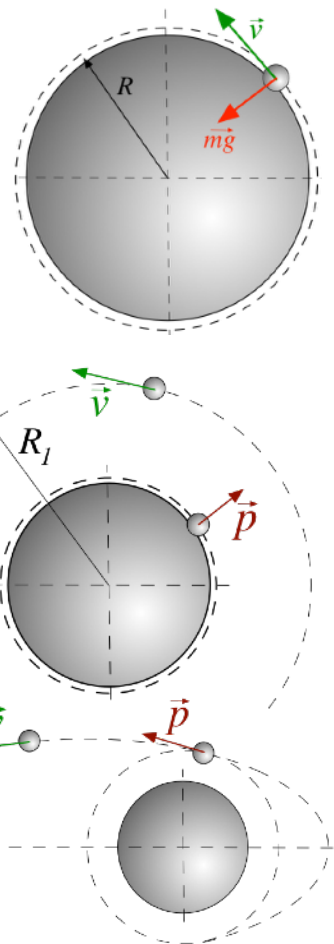
Как её посчитать? Очень просто - мы это делали выше: $v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}}$.

Для Земли $v_1 = 7,9$ км/с.

Пойдем экспериментировать дальше. Итак, тело вращается по круговой орбите вокруг планеты у самой ее поверхности. Дадим-ка мы двигателем короткий радиальный импульс (направленный по оси центр планеты-тело). Тело перейдет на более высокую круговую орбиту (сила гравитационного притяжения погасит радиальную скорость, но тело уже окажется выше) и станет по ней

вращаться со скоростью $v = \sqrt{G \frac{M}{R_1}}$. Тут всё понятно³.

А вот сейчас кое-что новое. А дадим-ка мы двигателем тела импульс, направленный не по радиусу вращения, а по касательной к круговой орбите (увеличим орбитальную скорость). Какой станет новая орбита движения тела? ЗВТ и математический анализ утверждают: тело наше начнет двигаться по эллиптической орбите, такой, что в одном из фокусов этого эллипса будет находиться центр планеты.

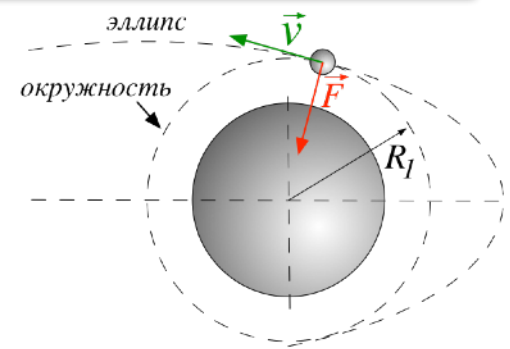


"Чурики-чурики! Что это за чудо такое - эллипс с фокусами?" - вдумчивый ученик на боевом посту.

В Приложении 2 рассказана подробная История про Конические Сечения. Для ленивых - короткая справка.

По определению (геометрическому) **эллипс** - это геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (называемых фокусами эллипса) постоянно. Эллипс относится к группе кривых, называемых **коническими сечениями**. **Конические сечения** – плоские кривые, которые получаются пересечением прямого кругового конуса плоскостью. Меняется угол, под которым плоскость сечет конус, - меняются линии пересечения. К коническим сечениям относятся известные кривые: **окружность**, **эллипс**, **парабола** и **гипербола**. Конические сечения, благодаря своим свойствам, постоянно встречаются в математике и физике. *Окружность является частным случаем эллипса при совпадении его фокусов.*

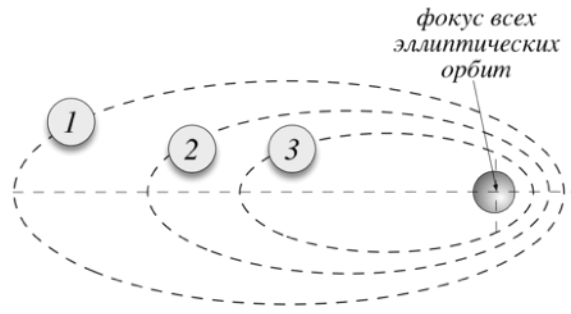
Ну действительно, давайте посмотрим на картинку. Тело находится на расстоянии R_1 от центра планеты и движется со скоростью v . На тело действует гравитационная сила притяжения к планете F , равная $G \frac{m \cdot M}{R_1^2}$. Если $\frac{m \cdot v^2}{R_1} = G \frac{m \cdot M}{R_1^2}$. Но F , выступая в качестве центростремительной, "заворачивает" тело, заставляя его двигаться по окружности. А если скорость



³ На самом деле придётся двигателями погасить орбитальную скорость с v_1 до v ($v_1 > v$). Если этого не сделать, то тело начнет двигаться по эллиптической орбите, а не по круговой - см. об этом дальше.

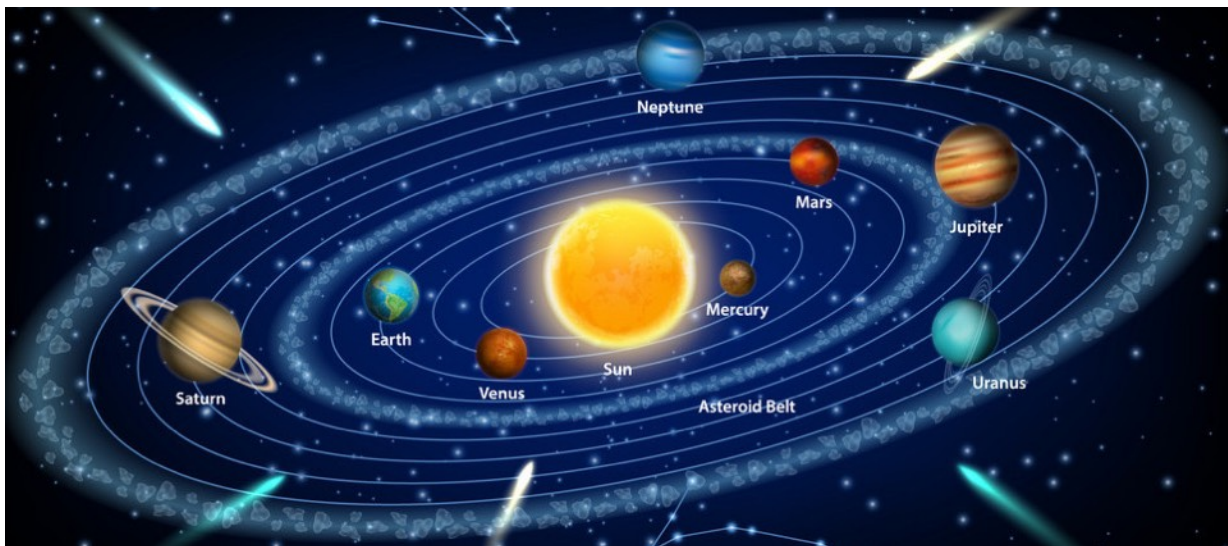
тела больше и она такая, что $\frac{m \cdot v^2}{R_1} > G \frac{m \cdot M}{R_1^2}$, то

у силы F просто не хватит "силенок", чтобы "завернуть" тело по окружности и тело будет двигаться по другой траектории. Так вот, эта другая траектория - эллипс. Причем чем больше скорость тела, тем более вытянутой будет эллиптическая орбита (планета всегда будет находиться в одном из фокусов эллипса) ($v_1 > v_2 > v_3$ на рисунке). Более того, движение тела по эллиптической орбите не будет равномерным: скорость его будет минимальна при максимальном удалении от планеты и наоборот).



Из всего вышесказанного следует, что круговая орбита - это частный случай эллиптической орбиты (также как окружность является частным случаем эллипса). Круговая орбита возможна только в частном случае, а именно: $F_{rp} = \frac{m \cdot v^2}{R}$. И круговая, и эллиптическая орбиты являются орбитами замкнутыми.

Но природа не любит частных случаев. Поэтому все планеты солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. И Солнце находится в фокусе этих эллиптических орбит. Впервые это обнаружил Кеплер (Первый закон Кеплера).



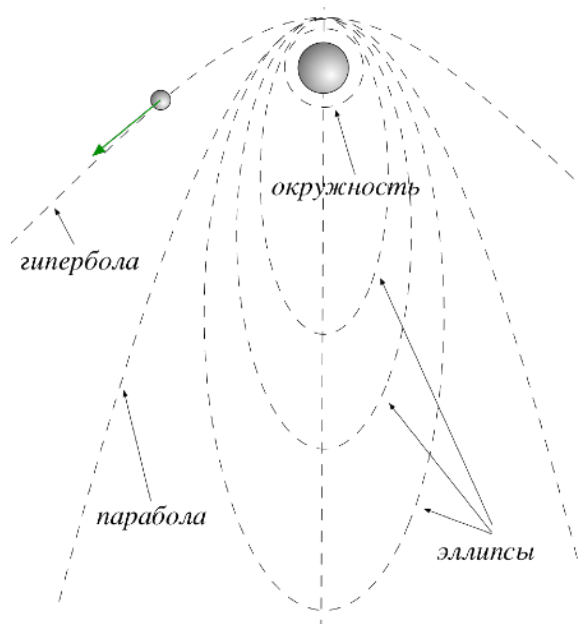
Но мы продолжаем наши эксперименты. Всё больше увеличиваем скорость орбитального движения тела. Эллипсы его траекторий вытягиваются всё больше и больше. Но они остаются эллипсами - замкнутыми кривыми - и тело возвращается к планете. И что - так можно до бесконечности "вытягивать эллипсы", увеличивая скорость тела? Оказывается, нет. При достижении ещё большей скорости, орбита движения тела "разомкнется" и оно полетит по параболе! Парабола - это тоже коническое сечение. Парабола - не замкнутая кривая. Полетев по параболе, тело преодолет влияние гравитационного поля планеты и улетит от неё, к ней назад уже не вернувшись.

