Приложение 2.

Конические сечения

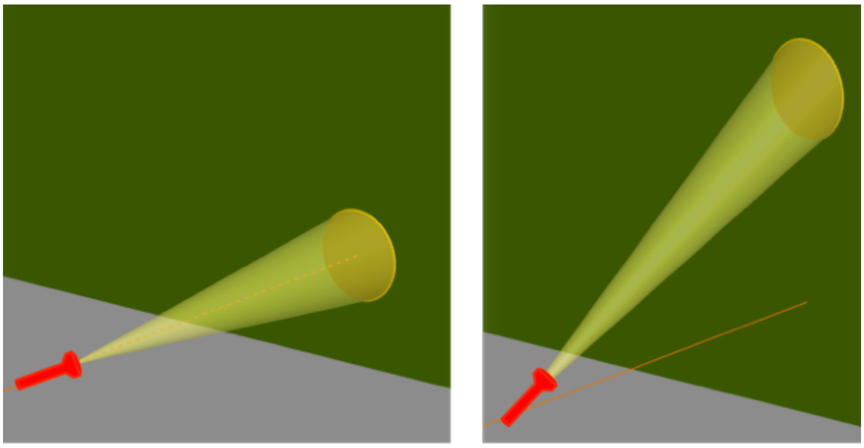
В этом приложении мы расскажем о кривых, с которыми вам постоянно приходится иметь дело в курсе школьной математики и физики.

Иллюминация планет слепит,
Мелькает всё зловещим светом,
Здесь лишь зима и нет здесь лета,
Есть эллипс сдвинутых орбит.

Геометрия - красивая наука! Если вы не согласны, то попробую вас переубедить.

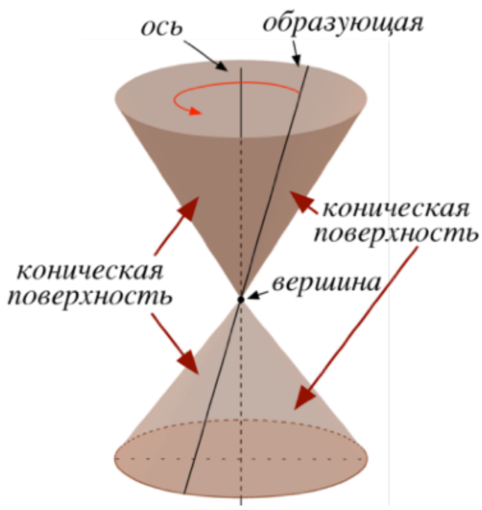
В школе вы изучали несколько замечательных кривых: окружность, эллипс (?), параболу, гиперболу. Но изучали их по отдельности, как будто они совсем не связаны друг с дружкой и друг про друга ничего не знают. Ан нет! Связаны, да ещё как! И связывает их всех конус! (Ух, сколько восклицательных знаков! Это от предчувствия красоты, которую я вам обещал.)

А давайте-ка проделаем простой эксперимент. Возьмем фонарик (не забудьте проверить батарейки!), дождемся вечерних сумерек и выйдем во двор. Подойдем к стене соседнего дома и включим фонарик. Сначала направим фонарик точно перпендикулярно стене. На



стене увидим световой круг от фонарика. Пол-эксперимента сделано! Теперь будем поднимать луч фонарика вверх. Круг на стене плавно превратится в вытянутый круг - эллипс, по-научному. Всё, смелый экспернимент закончен. За него, конечно, Нобелевскую премию вряд ли дадут. "Ну и чё?" - справедливо спросите вы. Не "чё", а вы уже немного познакомились с коническими сечениями.

