Комбинаторика

Сколькими способами можно извлечь три банана из ящика с апельсинами? Комбинации, перестановки, сочетания, размещения - это всё Комбинаторика!

"Комбинаторика – наука хоть куда:
Ввела меня в смущенье и в прострацию!
Вопрос серьёзный, а не ерунда:
Какую лучше выбрать комбинацию?"
С. Моисеева

Из названия понятно, что Комбинаторика занимается "комбинациями". Комбинаторика - это подсчёт количества различных комбинаций, которые можно составить по разным правилам из некоторого множества (или множеств) ***дискретных (поддающихся перечислению)*** объектов (элементов). Существенно то, что ***среди этих объектов нет одинаковых.*** Под объектами понимаются, например: люди, наборы чисел, звери, растения, гвозди и т.д. При этом комбинаторику совершенно не волнует, что множество этих объектов состоит из молотка, расчески и болотной лягушки. Можно также сказать, что комбинаторика отвечает на вопрос "***Сколькими способами можно...?***"

Давайте обратимся к классике. У баснописца Ивана Андреевича Крылова есть басня "Квартет":

"Проказница-мартышка, осел, козёл,
Да косолапый мишка
Затеяли сыграть Квартет. .....

дальше идёт грустная история о том, как ребята эти лажАли, не попадали в ноты, драли струны, спорили, пересаживались и пытались заново, но ничего у них не получалось. На что друг-Соловей им заявил:

"А вы, друзья, как ни садитесь,
Всё в музыканты не годитесь".

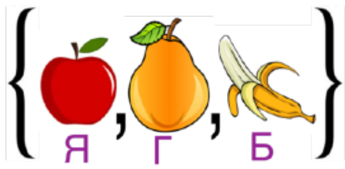
24 

Не будем обсуждать мораль этой басни, а зададимся вопросом: а сколько раз пересаживались эти ребята, ***испробовав все комбинации рассадки***, пока не пришли к грустному заключению о своей музнепригодности?

Как будем отвечать на вопрос? Ну как, начнём на бумажке рисовать все возможные комбинации рассадки этих "музыкантов" и, если не ошибёмся и не запутаемся, то через пол-часа ответим: "24!" Верно. А вот когда мы узнаем Комбинаторику, то через пять секунд после вопроса ответим: "Во множестве "музыкантов" 4 элемента (объекта). Все они различные. Мы занимаемся ***перестановками*** (по такому правилу разными комбинациями являются множества из этих четырех элементов с ***разным порядком*** расстановки). Следовательно, всего таких комбинаций *ФормулаДляПерестановок*(от 4 элементов) = 24."

Так вот, Комбинаторика и позволяет, вместо долгого рисования комбинаций на бумажке, быстро посчитать по своим формулам в соответствии с ***выбранным правилом*** составления комбинаций общее их количество.

Комбинаторные примеры на множествах с малым количеством элементов очень просты и их легко объяснить "на пальцах". А усвоив "маленькие" примеры, уже легче это всё обобщить и на большие.



Вот простенький пример. Есть у нас яблоко, груша, банан. Вопрос: сколькими способами можно выбрать два фрукта?

Итак, у нас есть множество из трёх фруктов-элементов. Все они различны. Нас просят выбирать по паре таких фруктов и посчитать сколько всего таких разных пар получается. Но при этом ***не важен порядок*** фруктов в паре (пара Яблоко-Банан и Банан-

Яблоко - это одна и та же пара!). Это следует из формулировки вопроса. Такое правило составления комбинаций (когда не важен порядок следования элементов в комбинации) в Комбинаторике называется ***сочетанием***.
Ответить легко: всего таких комбинаций 3: **ЯГ, ЯБ, БГ**.
А у Комбинаторики есть для этого формула для любых по размеру множеств и по размеру комбинаций.

Вот ещё простенький пример. Есть у нас множество А из трёх младших нечётных чисел $\{1,3,5\}$ и множество В из двух младших чётных чисел $\{2,4\}$. Вопрос: сколько ***различных двузначных*** чисел можно составить, беря по одному числу из множества А и из множества В?