А преодоление гравитационного влияния планеты (Земли, например) - это путь к межпланетным путешествиям. Поэтому для такой важной скорости, при которой происходит "размыкание" орбиты движения тела, ввели свое определение.

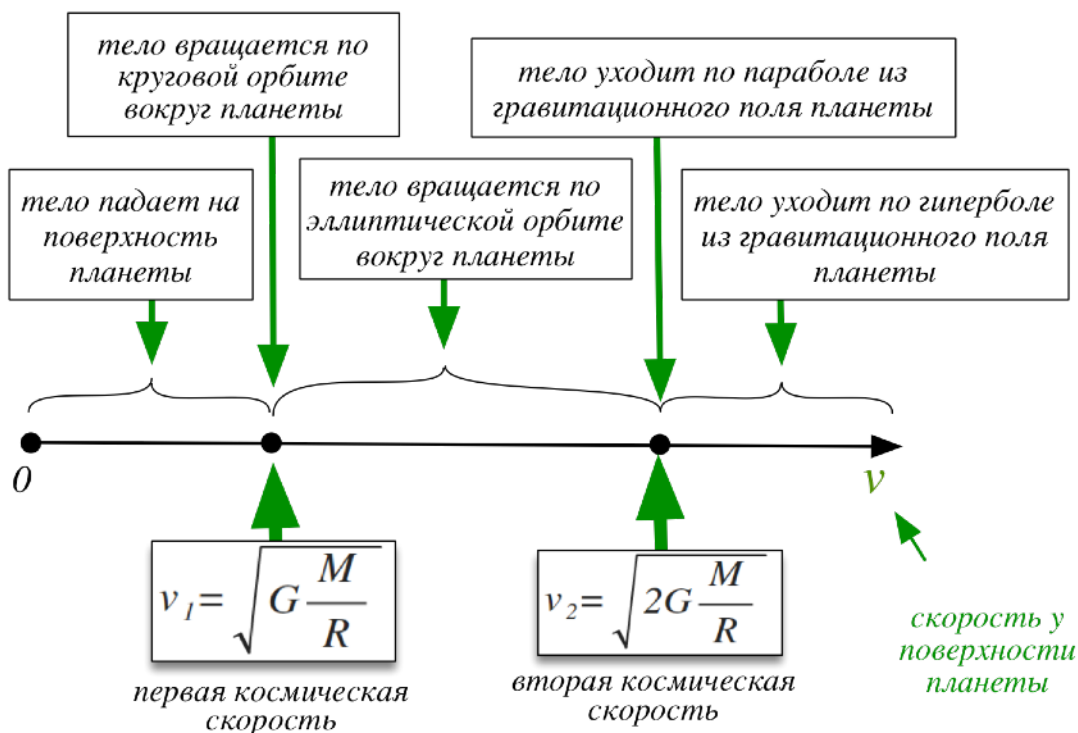
Вторая космическая скорость - минимальная скорость, которую надо сообщить телу у поверхности⁴ планеты для того, чтобы тело преодолело ее гравитационное притяжение. Для Земли $v_2 = 11,2$ км/с.

Для расчета второй космической скорости есть простая формула (не буду заморачивать вам голову её выводом): $v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}}$. Заметьте, что $v_2 = \sqrt{2}v_1$. Вторая космическая больше в $\sqrt{2}$ раз первой космической.

Итак, мы сумели преодолеть гравитационное притяжение планеты и улетаем по параболе от неё со скоростью v_2 . А вот если чуток еще увеличить скорость (а потом ещё и ещё), то тело полетит уже по гиперболе. И чем больше будет скорость, тем "разомкнутее" будет гипербола. Получается, что по параболе тело может двигаться только при вполне определенной скорости: чуть меньше - и оно пошло по эллипсу, чуть больше - и оно пошло по гиперболе. Параболическая орбита - это частный случай между эллиптической и гиперболической. И этот факт отражается в свойствах конических сечений: параболе соответствует вполне определенное положение плоскости, секущей конус (плоскость сечения параллельна образующей конуса). Как всё красиво, плавно, взаимосвязано! И интересно-то как!



Приведу сводную картинку, описывающую все варианты движения нашего тела в зависимости от его скорости у поверхности планеты.



⁴ "у поверхности" - сказано для того, чтобы обозначить "точку отсчета" вычисления второй космической. Это позволяет сравнить величины вторых космических у разных планет.

О гравитационном маневре

Вот захотелось человечеству запустить спутник на далекие планеты - Юпитер, Сатурн или Плутон (на Луну, Марс, Венеру уже слетали). Чтобы с низкой околоземной орбиты (скорость на ней около 8 км/с) отправиться напрямую к Юпитеру, надо еще набрать 6 км/с, к Плутону - 8-9 км/с. Но каждые 3 км/с дополнительного разгона втрое увеличивают стартовую массу ракеты и при современных технических возможностях такие полеты становятся просто неосуществимы.

Но возможность улететь далеко всё-таки у любопытного человечества есть. И это - гравитационный маневр. В чём он заключается - расскажу на примере американского космического аппарата "Вояджер-2", запущенного в 1977 году (более 40 лет назад!). Его задачей было достичь далеких планет Нептуна, Урана и Плутона, сфотографировать их и послать кучу научных данных на Землю.

При старте с Земли его нацелили на Юпитер - самую "тяжелую" из планет. Попав в гравитационное поле Юпитера, "Вояджер-2" начал к нему притягиваться и ускоряться. Но орбита его была рассчитана так, что значительно ускорившись, он был "перенацелен"

Юпитером на Нептун и продолжил движение к Нептуну по гиперболической траектории. То есть Юпитер ускорил и перенацелил "Вояджера-2". В этом и состоит гравитационный маневр. На сегодняшний день, полностью выполнив поставленные задачи, "Вояджер-2" покинул пределы Солнечной системы и летит к звездам (набранная им скорость - порядка 18 км/с - рекорд). Сегодня космические аппараты выполняют по несколько гравитационных маневров у разных планет, оптимизируя тем самым траектории и расход топлива.

Наша неуёмная жажда задавать вопросы не оставляет нас в покое. Мы продолжаем наш эксперимент - увеличиваем скорость нашего тела.

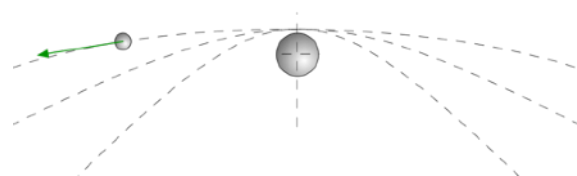
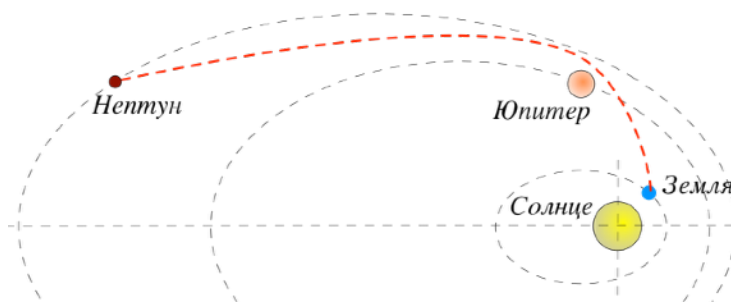
Гиперболы становятся всё ближе и ближе и стремятся к прямой. Поскольку мы все люди образованные, то наверняка знаем, что максимально возможная в природе скорость, с которой могут перемещаться материальные тела - это скорость света в вакууме: $c \approx 300.000 \text{ км/ч}$ или $c \approx 300.000.000 \text{ м/с}$.

И тут подкрадывается вопрос: а что это должна быть за планета, у которой вторая космическая скорость равнялась бы скорости света? То есть выполнялось бы условие

$c = \sqrt{2G \frac{M}{R}}$ или $\frac{M}{R} = \frac{c^2}{2G}$. То есть у такой планеты отношение массы и её радиуса фиксированы. Подставим в последнюю формулу массу Земли $M_3 = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ и

посчитаем радиус $R_g = \frac{2G \cdot M_3}{c^2} = 8,85 \text{ мм}$. Знаете, что мы посчитали? Мы посчитали гравитационный радиус Земли.

Гравитационный радиус (радиус Шварцшильда) - критический радиус, при котором массивное тело под влиянием собственного гравитационного притяжения становится **черной дырой**. Из её гравитационного притяжения ничто не может вырваться, даже свет.



Мы посчитали какой должен быть радиус Земли, чтобы она стала черной дырой! Ой! То есть Земля с её массой в $5,972 \cdot 10^{24}$ кг должна сжаться до шарика радиусом в 9 миллиметров и тогда она превратится в черную дыру. Еще раз, ой!

Ну вот мы со своими вопросами залезли в огород Общей Теории Относительности (ОТО) (хотя формулы для гравитационного радиуса в ЗВТ и ОТО совпадают).

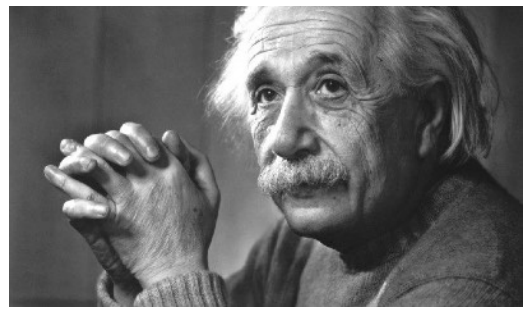
Пора поговорить об этом.

И пришел Эйнштейн...



→ Теория относительности

Немного истории. К концу 19-го века казалось, что физика достигла своей высшей точки развития и осталось уточнить кое-какие детали. Классическая механика, основанная на законах Ньютона и законе всемирного тяготения, прекрасно работала, объясняла практически все механические явления природы. Бурно развившаяся математика стала мощным инструментом в физике. Сформулированные в 70-х годах 19-го века уравнения Максвелла превратили электродинамику в стройную завершённую теорию. Термодинамика и оптика тоже не отставали.