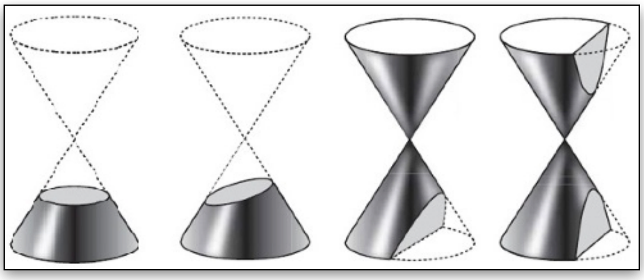
Давайте для начала определимся: что же такое конус (*строго говоря, конус - это объёмная фигура; мы же будем иметь дело с* ***конической поверхностью***). Пусть у нас есть прямая, назовем её "ось". На оси сидит точка - назовем её "вершина". Пусть у нас есть ещё одна прямая (у нас много чего есть), проходящая через вершину и не совпадающая с осью - назовем её "образующая". Образующая начинает вращаться вокруг оси. Так вот, поверхность, которую заметает (вполне себе научное слово; здесь можно было бы сказать "вычерчивает", но принято говорить "заметает") образующая, называется ***конической поверхностью***. Эта коническая поверхность бесконечна как вверх, так и вниз и состоит из двух половинок (полостей). Угол между образующей и осью определяет "пузатость" конической поверхности. *(Мы довольно весело дали это определение, но оно вполне строго математически.)*



Коническими сечениями называются линии, получающиеся от пересечения плоскости (называемой секущей плоскостью) с конической поверхностью.

Конические сечения - плоские линии. В зависимости от угла наклона секущей плоскости к оси (образующей) конической поверхности получаем четыре вида сечений. Случай, когда секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности и сечением является точка, является **вырожденным** (такое слово есть в математике - привыкайте).
Если секущая плоскость:

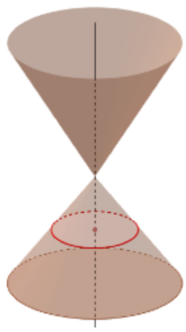
- перпендикулярна оси конической поверхности - получаем **окружность**;
- пересекает все образующие конической поверхности одной его полости - получаем **эллипс**;
- параллельна одной из образующих конической поверхности - получаем **параболу**;
- пересекает обе полости конуса - получаем **гиперболу**.



Окружность - Эллипс - Парабола - Гипербола

Вот она, связочка! Четыре, казалось бы, разные линии, а различие лишь в угле между секущей плоскостью и осью конической поверхности. Ведь красиво же!

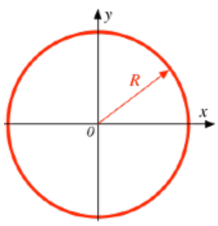
Ну давайте теперь знакомиться с каждой из них.
Да, чтоб не забыть! Введем-ка важное математическое (геометрическое) определение, которое в дальнейшем нам пригодится. Геометрическое место точек - *это фигура, состоящая из всех точек, имеющих некое одинаковое свойство.*



Окружность

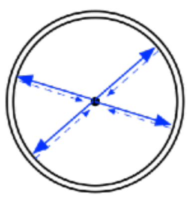
Окружность можно определить тремя способами:

1) как коническое сечение, при котором секущая плоскость перпендикулярна оси конической поверхности (об этом мы говорили выше);
2) как геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром окружности. Это определение задает способ построения - циркулем, веревочкой и т.п.
3) аналитически: в декартовой системе координат уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, где R - радиус окружности.



Некоторые свойства окружности

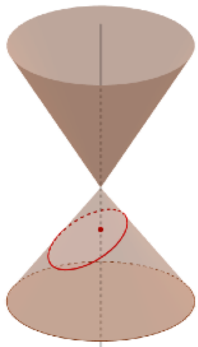
- Окружность - идеальная кривая: бесконечное количество осей симметрии (проходящих через её центр), при любых поворотах вокруг центра она переходит сама в себя. Все окружности подобны.
- Представьте себя стоящим в центре круговой комнаты. Если вы скажете что-нибудь, то звук вашего голоса достигнет стенки комнаты и, отразившись, вернется к вам в центр. Это акустическое свойство окружности использовали древние греки при строительстве своих амфитеатров.