Давайте подробно обсудим решение (без использования формул Комбинаторики).
Обсудим множества: Во множестве А 3 элемента, все они различны. Во множестве В 2 элемента, все они различны. Более того, все элементы множеств А и В различны. Обозначим элемент множества А как "а", а элемент множества В как "b". Хорошо.
Обсудим правило: Мы берем по одному элементу (числу) из множеств А и В и составляем из них двузначное число. Например, берем число 3 из множества А и число 2 из множества В. Из них можно составить два двузначных числа: 32 и 23. При выбранной паре элементов "а" и "b" комбинации (a,b) и (b,a) различны! То есть ***важен порядок*** расстановки "а" и "b" в выбранной паре! Опять, хорошо.
Обсудим алгоритм составления двузначных чисел (пар) и начнём считать количество комбинаций: Алгоритмов, и это очевидно, может быть несколько. Воспользуемся простейшим: берём из множества В первое число - 2. Ставим его на первое место в паре. Затем берём по одному числу из множества А и ставим его на второе место в паре. Таких разных пар (21,23,25) получится 3. А если в этих парах поменять "а" и "b" местами, то получится ещё 3 (12,32,52). Итого 6. То же самое проделываем с числом 4 из множества В и получим ещё 6 пар (41,43,45,14,34,54). Получилось всего 12 пар. Легко убедиться, что мы перебрали все возможные комбинации пар, формируемых по такому правилу. Такое правило в комбинаторике называется ***размещением*** (когда важен порядок элементов в выбираемой комбинации). И тут у Комбинаторики на этот случай есть своя готовая формула.

В средних классах в школьной алгебре вы проходили правило:

> *Пусть в множестве А m элементов, а во множестве В - n элементов. Тогда число всех различных пар (a,b), где $a \in A, b \in B$ будет равно $m \cdot n$.*

Это правило относится к случаю, когда порядок элементов в выбираемой паре важен ("а" - на первом месте, "b" - на втором). Можно ли это правило применить к последнему примеру? Можно, если понять, что нас интересуют не только пары (a,b), но и пары (b,a). И тогда ответом будет $2 \cdot m \cdot n = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Ещё раз для понимания и это важно:
Если в правиле составления комбинаций (а это следует из формулировки вопроса задачи) ***НЕ ВАЖЕН ПОРЯДОК*** расположения элементов (например, комбинации (a,b) и (b,a) - одинаковы; комбинации (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b) и (c,b,a) - одинаковы), то ***все комбинации с разным порядком расположения элементов считаются одинаковыми*** и в общем подсчете количества комбинаций дают 1.
Если в правиле составления комбинаций (а это следует из формулировки вопроса задачи) ***ВАЖЕН ПОРЯДОК*** расположения элементов (например, комбинации (a,b) и (b,a) - разные; комбинации (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b) и (c,b,a) - разные), то ***все комбинации с разным порядком расположения элементов считаются разными*** и в общем подсчете количества комбинаций дают по1 ***каждая***.

Я так детально разжевываю оттого, что в Комбинаторике путаница в головах учеников возникает именно на этапе усвоения комбинаторных принципов.

Ну вот, по сути мы рассмотрели случаи всех трех главных правил составления комбинаций в Комбинаторике: ***перестановки, сочетания и размещения***. О каждом из этих правил мы поговорим ниже.

А сейчас поговорим о ***факториале***. "Ой-ёй-ёй!" - скажете вы. И будете правы. Очень красивое слово - факториал.

Известно, что математика - это наука ленивых. Получится у математика в расчетах какое-нибудь длинное и непонятное число, и он, чтобы не писать потом десять раз это длинное и непонятное число, тут же назовёт его "π" и будет другим говорить "Это - π!". Получится у математика какая-нибудь длинная функция типа $1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ и он всем будет говорить "Это - функция Дирихле!" Химики тоже пробовали так поступать: вот получилась у них длинная формула $C_{14}H_{14}N_3O_3SNa$, и они возьми да и назови это всё "диметиламинофенилазобензолсульфонат натрия". Легче стало? Не думаю. Ну не очень у химиков получается! У математиков лучше.