Альберт Эйнштейн
(1879-1955)

Как говорили физики того времени: у физики больше нет перспектив. На почти безоблачном небе открытых истин видны лишь **два небольших облачка** - **проблемы с объяснением теплового излучения** и **опыты по измерению скорости света**. Скоро они рассеются, и в физике нечего будет делать.

Первое "облачко". Проблема с объяснением теплового излучения (или так называемая **ультрафиолетовая катастрофа**) состояла в том, что согласно классической термодинамике полная мощность теплового излучения любого нагретого тела должна быть бесконечной, что есть абсурд и что противоречило всем опытам. В 1900 году немецкий ученый **Макс Планк** ввёл в физику понятие **квант**, с его помощью получил правильную формулу для теплового излучения и разрешил тем самым проблему. И с этого планковского кванта отсчитывается рождение **квантовой физики**. А берегов у этого моря не видно и по сей день.

О втором "облачке". Классическая электродинамика Максвелла пришла к выводу, что свет - это электромагнитная волна. И скорость распространения этой волны - скорость света⁵ - подсчитали с вполне приличной точностью - $c \approx 300.000$ км/ч или $c \approx 300.000.000$ м/с. Всё вроде бы хорошо. Механика Ньютона утверждала, что если бежать (скакать, ехать, лететь) за лучом света, то можно его и догнать и получить "неподвижный кусок света" в ладошке. Тут уж электродинамика зафыркала на "неподвижный кусок света". В дело включились экспериментаторы. Несколько чрезвычайно тонких и точных для того времени опытов (например, опыт Майкельсона-Морли) вынесли приговор: **скорость света не зависит ни от скорости источника света, ни от скорости приемника** и равна $c \approx 300.000$ км/ч. "Ой!" - сказали все физики. Это никак не вписывалось ни в повседневный опыт, ни в существующую физическую картину мира. Повседневный опыт, он же - здравый смысл - отсылает нас, например, вот к такой ситуации: по улице едет машина скорой помощи со включенной сиреной. Когда она едет на вас, то звук сирены доходит до вас на более высоких частотах, чем звук сирены, доходящий до вас, когда машина едет от вас (это называется эффектом Допплера⁶). Ну да, звук - это механические колебания воздуха, а свет - электромагнитные. Ну, чтоб свету было всё равно?! Здравый смысл напрягся. Но как говорил Эйнштейн: **"Здравый смысл - это сумма предубеждений, приобретённых до восемнадцатилетнего возраста"**.



⁵ Здесь и далее под "скоростью света" мы понимаем скорость распространения света в вакууме. Когда свет распространяется в среде (вода, прозрачное твёрдое тело), он средой тормозится.

⁶ Смотри Историю про Колебания и Волны.

А физика классической механики говорит, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся со скоростью по отношению к первой, достаточно применить простейшие линейные преобразования (называемые *преобразования Галилея* - смотри ниже) для подсчета скорости объекта в новой системе отсчета. И ни о каком постоянстве скорости в разных системах отсчета речи быть не может. Проблема, однако!

Это второе "облачко" в 1905 году разогнал Альберт Эйнштейн, перевернув наши представления о времени и пространстве.

Мы начинаем разговор о Теории Относительности. Она состоит из двух частей: *Специальная теория относительности* (СТО) и *Общая Теория Относительности* (ОТО) (теория гравитации). Обе эти теории необычайно изящны, логичны и стройны. Математический аппарат СТО весьма прост. Математический аппарат ОТО - риманова геометрия искривленных пространств и тензорное исчисление. Мы к этому дремучему лесу даже подходить не будем. Но и без математики можно рассказать о совершенно новых представлениях о пространстве и времени, которые дает Теория Относительности. Как говорил один известный физик: "Плох тот учёный, который не может объяснить свою теорию восьмилетнему ребенку". Многие считают, что Теория Относительности - последняя большая физическая теория, которую можно объяснить непосвященному. Квантовая механика, квантовая электродинамика, теория струн и пр. - уже из разряда теорий "знаем, но не понимаем".

➔ Специальная Теория Относительности (СТО)

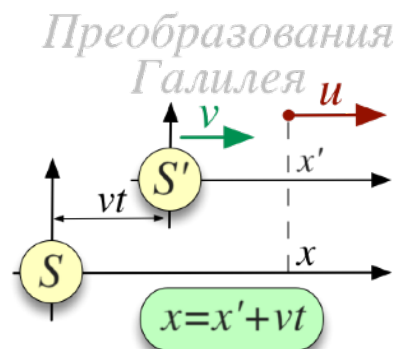
Сейчас мы расскажем о том, почему потребовалось заменить классическую механику Ньютона на теорию относительности. Но это ни в коей мере не означает, что мы будем пинать гения Ньютона и говорить как плоха его физика. Упаси, Боже! Ньютон - гений. Более двухсот лет назад он построил здание классической механики. Оно верой и правдой служило людям. Просто это естественный процесс человеческого умственного движения вперед - новые теории уточняют и расширяют (порой весьма радикально) старые. Вполне возможно, что через какое-то время новая молодая дерзкая теория "поглотит" и эйнштейновскую.

Основные принципы классической механики Ньютона, которые заставили задуматься Эйнштейна:

- **Принцип относительности Галилея:** Физические процессы в инерциальных системах отсчёта протекают одинаково, независимо от того, неподвижна ли система или она находится в состоянии равномерного и прямолинейного движения. Этот принцип был сформулирован для классической механики (это и понятно - других разделов физики практически не существовало в 17-м веке).
- В Законе Всемирного Тяготения Ньютон не объяснил "механизм" гравитации. Он указал лишь формулу.
- Он признал гравитацию "дальнодействием" (силой, действующей на расстоянии), но не дал объяснений этому.
- Гравитационные взаимодействия в законе всемирного тяготения Ньютона происходят мгновенно.

Все расчётные формулы классической механики Ньютона базируются на так называемых **преобразованиях Галилея**: формулах пересчёта координат и скоростей тела в различных инерциальных системах отсчёта (ИСО). Эти формулы просты и очевидны для нашего житейского опыта. Вот суть.

Пусть у нас есть две ИСО: S и S' . ИСО S' движется относительно ИСО S с постоянной скоростью v вдоль оси x (для простоты понимания). В начальный момент времени $t = 0$ начала координат обеих ИСО совпадают. Тело движется с постоянной скоростью u относительно ИСО S' вдоль оси x' .



Преобразования Галилея имеют вид:

- $x = x' + vt$ - для пересчёта координат тела;
- $V = v + u$ - для пересчёта скорости тела (V - скорость тела в ИСО S);
- $t = t'$ - время в обеих ИСО течёт одинаково (во времена Галилея и Ньютона никто и не задумывался, что может быть иначе, однако для общности формул добавили и эту).

Всё стройненько и логичненько.

➔ Эйнштейн построил СТО на двух постулатах.

Постулат №1. *Скорость света постоянна, она не зависит от движения ни источника, ни приемника.*

Эйнштейн знал об опытах по измерению скорости света. Он постулировал факт. "Так устроен наш мир. Скорость света в нем постоянна. Приговор окончательный!" Собственно, именно этот постулат и "обрушил" механику Ньютона. Вот ещё какое соображение следует иметь в виду. Скорость есть расстояние, деленное на промежуток времени. Расстояние - это характеристика пространства; промежуток - характеристика времени. Поэтому скорость связывает понятия пространства и времени. Постоянство величины скорости света как связки пространства и времени ведет к пересмотру общих представлений о них.

Свет в классической электродинамике рассматривается как электромагнитная волна. Современная физика (квантовая механика) трактует свет как поток фотонов. **Фотон** - квант (минимальная величина) электромагнитной энергии - элементарная безмассовая частица, заряд её равен нулю, **движется только со скоростью света**. Классическая и квантовая трактовки не противоречат друг другу.

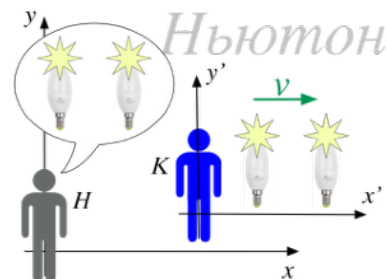
Постулат №2. *Принцип относительности Эйнштейна: Законы физики, каковы бы они ни были, должны быть абсолютно одинаковы для всех наблюдателей, совершающих равномерное и прямолинейное движение.*

Если принцип относительности Галилея был сформулирован только для классической механики, то принцип относительности Эйнштейна касается всех физических процессов происходящих в природе. Принцип относительности Галилея является частным случаем принципа относительности Эйнштейна. Любое свободное движение относительно, говорит Эйнштейн, оно приобретает смысл только **при сравнении** с другими объектами или наблюдателями, которые также совершают свободное движение. У вас нет возможности определить состояние вашего движения без прямого или косвенного сравнения с каким-либо внешним телом. Понятия "абсолютного" равномерного движения попросту не существует.

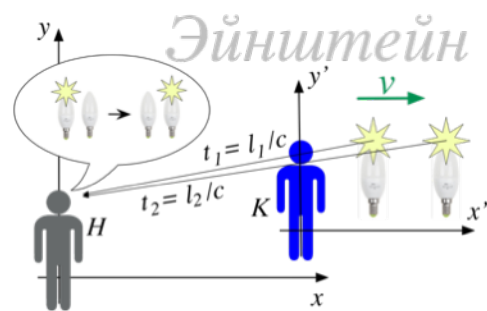
Ни сами наблюдатели, ни проводимые ими эксперименты не будут подвержены никакому влиянию, то есть не будут зависеть от равномерного движения. Это устанавливает полную симметрию между такими наблюдателями. Движение с постоянной скоростью относительно, а движение с ускорением - нет.