- Ну а уж если говорить о колесе, то на нём построена вся человеческая цивилизация. Исчезни колесо из нашей жизни и мы снова вернемся в каменный век.

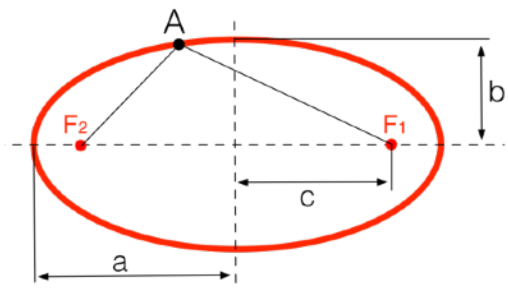
Эллипс

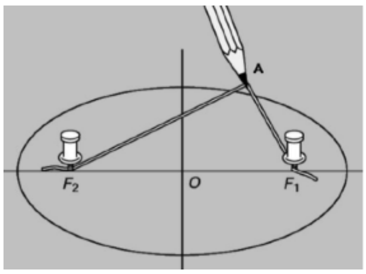
Эллипс не рассматривается в школьной математике. А жаль.



Эллипс тоже можно определить тремя способами:

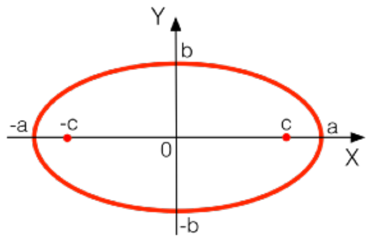
1) как коническое сечение, при котором секущая плоскость пересекает все образующие конической поверхности одной её полости;
2) как геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных (фокусов эллипса) постоянна и больше расстояния между фокусами. Это определение задает способ построения: втыкаем две кнопки в стол (эти точки и будут фокусами эллипса), связываем их веревочкой и чертим карандашом эллипс как показано на рисунке. Веревочка имеет постоянную длину, значит $F_1A=F_2A$.





a - большая полуось эллипса; b - малая полуось эллипса;
c - фокальное расстояние (половина расстояния между фокусами)

$$F_1A + F_2A = 2a; \quad c < a, \ b^2 + c^2 = a^2$$



3) аналитически: в декартовой системе координат уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b - полуоси эллипса (это уравнение называется **каноническим** уравнением эллипса).

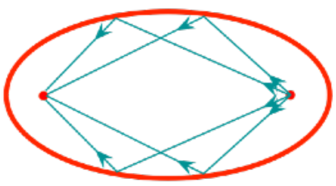
Соотношение величин полуосей определяет сплюснотость эллипса.

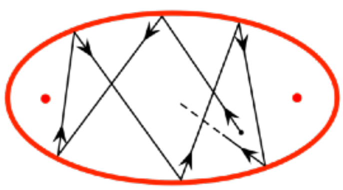
Окружность и эллипс - замкнутые кривые.
Окружность - частный случай эллипса!

- если секущая плоскость, пересекая все образующие конической поверхности одной её полости (условие эллипса), будет перпендикулярна оси, то получится окружность;
- если фокусы эллипса будут совпадать, то получится окружность;
- если в уравнении эллипса a=b=R, то получится уравнение окружности.

Некоторые свойства эллипса

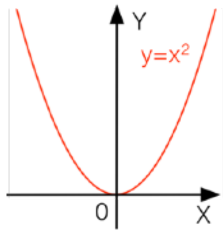
- у эллипса две оси симметрии (на них лежат полуоси);
- свет (звук) от источника, находящегося в одном из фокусов, отражается эллипсом так, что отраженные лучи пересекутся во втором фокусе.
- свет (звук) от источника, находящегося вне любого из фокусов, отражается эллипсом так, что отраженные лучи ни в каком фокусе не пересекутся.