Так же математики поступили и на этот раз: ***факториал - это числовая функция от натурального числа***. Очень простая функция. ***Факториал числа n*** (обозначается $n!$ (! - не от радости великой, хотя математик всему рад, а потому, что "факториал")) - это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Факториал числа n - это число.

То есть: $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ и т.д.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (n-1) \cdot n$. Или уж совсем по-взрослому: $n! = \prod_{i=1}^{i=n} i$.

А $0! = 1$ (так уж договорились). И $n! = n \cdot (n-1)!$

А теперь возвращаемся к Комбинаторике.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же ***различных*** n элементов, и отличающиеся только порядком их расположения в комбинации.

Количество всех возможных перестановок из n элементов равно $P_n = n!$ (вот он, факториальчик, пригодился!). "P" - от английского *permutation* - *перестановка*.

В каждой перестановке участвует всё множество из n элементов!

$P_n = n!$ отвечает на вопрос: "***Сколькими способами можно переставить n элементов?***"

Вот первая формула Комбинаторики. Теперь нам не нужно рисовать все перестановки на бумажке. Сколько бы ни было элементов, мы всегда можем сказать - перестановок $P_n = n!$

Пример для закрепления: Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом? Все люди разные. В каждой рассадке за столом - 5 человек. Важен лишь их порядок. Так это же перестановки! Точно. Используем формулу количества перестановок из 5 элементов:

$P_5 = 5! = 120$.

Обратите внимание, что здесь не имеет значения круглый ли стол, квадратный, или вообще все люди сели на скамейку вдоль одной стены - важно лишь количество объектов и их взаимное расположение.

Пример с размышлениями: Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

Для того, чтобы составить четырёхзначное число, нужно использовать все четыре карточки (цифры на которых различны!). Комбинации четырех чисел, которые мы будем получать, будут различаться лишь порядком. Очень это похоже на перестановки. Тогда общее количество перестановок из четырёх элементов равно $P_4 = 4! = 24$.

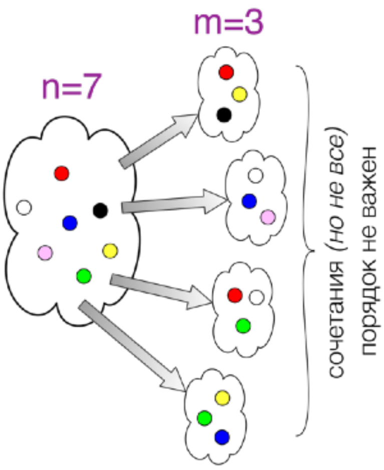
Когда карточка с нулём располагается на 1-м месте, то число становится трёхзначным, поэтому данные комбинации следует исключить. Пусть ноль находится на 1-м месте, тогда оставшиеся 3 цифры в младших разрядах можно переставить $P_3 = 3! = 6$ способами.
То есть из общего количества перестановок следует исключить 6. Тогда ответ: $24 - 6 = 18$.

Хорошенько думайте над условиями задачи! Это характерная черта комбинаторных задач (и задач на вероятности) - в них нужно думать. И, зачастую, думать по-житейски. Из условия задачи нужно "выудить": какие комбинаци нам надо посчитать? Это только в лёгких примерах напрямую речь может идти о перестановках, сочетаниях или размещениях. В реальных задачах надо что-то отбросить, что-то добавить. Вот это "что-то" вам и надо нащупать.

Кстати, если бы мы уже знали формулу $P_n = n!$, то задачку про "музыкантов" из басни Крылова решили бы влёт: "музыканты" занимались перестановками - $P_4 = 4! = 24$.

Дальше поехали.

Сочетаниями называют комбинации из m элементов, которые выбраны из множества n различных элементов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Иными словами, отдельно взятое сочетание - это уникальная выборка из m элементов, в которой ***НЕ ВАЖЕН ПОРЯДОК*** их расположения. Общее же количество таких уникальных сочетаний равно $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$. Опять факториалы! "C" - от английского *combination - сочетание.*



Поясним на картинке. При формировании каждой комбинации из исходного множества (состоит из n ***различных*** элементов) мы черпаем ложечкой по m элементов. Комбинации считаются различными, если в них оказались разные элементы. По порядку расположения m элементов комбинации не различаются.