Давайте посмотрим над чем задумывался Эйнштейн. Пусть у нас есть неподвижная⁷ система отсчета, связанная с наблюдателем **H** и движущаяся со скоростью v относительно **H** система отсчета, связанная с космонавтом **K**. Космонавт **K** проводит опыт: **одновременно** включает на очень короткое время две лампочки.

С точки зрения ньютоновской механики одновременно включенные космонавтом **K** лампочки будут восприниматься наблюдателем **H** **тоже как одновременно включенные**. Ньютоновская механика особо не задумывалась над одновременностью в разных системах отсчета, не придавая ей особого значения.



А Эйнштейн взглянул на это по-другому. Для космонавта **K** эти лампочки зажглись одновременно. Но информация о времени зажигания той или другой лампочки до наблюдателя **H** доходит не мгновенно: луч света от зажженной лампочки должен преодолеть расстояние до глаза наблюдателя, после чего **H** сделает вывод о том, что лампочка зажглась. Но пути от лампочек до глаза наблюдателя разные (лампочки разнесены в пространстве), поэтому свету от каждой из лампочек потребуется разное время для достижения глаза наблюдателя **H**. А поскольку путь от левой лампочки до глаза короче, чем от правой, то **H** сначала увидит зажженную левую лампочку, а потом (когда левая погаснет - ведь **K** зажигает их на очень короткое время) - правую. **То есть событие (зажигание правой и левой лампочек) будет одновременным для K и не будет одновременным для H!** Опаньки!



Понятие одновременности становится относительным.

Более того, время между событиями (зажиганиями правой и левой лампочек) для **K** будет равно нулю ($\Delta t' = 0$), а для **H** будет равно $\Delta t = t_2 - t_1 \neq 0$. Из этого Эйнштейн заключил и аргументировал, что и **время для космонавта K и наблюдателя H будет течь по-разному**. А именно: (смотри формулу), где τ - промежуток времени между событиями, произошедшими в системе отсчета космонавта **K**, как его воспринимает наблюдатель **H**, τ_0 - промежуток времени между событиями, произошедшими в системе отсчета космонавта **K**, как его воспринимает сам космонавт **K**, v - скорость движения системы отсчета космонавта **K** относительно системы отсчета наблюдателя **H**, c - скорость света.

То есть наблюдатель H будет видеть, что часы космонавта K идут медленнее. А космонавт K будет воспринимать ход своих часов как нормальный. Это очень важное замечание.

Время в движущейся системе **для неподвижного наблюдателя** течет медленнее. Для космонавта в этой движущейся системе оно течет естественно.

⁷ "Неподвижная" - это условное название. Конечно, система отсчета наблюдателя H может двигаться относительно какой-либо другой системы отсчета, но в рамках нашего эксперимента это не имеет значения. А "неподвижная" в данном случае имеет тот смысл, что именно относительно неё отсчитывается скорость движения системы отсчета космонавта K.



"Стоп-стоп-стоп!" - скажет вдумчивый ученик. Поскольку все равномерно движущиеся системы отсчета **равноправны и симметричны**, скажет он, то почему в нашем эксперименте не трактовать наблюдателя ***H*** движущимся со скоростью $-v$ относительно космонавта ***K***. И тогда часы наблюдателя ***H*** будут идти медленнее часов космонавта ***K***. Получается, что из-за разницы трактовки кто относительно кого движется мы пришли к совершенно противоположным результатам?! Где истина? Хорошее замечание, вдумчивый ученик.

А истина здесь в кажущихся на первый взгляд маловажных деталях. **Чтобы сравнить часы, их надо поместить в одну систему отсчета и поставить рядом.** В действительности именно в этом суть дела. А чтобы их поставить рядом, космонавт ***K*** должен затормозить, то есть испытать ускорение. А это тут же делает системы отсчета наблюдателя ***H*** и космонавта ***K*** несимметричными. До тех пор, пока наблюдатель ***H*** или космонавт ***K*** не испытают ускорения, их точки зрения будут совершенно равнообоснованы. Каким бы парадоксальным это ни казалось, они поймут, что каждый имеет полное право считать, что часы другого идут медленнее.

В движущейся системе для неподвижного наблюдателя не только время течет медленнее. Для него и **все физические процессы проходят медленнее.**

Вот хорошая иллюстрация замедления времени. Есть такая частица - мюон. У неё отрицательный заряд и она в 207 раз тяжелее электрона. Средняя продолжительность его жизни в состоянии покоя - $2,2 \cdot 10^{-6}$ с - то есть порядка двух микросекунд. Через это время мюон распадается на другие частицы. Мюоны часто встречаются в космических лучах, мчащихся к Земле с околосветовой скоростью (≈ 298.000 км/с). При этом время жизни таких "космических" мюонов увеличивается в 9 раз. Объяснение этому эффекту дает СТО: сам мчащийся мюон в своей системе отсчета проживает те же две микросекунды, но в нашей неподвижной системе отсчета это воспринимается как в девять раз дольше.

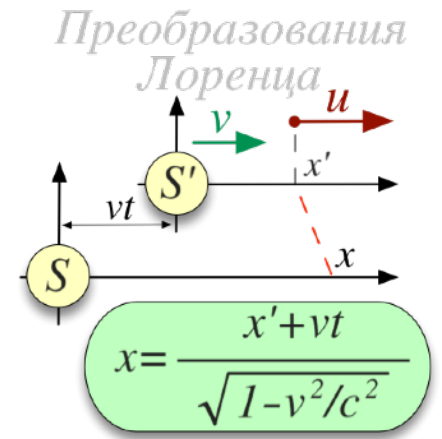
Небольшое историческое отступление. Опыты, показавшие постоянство скорости света вне зависимости от скорости движения приёмника, были проведены Майкельсоном и Морли в 1887 году. С этого времени многие учёные начали думать над этой загадкой. Стоит отметить двоих: голландца **Хендрика Лоренца** (тот самый, именем которого названа сила Лоренца) и француза **Анри Пуанкаре**.

Лоренц предложил такую математическую систему преобразований координат и скоростей тел в разных ИСО, которая:

- отражает постоянство скорости света в разных ИСО;
- при малых скоростях принимает вид классических преобразований Галилея.

Вот суть **преобразований Лоренца**.

Пусть у нас есть две ИСО: S и S' . ИСО S' движется относительно ИСО S с постоянной скоростью v вдоль оси x (для простоты понимания). В начальный момент времени $t = 0$ начала координат обеих ИСО совпадают. Тело движется с постоянной скоростью u относительно ИСО S' вдоль оси x' .



Преобразования Лоренца имеют вид:

- $x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ - для пересчёта координат тела;
- $V = \frac{u + v}{1 + \frac{v}{c^2}u}$ - для пересчёта скорости тела (V - скорость тела в ИСО S);
- $t = \frac{t' + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ - время в обеих ИСО течёт по-разному.

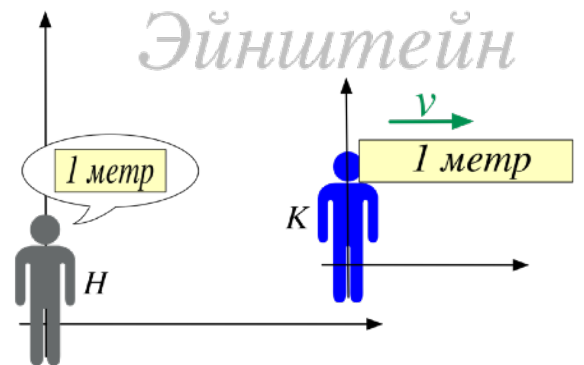
Да, формулы преобразований Лоренца значительно сложнее математически простых линейных формул преобразований Галилея. Но и физический их смысл гораздо глубже.

Из вида формул преобразований Лоренца следует, что:

- $v \leq c$ всегда;
- если положить $v = u = c/2$, получим $V = 4c/5$, а не $V = c$ как при преобразованиях Галилея;
- при $v \ll c$ преобразования Лоренца превращаются в преобразования Галилея.

Эйнштейн в полной мере использовал преобразования Лоренца в выстраивании СТО. Но это ещё не все удивительные эффекты СТО.

Эйнштейн обосновал, что для наблюдателя H все объекты в движущейся системе космонавта K будут **сокращаться в линейных размерах** вдоль линии скорости движения. (А для космонавта K ничто не изменится: метр как был метром на Земле, так метром и остался.)



И формула похожа на предыдущую: $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$,

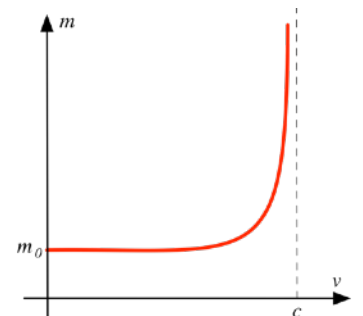
где l - длина, измеряемая неподвижным наблюдателем, l_0 - длина в движущейся системе отсчета. Наблюдатель H видит пролетающего мимо него космонавта K "сплюснутым" по направлению движения.

И ещё. Для неподвижного наблюдателя H будет **возрастать масса** тела в движущейся системе космонавта K . Для космонавта K ничто не изменится.

K .

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

m - масса тела в неподвижной системе отсчета,
 m_0 - масса тела в движущейся системе космонавта



Ой! На графике зависимости массы тела от его скорости видно, что при приближении скорости тела v к световой масса тела стремится к бесконечности. Это поразительный вывод. Представьте, что в лабораторном ускорителе мы пытаемся разогнать знакомый нам мюон до максимально большой скорости. При $v = 298.000$ км/с (99.333% от световой) его масса возрастет в 9 раз. При $v = 299.999,85$ км/с (99.99995% от световой) - в 1000 раз. Но чем больше масса объекта, тем труднее увеличить его скорость. Поэтому, чем быстрее движется мюон, тем труднее увеличить его скорость. При скорости в 99,99999999 % от световой масса мюона возрастет более чем 70.000 раз. Поскольку масса мюона неограниченно возрастает при приближении его скорости к скорости света, потребуется затратить бесконечно большое количество энергии, чтобы он достиг или преодолел световой барьер. Это, конечно, невозможно, и поэтому **ничто не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света**.