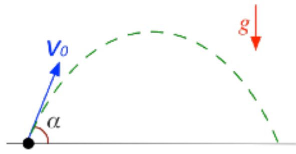


На основе последних двух свойств основан известный акустический фокус. Представьте себе зал в форме эллипса (такие залы строили для потехи в замках). Если вы встали в одном фокусе эллипса, а ваш приятель в другом, то вы с приятелем можете общаться даже шепотом, несмотря на то, что между вами расстояние метров двадцать - эллиптические стены зала все звуки из одного фокуса переносят и складывают (усиливают) в другом фокусе. И наоборот: ваш приятель стоит в одном из фокусов, а вы - нет. Если вы будете громко кричать, то ваш приятель вас не услышит - ваши звуковые волны не попадут в фокус приятеля.

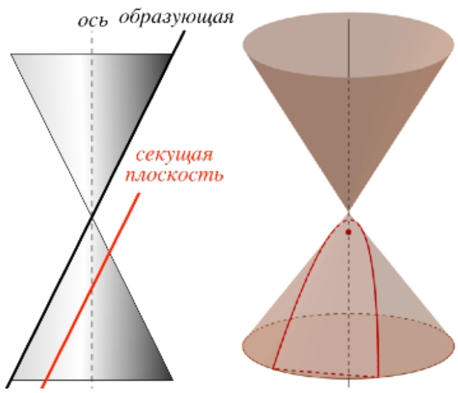
Парабола



Что мы знаем про параболу из школы?
Из алгебры мы знаем, что парабола является графиком квадратичной функции $y = x^2$ (или в общем случае $y = ax^2 + bx + c$), а из физики мы знаем, что если тело у поверхности Земли бросить под углом к горизонту, то оно полетит по параболе. Не густо. Будем восполнять пробелы.

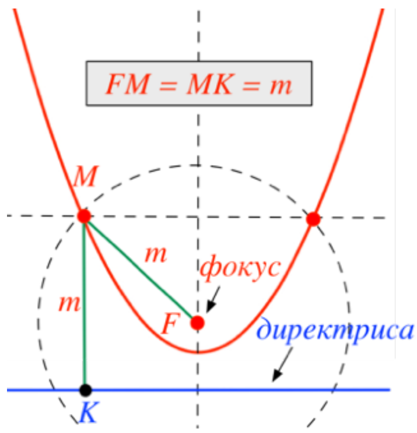


Параболу (как окружность и эллипс) тоже можно определить тремя способами:



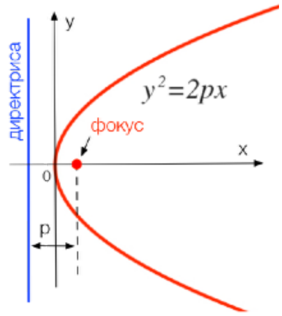
1) как коническое сечение, при котором ***секущая плоскость параллельна образующей конической поверхности*** - взгляни на оба рисунка. Секущая плоскость пересекает только одну полость конической поверхности.

2) как геометрическое место точек, ***равноудаленных от заданной точки (фокуса) и заданной прямой (директрисы)***, не проходящей через фокус. Это определение задает способ построения параболы по точкам с помощью циркуля и линейки:
   - строим пару точек параболы: циркулем из фокуса проводим окружность радиуса m;
   - с помощью линейки и циркуля строим прямую, праллельную директрисе и отстоящую от нее на расстоянии m;
   - точки пересечения этой прямой и окружности и будут двумя симметричными точками параболы;
   - меняем величину m и строим еще пару точек и т.д.

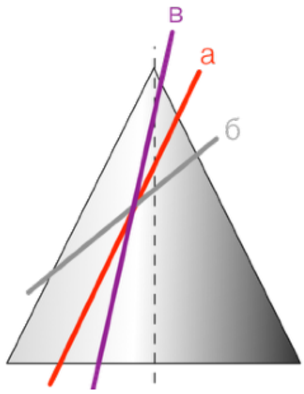


3) аналитически: в декартовой системе координат **каноническое** уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$, где p - расстояние от фокуса до директрисы.