C_n^m отвечает на вопрос "***Сколькими способами можно выбрать m элементов из n элементов?***" Очевидно, что $0 \le m \le n$.

Пример для закрепления: В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?
По логике условия, детали ***считаются различными*** - даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы (в этом случае их можно, например, пронумеровать).
В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей, в которой не имеет значения их «дальнейшая судьба» - грубо говоря, «просто выбрали 4 штуки и всё». Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество: $C_{15}^4 = \dfrac{15!}{(15-4)! \cdot 4!} = \dfrac{15!}{11! \cdot 4!}$.
Технический вопрос: а как дальше-то считать? $15!$ - это ого-го какое здоровое число. Нет, не надо ворочать такими огромными числами. Есть правило: в знаменателе выбираем наибольший факториал (в данном случае $11!$) и сокращаем на него дробь. Для этого числитель следует представить в виде: $15! = 11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$ и тогда
$C_{15}^4 = \dfrac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{11! \cdot 4!} = \dfrac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{4!} = 1365$ способами можно взять 4 детали из ящика. Что это значит? Это значит, что из набора 15 различных деталей можно составить 1365 уникальных сочетаний из 4 деталей. Каждая такая комбинация из четырёх деталей будет отличаться от других комбинаций хотя бы одной деталью.

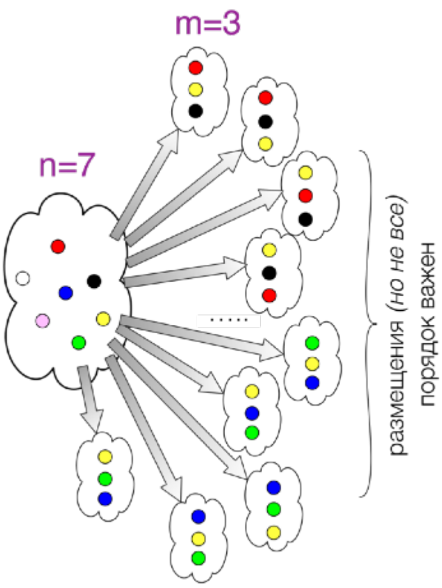
!!! Полезно заметить какой результат даёт формула $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$ в некоторых случаях:

$C_n^0 = 1$ - единственным способом можно не выбрать ни одной детали;
$C_n^1 = n$ - n-способами можно взять 1 деталь (любую из n);
$C_n^{n-1} = n$ - n-способами можно взять $n-1$ деталей (при этом какая-то одна из n останется в ящике);
$C_n^n = 1$ - единственным способом можно взять все n деталей.

Ещё пример: В шахматном турнире участвует k человек и каждый с каждым играет по одной партии. Сколько всего партий сыграно в турнире?

Из k участников можно составить $C_k^2 = \dfrac{k!}{(k-2)! \cdot 2!} = \dfrac{k \cdot (k-1)}{2}$ пар (кто играет белыми, кто чёрными – не важно). Эквивалентной является задача о рукопожатиях: в отделе работает k мужчин и каждый с каждым здоровается за руку, сколько рукопожатий они совершают? Те же $\dfrac{k \cdot (k-1)}{2}$.

Размещениями называют комбинации из m элементов, которые выбраны из множества n различных элементов, и которые отличаются друг от друга как составом элементов, так и их порядком. Иными словами, отдельно взятое размещение - это уникальная выборка из m элементов, в которой ***ВАЖЕН ПОРЯДОК*** их расположения. Общее же количество таких уникальных размещений равно $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$. "A" - от английского *accomodation - размещение.*



Поясним на картинке. При формировании каждой комбинации из исходного множества (состоит из n ***различных*** элементов) мы черпаем ложечкой по m элементов. Комбинации считаются различными, если в них а) оказались разные m элементов или б) элементы одинаковые, но порядок их разный.