В этом и заключается один из важнейших выводов СТО:

Скорость света - это предел, выше которого ни одно материальное тело двигаться не может. Этот предел относится не только к материальным телам, но также к сигналам и возмущениям любого рода. **Не существует способа передать информацию или возмущение из одного места в другое со скоростью, превышающей скорость света.**

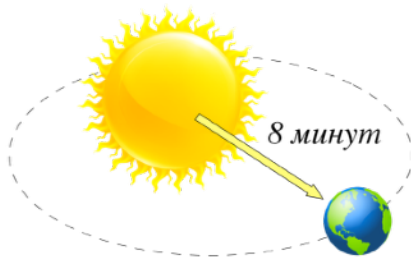
Поясню: **передача информации** - это всегда **изменение состояния** чего-либо: нулями и единичками азбуки Морзе разведчики передавали в эфир свои шифровки, электромагнитная волна радио-сигнала музыкальной станции содержит в себе форму аудио голоса певца и т.д. Под **возмущением** понимается изменение какой-нибудь характеристики среды и распространение этого изменения в пространстве.



Вид аудио-сигнала

А тогда мы приходим ещё к одному важному выводу:

гравитационное воздействие распространяется со скоростью света!



Вот хорошая иллюстрация этого факта. Свет от Солнца до Земли летит восемь минут. Если предположить, что какой-нибудь галактический крокодил проглотит Солнце (как в стихах у Чуковского) и быстренько куда-нибудь исчезнет, то мы лишь через восемь минут заметим,



что на небе нет Солнца. И через те же восемь минут Земля почувствует отсутствие гравитационного притяжения и, сорвавшись с орбиты, помчится по прямой.

Столько всего нового и неожиданного! Давайте подведём **промежуточные итоги**.

1. Для неподвижного наблюдателя H , смотрящего на движущегося космонавта K :
 - одновременные для K события не будут одновременными для H ;
 - время космонавта K будет течь медленнее;
 - размеры вдоль линии скорости объектов космонавта K будут сокращаться;
 - масса объектов космонавта K будет увеличиваться.
2. Для космонавта K ничего не изменится.
3. Скорость света - это максимально возможная скорость для материальных тел, сигналов, возмущений и передачи информации.
4. Гравитация распространяется со скоростью света.

Чтоб немного перевести дух от головокружительных новостей из огорода СТО, приведу ещё пару замечательных высказываний Эйнштейна.

Все с детства знают, что то-то и то-то невозможно. Но всегда находится невежда, который этого не знает. Он-то и делает открытие.

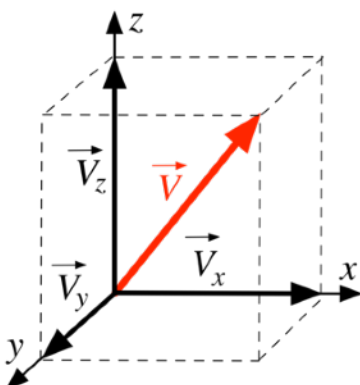
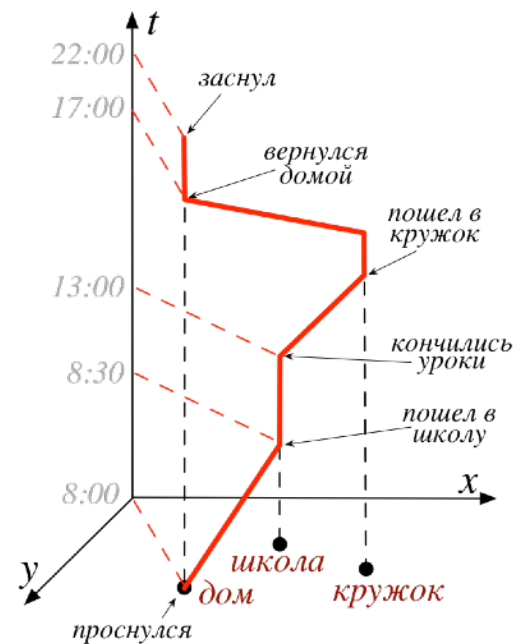
Самое непостижимое в этом мире - это то, что он постижим!

➔ А теперь поговорим о том, что нового СТО принесла во взгляды на **пространство и время**.

Ньютоновская механика рассматривала пространство и время как универсальные вместилища, обладающие отношениями порядка и существующие **независимо** как друг от друга, так и от материальных тел. Пространство и время, по Ньютону, - это статическая сцена, на которой разворачивается физическая картина мира.

Как мы говорили ранее, скорость связывает понятия пространства и времени. Постулат постоянства скорости света привел к замене традиционного представления о пространстве и времени как о неизменных и объективных величинах новым понятием, где пространство и время неразрывно зависят от относительного движения наблюдателя и объекта наблюдения.

Когда мы назначаем свидание девушке (юноше), мы говорим адрес и время. По сути любое событие характеризуется четырьмя координатами (три координаты точки в пространстве + время). И в этом смысле мы живем в четырехмерном мире. Вот на рисунке я показал типичный день жизни школьника в четырехмерном мире (понятно, что на плоскости рисунка можно наглядно представить максимум трехмерное пространство, да и "дом-школа-кружок" имеют одинаковую вертикальную координату - поэтому на рисунке две координаты пространства + координата времени). Красная линия называется **мировой линией**. **Мировая линия** - это геометрическое место всех событий существования тела в пространстве-времени. И эта мировая линия показывает все события дня школьника с привязкой "где-когда". По оси времени эта линия стремится вверх в соответствии с непрерывностью и равномерностью хода времени. *Даже если мы стоим на месте (не изменяем своих пространственных координат), мы всё равно движемся по оси времени.* Такими мировыми линиями можно описать, например, жизнь каждого из нас.

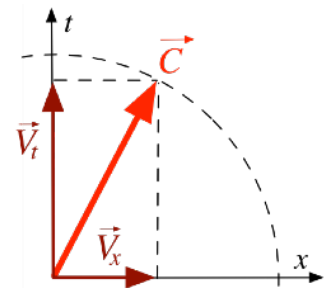
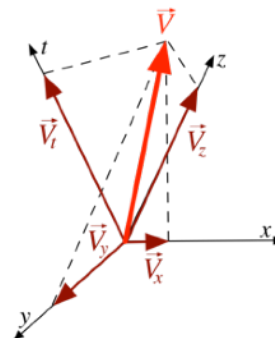


Понятие движения в пространстве приходит в нашу жизнь естественно и очень рано. Но чуть подумав, мы согласимся с тем, что мы движемся и во времени тоже. Причем постоянно. На самом деле, если ещё чуть подумать, большая часть перемещения обычных тел происходит как раз во времени, а не в пространстве.

Напомню также, что движение тела в трехмерном пространстве мы умеем разделять по трем измерениям отдельно - на рисунке вектор скорости тела раскладывается по трем осям - ничего нового.

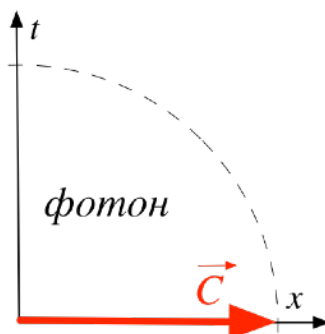
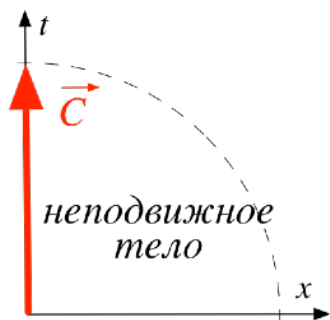
Эйнштейн обнаружил, что точно та же идея - разделение движения между различными измерениями - лежит в основе всех замечательных физических проявлений СТО, если только мы осознаем, что движение тела распределяется не только между пространственными измерениями, но что временное измерение также может принимать участие в этом разделении.

Вот на рисунке я попытался изобразить разложение движения (вектора скорости) в четырехмерном пространстве-времени. Не уверен, что это очень наглядно, однако смысл понятен: в четырехмерном пространстве-времени вектор скорости тела можно разложить на четыре независимые составляющие: три по осям координат и одну по оси времени.



Когда тело движется в пространстве относительно нас, его часы идут медленнее по сравнению с нашими - скорость его движения во времени замедляется. Эйнштейн провозгласил, что *все объекты во Вселенной всегда движутся в пространстве-времени с одной постоянной скоростью - скоростью света*. Мы говорим о *суммарной скорости* тел во всех четырех измерениях.

Если тело не движется в пространстве, то все движение тела приходится на перемещение во временном измерении. Однако если тело движется в пространстве, это означает, что часть его движения во времени будет отвлечена. Время замедляется, когда тело движется относительно нас потому, что оно отвлекает часть своего движения во времени на движение в пространстве.



показана только одна пространственная координата x

Отсюда немедленно следует факт существования ограничения на скорость тела в пространстве: максимально возможная скорость движения в пространстве будет достигнута, если все движение тела во времени перейдет в движение в пространстве. У тела, перемещающегося в пространстве со скоростью света, не остается скорости на движение во времени. Ход времени останавливается по достижении скорости света. Поэтому фотоны никогда не стареют - они движутся со скоростью света и их время остановилось.

И из вышеприведенных заключений Эйнштейн вывел свою знаменитую формулу для энергии покоя: $E = m \cdot c^2$. E - энергия покоя - это энергия, которой обладает тело просто потому, что у него есть масса. Нет никаких кинетических энергий (тело покоится), никаких потенциальных. Коль у тела есть масса, то в нем запасена такая энергия. Так просто, но так глубоко!