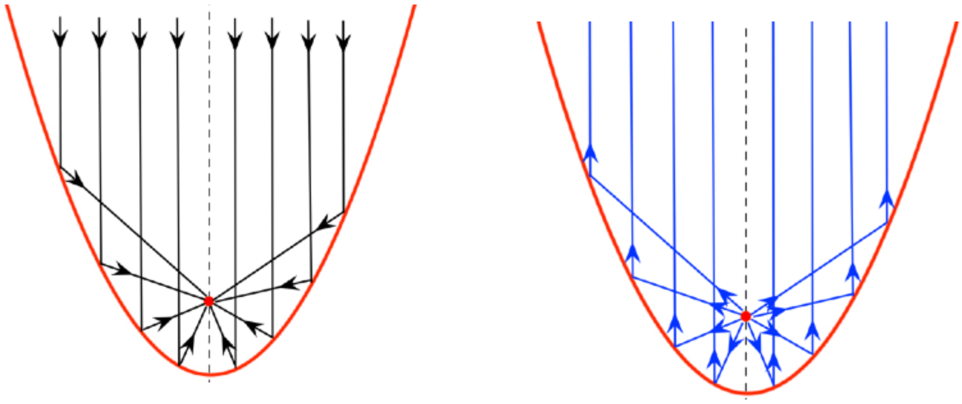
   Ой, опять **каноническое**! А как же наше любимое $y = x^2$? И парабола получилась повернутой на -90 градусов. Зачем? Я чуть дальше объясню для чего все это **каноническое** нужно. Сейчас же замечу лишь вот что: представлением параболы в виде $y^2 = 2px$ мы по сути перешли к другой системе координат по сравнению с представлением $y = x^2$ (повернув её на -90 градусов) и представление $y^2 = 2px$ включает в себя главный параметр параболы - p, что весьма наглядно.



Основные свойства параболы



- парабола - разомкнутая кривая
- парабола является *предельным случаем между эллипсом и гиперболой*. Тут требуются пояснения. Когда секущая плоскость параллельна одной из образующих конической поверхности - в сечении получается парабола - *а*. Если секущая плоскость чуть под меньшим углом наклонена к оси конической поверхности - в сечении получается эллипс - *б*. Если чуть под большим - в сечении получается гипербола (о гиперболе - ниже) - *в*.
- все параболы подобны - расстояние p между фокусом и директрисой определяет масштаб
- Оптическое свойство: Пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей.



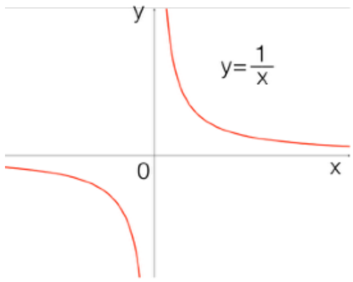
Это важное свойство параболы используется:

- в светотехнике: от простых фонариков до мощных осветителей-прожекторов
- в астрономии: телескопы и радиотелескопы
- в радиосвязи: тарелки спутникового телевидения, антенны дальней космической связи

Поясню на примере радиосвязи. При приеме сигнала все электромагнитные волны, попадающие в площадь антенны, собираются её параболическим зеркалом в фокусе параболы. В фокус параболы помещается приемник, который передает этот собранный (и тем самым усиленный) сигнал в электронные схемы для обработки. Чувствительность антенны определяется площадью её параболического зеркала.