Но эту энергию можно из тела высвободить и масса перейдет в энергию (что и происходит, например, при взрыве атомных бомб - правда при этом лишь небольшая часть массы урана-плутония (около 5%) переходит в энергию взрыва). 1 килограмм *любого* вещества

содержит энергию в $9 \cdot 10^{16}$ джоулей, что эквивалентно энергии взрыва атомной бомбы в **215 мегатонн!!!**

Заканчивая рассказ о СТО, надо упомянуть, что и классическая электродинамика получила от Эйнштейна серьёзные уточнения. Такие, что стала называться **релятивистской электродинамикой**. Но мы уж об этом говорить не будем.

И уж под занавес можно дать определение:

Специальная теория относительности (СТО) - теория, описывающая движение, законы механики и пространственно-временные отношения при произвольных **ПОСТОЯННЫХ** скоростях движения, в том числе близких к скорости света. **В рамках СТО классическая механика Ньютона является приближением для малых скоростей.**

Основным отличием СТО от классической механики является зависимость пространственных и временных характеристик от скорости. Описываемые СТО отклонения в протекании физических процессов от предсказаний классической механики называют **релятивистскими** эффектами (от английского *relativity* - относительность), а скорости, при которых такие эффекты становятся существенными, - релятивистскими скоростями.

=====

Прости меня, Ньютон!
А. Эйнштейн

➔ Чуть-чуть об искривленных пространствах

Перед тем, как начать разговор об Общей Теории Относительности, поговорим об искривленных пространствах. Это нам пригодится в дальнейшем.

Любая наука строится на аксиомах (постулатах). Аксиома - это утверждение, не требующее доказательств. Потом появляются теоремы, требующие строгого и логичного доказательства.

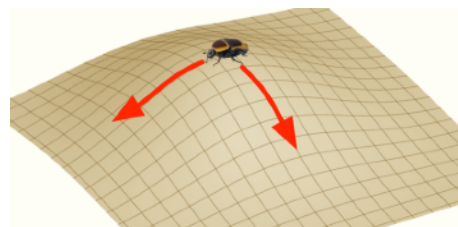
В III-м до нашей эры древнегреческий математик Евклид предложил пять аксиом, на которых должна строиться геометрия (я их приведу в упрощенной формулировке):

1. Между двумя точками всегда можно провести прямую.
2. Прямую всегда можно непрерывно продолжать.
3. Из всякого центра всяким радиусом может быть построена окружность.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Сумма углов любого треугольника равна 180^0 .

С первыми четырьмя аксиомами всё понятно. В той или иной формулировке они входят в аксиоматику современной геометрии. А вот пятая аксиома уж больно похожа на теорему, которую надо доказать. На протяжении двух тысяч лет эта аксиома не давала покоя математикам. Её пытались доказать, её пытались опровергнуть, несчетное число раз измерялись углы треугольников самых больших размеров.

Все мы привыкли к тому, что нас окружает **трехмерное пространство**. Что значит трехмерное? Это значит, что надо **всего лишь три числа** - три координаты - чтобы точно определить положение любой точки в пространстве относительно выбранного начала отсчета. Это интуитивно понятно.

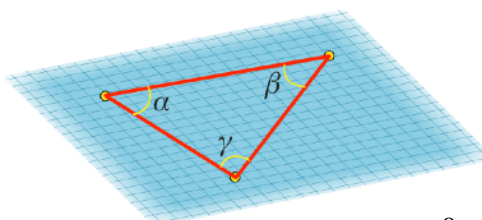
В дальнейшем в рассуждениях и на картинках в целях наглядности я буду говорить-изображать двумерные пространства - поверхности. Представьте, что мы живем в таком двумерном пространстве. Мы как жуки на искривленной (а может быть и не искривлённой) поверхности: у нас есть только два независимых направления перемещения. Ни поднырнуть, ни подпрыгнуть мы не можем. Так вот вопрос: **как узнать - плоский или искривлённый наш мир - поверхность?**



Шустрый школьник тут же выдаст: "Надо придавить кусок такой поверхности ладошкой (или прямой линейкой) к столу, и, если не будет ни выпуклостей, ни вогнутостей, то поверхность - плоская!" Браво, шустрый школьник! Ответ быстрый, но неверный. Твой ответ, шустрый школьник, подразумевает, что мы находимся в трехмерном мире, где можно прижимать ладошкой или прикладывать линейку, проверяя двумерный мир. Но вопрос был поставлен по-другому: как нам, жителям-жукам двумерного мира, узнать - плоский или искривлённый наш мир-поверхность? Шустрый школьник почесал макушку.

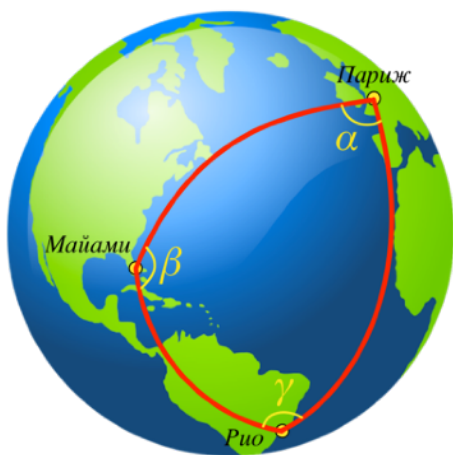
А ответ такой: надо построить в нашем мире треугольник (а это мы-жуки сделать сможем) и посчитать сумму его углов. Если сумма углов любого построенного нами треугольника (а для проверки построить их надо много) равна 180^0 , то тогда наш мир - плоский. Как мы строим: отмечаем три точки и соединяем их прямыми отрезками. Ой, а что такое прямой отрезок? А прямой отрезок - это кратчайшее расстояние между соединяемыми точками. Понятно. Итак, явный признак **плоской поверхности**:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$



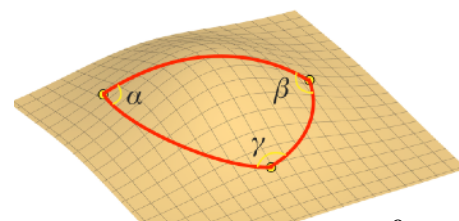
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

Давайте на секундочку вернемся в трехмерный мир на нашу Землю.



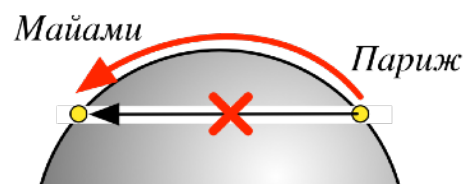
Строим треугольник на поверхности Земли вот таким чудным способом: даём летчику задание - стартуешь на самолете из Парижа, летишь низенько-низенько строго по компасу в направлении на Майами, потом летишь низенько-низенько строго по компасу в направлении на Рио-де-Жанейро, а потом низенько-низенько строго по компасу возвращаешься в Париж. В Париже, Майами и Рио-де-Жанейро точно замеряешь углы между линиями прилета и отлета. Докладываешь нам. Лётчик исполнил и доложил.

Зная, что поверхность Земли в грубом приближении можно рассматривать как сферу, спрошу: будет ли сумма углов $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$? Я думаю, что ответ вы сами знаете: сумма углов будет больше 180^0 . Это явный признак **выпуклых поверхностей**. А поверхность Земли для нас - выпуклая поверхность. А расстояния, проделанные лётчиком Париж-Майами, Майами-Рио и Рио-Париж - это **минимальные расстояния** между этими городами по поверхности Земли. Туннели мы не копаем - это был бы выход с двумерной поверхности Земли в третье измерение.



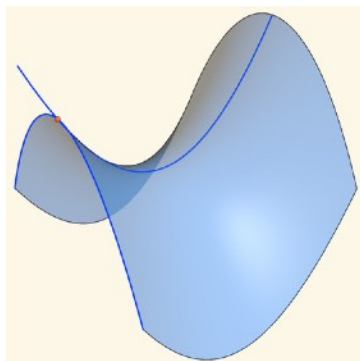
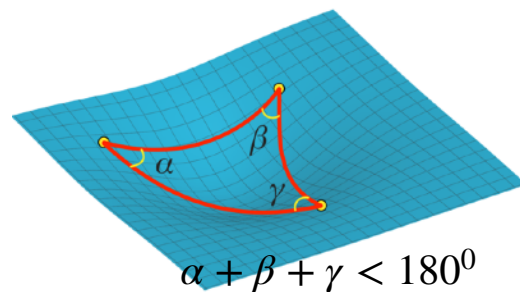
$$\alpha + \beta + \gamma > 180^0$$

Зная, что поверхность Земли в грубом приближении можно рассматривать как сферу, спрошу: будет ли сумма углов $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$? Я думаю, что ответ вы сами знаете: сумма углов будет больше 180^0 . Это явный признак **выпуклых поверхностей**. А поверхность Земли для нас - выпуклая поверхность. А расстояния, проделанные лётчиком Париж-Майами, Майами-Рио и Рио-Париж - это **минимальные расстояния** между этими городами по поверхности Земли. Туннели мы не копаем - это был бы выход с двумерной поверхности Земли в третье измерение.



Ну и, соответственно, для **вогнутых поверхностей**:
 $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.

Говорят также, что у плоской поверхности **нулевая кривизна**, у выпуклой поверхности - **положительная кривизна**, а у вогнутой поверхности - **отрицательная кривизна**. То есть поверхность имеет свою кривизну.



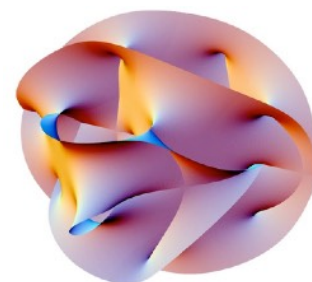
Итак, мы взглянули на плоские, выпуклые и вогнутые поверхности. Но поверхности могут быть и другими, например, выпукло-вогнутые - типа седла.