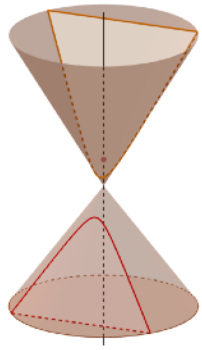
При передаче сигнала точечный излучатель, помещенный в фокус параболического зеркала, посылает сигнал, который, отразившись от стенок параболического зеркала, распространяется в параллельном луче по направлению к приемнику. Энергия сигнала не распыляется в окружающем пространстве, а сосредоточена в луче. Важную роль при этом играет точность наведения луча на приемник.

Гипербола



Что мы про неё знаем? Из алгебры: гипербола является графиком функции $y = \frac{1}{x}$ (или в общем случае $y = \frac{a}{kx + b} + c$).

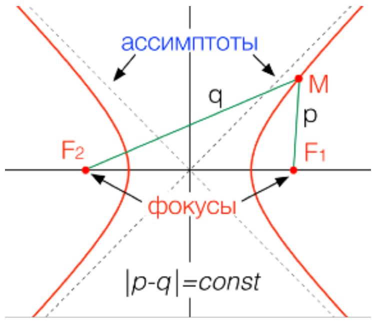
И опять три способа задания гиперболы:



1) как коническое сечение, при котором ***секущая плоскость пересекает обе полости конической поверхности***. Гипербола состоит из двух ветвей.

2) как геометрическое место точек, для которых абсолютное значение разности расстояний до двух выделенных точек (**фокусов**) постоянно. Из этого определения вытекает геометрический способ построения гиперболы, но он довольно мудрён и я не буду его здесь приводить.

3) аналитически: в декартовой системе координат **каноническое** уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Опять же заметим, что при таком каноническом представлении происходит поворот системы координат на -45 градусов по сравнению с представлением $y = \frac{1}{x}$.



У гиперболы, помимо фокусов, имеются две прямые, называемые **асимптотами** - смотри рисунок.

Основные свойства гиперболы

- у гиперболы две ветви
- гипербола - разомкнутая кривая
- у гиперболы две оси симметрии
- каких-либо полезных в народном хозяйстве акустических и оптических свойств у гиперболы нет.

У писателя Алексея Толстого есть фантастический роман "Гиперболоид инженера Гарина". В нем нехороший ученый изобретает "луч смерти". Суть изобретения такова: очень ярко горящий источник света помещен в некую точку внутри гиперболического зеркала. В результате формируется узкий луч света, несущий очень большую разрушительную энергию (сейчас бы такое устройство назвали лазером). Нехороший ученый делает много всяких пакостей с помощью своего устройства, но в конце концов Добро уделывает подчистую его и его устройство. Так вот, похоже, что писатель А. Толстой либо плохо учился в школе, либо в ней вообще не учился. У гиперболы нет таких оптических свойств, как описано в романе. А они есть у параболы. Ну попутал манёк писатель А. Толстой, бывает. А роман должен называться "Параболоид инженера Гарина". А может быть для уха писателя А. Толстого слово "гиперболоид" звучит солиднее, чем слово "параболоид"? Не ясно.

Канонические уравнения окружности, эллипса, параболы, гиперболы - зачем они?

Давайте для начала сделаем ряд важных замечаний:

- все системы координат, не искажающие геометрии, равноправны между собой. Или - системы координат отличающиеся друг от друга переносами вдоль осей и/или поворотами, равноправны. В таких системах координат уравнения, описывающие линии или фигуры, будут выглядеть по-разному, но линии или фигуры не изменятся.
- окружность, эллипс, парабола и гипербола - плоские кривые второго порядка. Общее уравнение кривых второго порядка в декартовых системах координат: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. В зависимости от конкретных величин A,B,C,D,E,F получается одна из этих четырех кривых.
- каноническое представление - это переход в другую равноправную систему координат
- каноническое уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$ - у окружности нет иных форм представления, настолько она симметрична
- каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (в формулу явно включены величины полуосей эллипса a и b)
- каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$ (в формулу явно включено расстояние от фокуса до директрисы p)
- каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (в формулу явно включены величины a и b - геометрические параметры гиперболы)

Так вот, *канонические уравнения более наглядны, ибо явно включают в свои формулы геометрические параметры описываемых кривых*.