Мы представляем себе двумерное пространство-плоскость, наше трехмерное пространство. Когда мы говорили о СТО, то мы рассматривали четырехмерное пространство-время. Математики и физики оперируют понятиями пространств и более высоких размерностей. Это трудно представить, но математически и физически имеет право на существование. Как двумерное

пространство-поверхность имеет свою кривизну (может быть плоским, выпуклым, вогнутым, комбинированным), так и **пространства произвольных размерностей могут иметь свою кривизну (быть плоскими, выпуклыми, вогнутыми, комбинированными)**.

И в копилочку определений: **Геодезические линии** - это линии, являющимися кратчайшими путями между двумя точками. Об этом мы говорили.

Теория струн, современный перспективный раздел физики, пытающийся объединить общую теорию относительности и квантовую механику, говорит, что на микро-микро-уровне наше пространство одиннадцатимерно со многими видами кривизны. Другое дело, говорят физики-струнники, что восемь из этих одиннадцати измерений являются "свёрнутыми" для глаза макро-наблюдателя. Вот как они это видят на картинке. Ну не чудо ли?!



Теорию искривленных пространств разрабатывали Янош Бояи, Карл-Фридрих Гаусс, Николай Иванович Лобачевский. Окончательно оформил эту теорию в **дифференциальную геометрию искривленных пространств** немецкий математик **Бернхард Риман** в 60-х годах 19-го века.

➔ Общая Теория Относительности (ОТО)

Меня всегда зачаровывало то, как, исходя из двух простых постулатов, с помощью безукоризненной логики и полноты рассмотрения физической картины, Эйнштейн сформулировал в СТО свои выводы. Поэтому, следуя за его рассуждениями, так просто и понятно получается рассказывать о Теории Относительности вам. Формулы, как результат рассуждений, в теории появляются позже.

В СТО Эйнштейн разрешил конфликт между накопленными за века интуитивными представлениями о движении и постоянством скорости света. Он показал, что наша интуиция имеет изъяны - она срывает при скоростях, которые обычно чрезвычайно малы по сравнению со скоростью света и поэтому скрывают истинную суть.



СТО рассматривает движение только с постоянными скоростями. Но в замке классической механики остались ещё две невзятые башни: движение с ускорением и законы тяготения. Эйнштейн не был бы Эйнштейном, если бы не попытался взять и их. И в 1915 году он сделал это - сформулировал Общую Теорию Относительности (ОТО).

И начал Эйнштейн с того, что, как и в случае с СТО, ввел **два постулата**, от которых и "начал плясать". (О постулатах ОТО я уже говорил в Истории о Силах.)

Давайте немного порассуждаем. Вот есть второй закон Ньютона: $F = ma$. В нём масса m выступает как **мера инертности** материального тела. А вот есть Закон Всемирного Тяготения: $F = G \frac{mM}{R^2}$. В нём масса m выступает как **мера гравитационного взаимодействия**. Внимание, вопрос! **А это одна и та же эта масса?** Неожиданно. Но если подумать, то вопрос не кажется таким уж наивным.

В первом случае масса появляется из закона, описывающего **результат** механического действия сил (причем, сил любой природы!) на материальные тела. И мера инертности проявляется как фундаментальное свойство тел пытаться сохранить свое состояние равномерного и прямолинейного движения. Во втором же случае масса появляется из закона, описывающего **отдельный вид силового взаимодействия** - гравитацию. И проявляется как другое фундаментальное свойство материальных тел - взаимно притягиваться.

То есть наш вопрос можно переформулировать так:
равна ли инертная масса гравитационной?



Никто до Эйнштейна не задумывался глубоко над этим вопросом. Классическая механика как бы подразумевала равенство этих масс и в своих уравнениях это использовала.

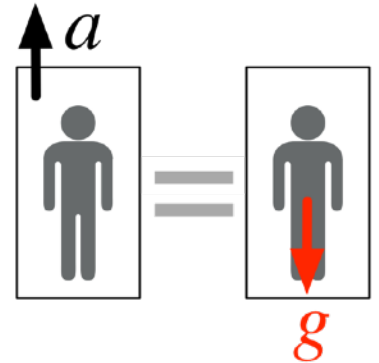
→ Постулаты ОТО

Первый постулат ОТО: инертная и гравитационная массы равны. К настоящему времени равенство инертной и гравитационной масс экспериментально подтверждено с относительной точностью 10^{-14} .

$$m_i = m_g$$

Второй постулат ОТО или ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ: все физические процессы в поле тяготения и в ускоренной системе отсчета без тяготения протекают одинаковым образом. Это - фундаментальный закон природы. Идею о том, что движение с ускорением и тяготение - неразличимы, Эйнштейн назвал "самой счастливой своей идеей". Второй постулат неразрывно связан с первым.

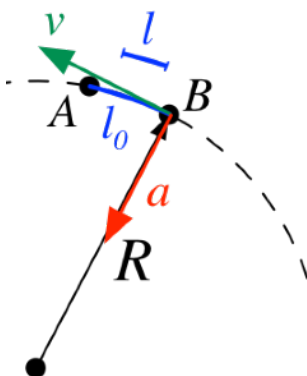
Иллюстрацией этого постулата является то, что, находясь внутри закрытой кабины лифта, невозможно определить, чем вызвана сила, действующая на тело: тем, что кабина движется с ускорением или гравитационным притяжением тела к Земле.



ОТО завершает работу, начатую в СТО. СТО провозглашает равноправие точек зрения наблюдателей: законы физики проявляются одинаковым образом для всех наблюдателей, находящихся в состоянии равномерного движения. Но это равноправие на самом деле является ограниченным, поскольку из него исключается число точек зрения наблюдателей, движущихся с ускорением.

Принцип эквивалентности показывает как уравнивать все точки зрения - и тех, кто движется с постоянной скоростью, и тех, кто ускоряется. А давайте, говорит принцип эквивалентности, коль движение с ускорением и гравитация эквивалентны, рассматривать тех, кто движется с ускорением, как неподвижных (или движущихся с постоянной скоростью), но подверженных воздействию соответствующим образом подобранной гравитационной силы. Это гарантирует нам, что все возможные точки зрения являются равноправными.

А коли, в соответствии с **первым постулатом**, инертная и гравитационная массы равны, то в уравнении для ускорения тела, на которое действуют лишь гравитационные силы, обе массы сокращаются (например, $m_i \cdot a = G \frac{m_g \cdot M}{R^2} \Rightarrow a = G \frac{M}{R^2}$). Поэтому ускорение тела, а следовательно, и его траектория не зависит от массы и внутреннего строения тела. Если же все тела в одной и той же точке пространства получают одинаковое ускорение, то это **ускорение можно связать не со свойствами тел, а со свойствами самого пространства в этой точке.**



Таким образом Эйнштейн стал думать о связи гравитационной силы (ускорения) со свойствами пространства.

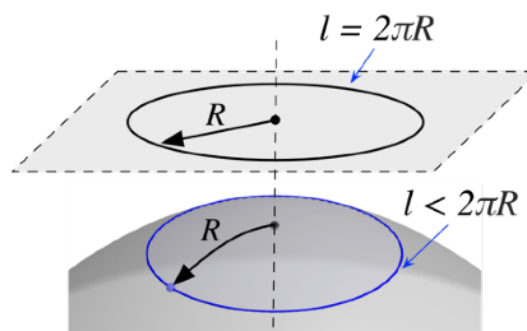
Рассмотрим вот такую ситуацию: плоский круг радиуса R вращается вокруг своей вертикальной оси. Точка B движется со скоростью v и на неё действует ускорение a (центростремительное). Длина окружности, которую описывает точка B в своём круговом движении, если не рассматривать никаких релятивистских эффектов движения, равна $2\pi R$.

А теперь вспоминаем об одном релятивистском эффекте СТО, о котором мы говорили выше: все объекты в движущейся системе *сокращаются в линейных размерах* вдоль линии

скорости движения: $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где l - длина в движущейся системе отсчета, l_0 - "неподвижная" длина.

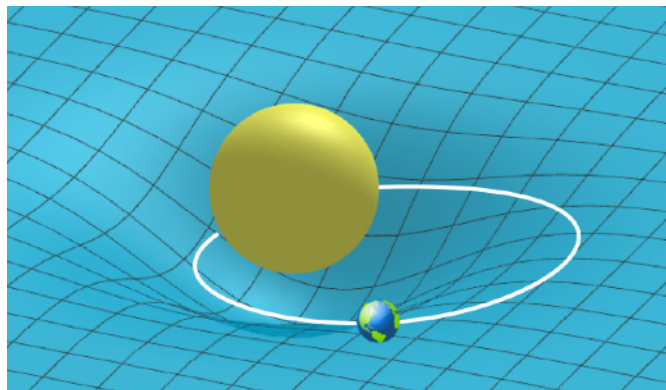
Если мы измерим расстояние между точкой B и рядом расположенной от неё точкой A сначала на неподвижном кругу - l_0 , а затем на вращающемся - l , то в соответствии с этим релятивистским эффектом окажется, что $l < l_0$. А если замерить все такие маленькие кусочки и сложить, то окажется, что длина окружности, которую описывает движущаяся точка B будет меньше длины внешней окружности неподвижного круга. Радиальные размеры круга сокращению не подвержены, поскольку перпендикулярны направлению скорости. Что же получается? Неподвижная окружность радиуса R и длины $2\pi R$ превратилась в движущуюся "окружность" (причем на все точки этой "окружности" действует ускорение) радиуса R и длины $< 2\pi R$.
Когда ж такое возможно?

А помните мы рассуждали об искривлённых поверхностях? Так вот длина окружности радиуса R на выпуклой (как на рисунке) или вогнутой поверхности и будет $< 2\pi R$.



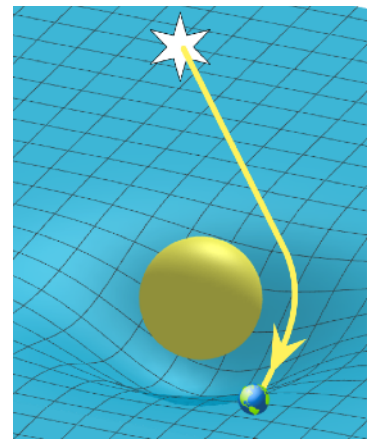
Главная идея Эйнштейна состоит в том, что *гравитация представляет собой искривление пространства и времени*. Что такое искривленное пространство мы обсуждали выше. Время искривлено, если скорость его хода изменяется от одной точки к другой. Любое тело, имеющее массу, искривляет пространство и время. Это искривление, в свою очередь, влияет на другие тела, которые теперь будут перемещаться по деформированному пространству. Если в пространстве нет массивных тел, то пространство будет плоским.

Полезная и часто используемая аналогия состоит в том, что структура пространства деформируется в присутствии массивных тел, таких как наше Солнце, подобно резиновой пленке, на которую положили шар для боулинга.



Если мы поместим на пленку шарик и придадим ему начальную скорость, его траектория будет зависеть от того, присутствует ли в центре пленки массивный шар для боулинга. Если шара для боулинга там нет, резиновая пленка будет плоской, и шарик будет двигаться по прямой. Если шар для боулинга присутствует, он будет искривлять пленку, и шарик будет двигаться по искривленной траектории. Если мы придадим шарiku соответствующую скорость и направим его в соответствующем направлении, он будет совершать периодическое движение вокруг шара для боулинга, то есть фактически "выйдет на орбиту". Земля остается на орбите вокруг Солнца потому, что катится по ложбине в искривленной структуре пространства. Земля, которая сама является массивным телом, тоже искривляет пространство, хотя и в гораздо меньшей степени, чем Солнце.

Тела движутся в пространстве-времени по кратчайшим возможным путям - **геодезическим линиям** - "путям наименьшего сопротивления". Если пространство искривлено, такие пути тоже будут искривленными. Свет от далёкой звезды тоже будет двигаться по геодезической линии и мы сможем, например, видеть звезду, которая находится "за Солнцем".



Как показал Эйнштейн, **кривизна пространства и есть тяготение**. Пространство реагирует искривлением на присутствие объекта, имеющего массу. Чем массивнее объект, тем сильнее он искривляет окружающее пространство. Кривизна пространства, созданная присутствием массивного объекта, уменьшается при увеличении расстояния от него. И чем сильнее будет искривлено пространство (чем сильнее тяготение), тем большим будет замедление хода времени.

Эйнштейн указал механизм, с помощью которого действует гравитация. Этим механизмом является кривизна пространства. Кривизна пространства и есть тяготение.

Когда слепой жучок ползёт по плоскости шара, он не замечает, что путь, который он проделывает, искривлён. Мне удалось это заметить.

А. Эйнштейн



ОТО - это геометрическая теория тяготения.

Отныне пространство и время нельзя более рассматривать как статичную сцену, на фоне которой разворачиваются события во Вселенной. Напротив, как показала СТО, а затем и ОТО, они принимают самое непосредственное участие в событиях.

Ну а дальше, после подобных довольно наглядных рассуждений, в бой пошла математика. Эйнштейн применил разработанную пол-века назад геометрию искривленных пространств Римана.

Уравнение гравитационного поля, связывающее между собой свойства искривленного пространства-времени со свойствами заполняющей его материи:

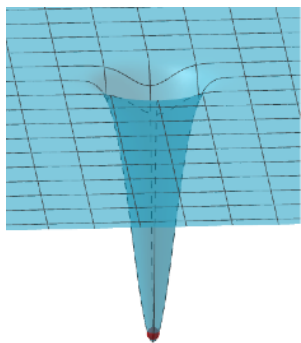
$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} \cdot g_{\mu\nu} + \Lambda \cdot g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}$$

Ой, какая красивая формула! Но страшная. Эта формула приведена здесь в компактной - тензорной - записи. Она раскладывается на систему из шести дифференциальных уравнений (так же, как и векторная формула второго закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ раскладывается на три уравнения в проекциях по осям). И решения этой системы уравнений будут описывать свойства искривленного пространства-времени.

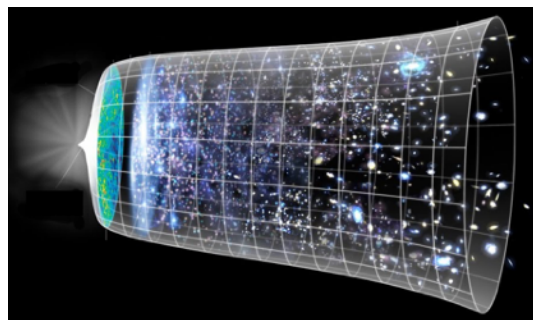
Уравнение гравитационного поля - универсально: его можно применить как к отдельному телу в пространстве, так и ко вселенной в целом. И что очень важно - **закон всемирного тяготения Ньютона вытекает из этого уравнения при допущении неискривляемости пространства-времени**.

После публикации ОТО в 1915 году физики-математики нашли несколько интересных решений уравнения гравитационного поля для разных случаев. Упомяну здесь о двух.

Немецкий математик **Карл Шварцшильд** рассмотрел гравитационное поле уединённого невращающегося и незаряженного массивного сферического тела. Из его решения уравнения гравитационного поля следует, что при определенной плотности и размерах, это тело так искривляет пространство, что из поля его тяготения не может выйти ничто - даже свет. Такие объекты называются **чёрными дырами**. Предсказанные Шварцшильдом в начале 20-го века чёрные дыры были обнаружены к концу 20-го века.



В 1922 году российский математик **Александр Фридман** опубликовал решение уравнения гравитационного поля для Вселенной в целом. Он пришел к выводу, что наша **Вселенная непрерывно расширяется**. Астрономические наблюдения подтвердили этот факт (так называемый **эффект красного смещения Хаббла**).



ОТО дала толчок бурному развитию **космологии**.

За прошедшие более ста лет ОТО была многократно проверена с наивысшей возможной точностью. А совсем недавно были обнаружены и предсказанные ОТО гравитационные волны - доходящая до нас "рябь" пространства от гигантских гравитационных событий (слияние чёрных дыр, взрывы сверхновых звёзд).

Никаким количеством экспериментов нельзя доказать теорию; но достаточно одного эксперимента, чтобы её опровергнуть.

А. Эйнштейн

Мы завершаем разговор о Теории Относительности. Вы, конечно, можете сказать: "Ну хорошо. Чёрные дыры, расширяющаяся Вселенная, искривление пространства-времени: всё это очень большое и далёкое. А к повседневной жизни Теория Относительности имеет какое-либо отношение?" Да, имеет. Вот, пожалуй, самый яркий пример.



Спутниковая навигация давно вошла в нашу жизнь. На каждом мобильном телефоне стоит программа-навигатор, позволяющая определить где вы находитесь и проложить маршрут до нужного вам места. И примеров использования спутниковой навигации масса. В настоящее время развернуты и работают две навигационные системы: американская GPS и российская ГЛОНАСС. Принципы их работы одинаковы.

Для определения точного местоположения необходим сигнал как минимум от четырёх спутников. Определение местоположения осуществляется путём измерения задержек времени приёма синхронизированного сигнала от спутников навигационным приёмником потребителя. По измеренным задержкам высчитываются координаты. То есть вопрос точности и синхронизации часов на спутниках является ключевым. На сегодняшний день



GPS даёт точность определения местоположения вплоть до сантиметров. Для достижения этого сигналы времени, поступающие со спутников, должны быть известны с точностью 20-30 наносекунд.

Но! Спутники вращаются по круговым орбитам радиуса 26.600 км со скоростью 3900 м/с. Из-за того, что спутники движутся, СТО говорит, что бортовые атомные часы на спутниках должны запаздывать по сравнению с земными примерно на 7 микросекунд в день из-за релятивистского замедления времени. Кроме того, спутники находятся на орбитах на большом расстоянии от Земли, где кривизна пространства-времени из-за массы Земли меньше, чем на земной поверхности. Согласно ОТО, часы на спутниках кажутся более быстрыми, чем аналогичные часы на земле. Расчеты показывают, что часы на каждом спутнике GPS должны спешить относительно земных на 45 микросекунд в день. Комбинация этих двух релятивистских эффектов означает, что часы на борту каждого спутника должны идти быстрее, чем аналогичные часы на земле примерно на 38 микросекунд в день! И эти эффекты приходится учитывать в расчетах.

Если бы эти эффекты не были приняты в расчет, то координаты, вычисленные на основе данных со спутников, **были бы неверными уже через две минуты**, а ошибки в глобальных местоположениях продолжали бы накапливаться со скоростью примерно 10 километров в день! Вся система была бы абсолютно непригодной для навигации через очень маленький промежуток времени. Вот вам и применение Теории Относительности в быту!



Эйнштейн совершил революцию в физике. Он перевернул наши представления о пространстве и времени. **Классическая механика стала частным случаем малых скоростей и плоских пространств.**

Но в то же время СТО и ОТО породили новую проблему.

Современная физика покоится на двух китах. Один из них - это Общая Теория Относительности, которая дает теоретическую основу для понимания вселенной в ее наиболее крупных масштабах - звезд, галактик, скоплений галактик. Другой кит - это квантовая механика, дающая теоретическую базу для понимания вселенной в ее наименьших масштабах - молекул, атомов и далее вглубь субатомных частиц, таких как электроны и кварки. За годы исследований физики с невообразимой точностью экспериментально подтвердили практически все предсказания каждой из этих теорий. Но использование этих теоретических средств с неизбежностью ведет еще к одному, обескураживающему выводу: **в своей современной формулировке Общая Теория Относительности и Квантовая Механика не могут быть справедливы одновременно.**



Воображение важнее, чем знания. Знания ограничены, тогда как воображение охватывает целый мир.

А. Эйнштейн

Как много мы знаем, и как мало мы понимаем.

А. Эйнштейн