Еще одна связочка. Зато какая!

И связывает окружность, эллипс, параболу и гиперболу *Закон Всемирного Тяготения*. А это уже физика, детка!

Представьте идеально круглую планету радиуса R и массы M. Никакой атмосферы у планеты нет. Чисто математическая модель. Мы пускаем ракету с поверхности планеты (скорость направлена по касательной к поверхности).

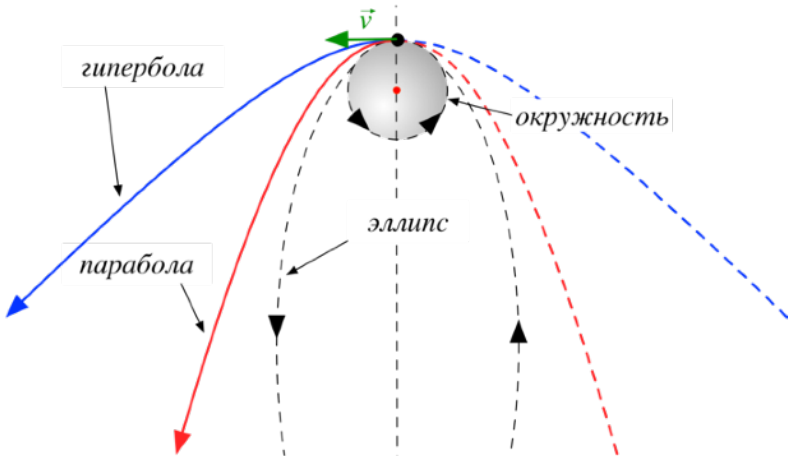
Раз запустили. Но ракета пролетела чуть-чуть и упала на поверхность планеты. "А!", - сказали мы, "надо бы скорости добавить!" Добавили. Когда скорость станет равной $v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}}$ (*G* - гравитационная постоянная, равная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ н·м^2/кг^2), ракета перестанет падать и начнет вращаться по ***круговой*** орбите (окружности) вокруг планеты над ее поверхностью. Такая скорость называется *первой космической скоростью* (для этой планеты). Для Земли V_1=7,9 км/с.

"А давайте ещё стартовой скорости прибавим!" - в запале закричали мы. Прибавили. Ракета начнет двигаться по ***эллиптической*** орбите вокруг планеты, причем в одном из фокусов этого эллипса будет находиться центр планеты. А мы стартовую скорость еще прибавляем. Эллипс, по которому движется ракета, становится всё более вытянутым. Окружность и эллипс - кривые замкнутые, ракета движется по замкнутой траектории, оставаясь всё время в гравитационном поле планеты.

Но вот в очередной раз, отловив свою ракету, возвращающуюся по эллиптической орбите, мы добавляем стартовой скорости и она становится равной $v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$. И запущенная ракета полетит уже по ***параболической*** траектории. Такая скорость называется *второй космической скоростью* (для этой планеты). Для Земли V_2=11,2 км/с. Парабола - кривая разомкнутая. Поэтому ракета улетит из гравитационного поля планеты и к нам больше не вернется.

Но у нас есть еще одна точно такая же ракета (предпоследняя). Мы достаем ее из кармана и запускаем с ещё бОльшей скоростью. И она полетит уже по ***гиперболической*** траектории, преодолеет гравитационное поле планеты и к нам тоже не вернется.

Ну и уж последнюю ракету запустим с супер-большой скоростью. Результат будет таков: она полетит по ***гиперболической*** траектории, просто гипербола станет ещё шире.



Вот такая связочка окружности, эллипса, параболы и гиперболы из физики!

Ну вот, пожалуй, и всё, что я хотел рассказать про конические сечения. Правда, красиво? Ну я же обещал!