A_n^m отвечает на вопрос "*Сколькими способами можно выбрать m элементов из n элементов и в каждой выборке переставить их местами?*"

Очевидно, что размещений из m элементов по n не меньше, чем сочетаний из m по n:

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} \geq C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$. А также $A_n^m = C_n^m \cdot P_n$.

Пример для закрепления: Боря, Дима и Володя сели играть в карты. Сколькими способами им можно сдать по одной карте? *(колода содержит 36 карт)*

В задаче важно не только то, какие три карты будут извлечены из колоды, но и то, *как они будут распределены между игроками* (то есть в выборке ***важен порядок***). Значит речь идёт о размещениях. По формуле размещений: $A_{36}^3 = \dfrac{36!}{(36-3)!} = 34 \cdot 35 \cdot 36 = 4280$.

Ещё пример: В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Задача о «размещении» должностей в коллективе встречается очень часто и является самым настоящим "хитом продаж".

Если внимательно всмотреться в условия задачи, то можно увидеть размещения в чистом виде: выбираем из группы в 23 человека пару, а в этой паре порядок важен: выборки (Иванов - староста, Петров - зам) и (Петров - староста, Иванов - зам) - разные.

Поэтому ответ: $A_{23}^{2} = \dfrac{23!}{(23-2)!} = 22 \cdot 23 = 506$ способами.

Мы рассмотрели три базовых правила составления комбинаций из множества n различных элементов: ***перестановки, сочетания и размещения***. Это как бы "чистые" комбинации. Чистые в том смысле, что, коль во множестве n все элементы различны, то и во всех "чистых" комбинациях тоже все элементы будут различны.

Но жизнь нам ставит не только "чистые" задачи. А если нам нужно посчитать комбинации с повторением нескольких элементов, например? И тут Комбинаторика даёт нам свои формулы.

Перестановки с повторениями

Пусть у нас есть множество, состоящее из n элементов, среди которых есть одинаковые (либо считающиеся таковыми по смыслу задачи). Вопрос: сколькими способами можно переставить n элементов, среди которых 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз, 3-й элемент – n_3 раз,..., k -й элемент – n_k раз?

Это - ***перестановки с повторениями***. Формула: $P_{n(rep)} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

("rep" - repeat - повторять). В подавляющем большинстве задач есть и уникальные (***не повторяющиеся***) элементы, в этом случае соответствующие значения n_i равны единице и их можно не записывать в знаменатель.

Пример для закрепления: Сколько различных буквосочетаний можно получить перестановкой карточек со следующими буквами: К, О, Л, О, К, О, Л, Ь, Ч, И, К?
Всего букв 11 (в том числе и повторяющихся). Если бы все буквы были разными, то мы бы имели "чистые" перестановки. Но у нас буква "К" повторяется 3 раза, буква "О" повторяется 3 раза, буква "Л" повторяется 2 раза. Остальные не повторяются. Вот вам и случай ***перестановок с повторениями***. Поэтому ответ: $P_{11(rep)} = \dfrac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 554400$.

Всё логично. Далее.

Сочетания с повторениями

Пусть у нас есть n множеств, ***каждое из которых*** состоит из ***одинаковых*** элементов.
Вопрос: сколькими способами можно выбрать m элементов?
В выборке могут оказаться одинаковые элементы, и если $m > n$, то совпадения точно будут. По умолчанию предполагается, что исходная совокупность содержит не менее m элементов каждого вида, и поэтому выборка может полностью состоять из одинаковых элементов.

Это - ***сочетания с повторениями***. Формула: $C_{n(rep)}^{m} = \dfrac{(n+m-1)!}{(n-1)! \cdot m!}$ ("rep" - repeat - повторять).

Пример для закрепления: В студенческой столовой продают плюшки, ватрушки и пончики. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков? (Плюшки, ватрушки и пончики - это пирожки).
Обратите внимание на типичный критерий сочетаний с повторениями - по условию на выбор предложено не множество элементов как таковое, а различные виды элементов (плюшки, ватрушки, пончики). Все плюшки одинаковы, все ватрушки одинаковы, все пончики одинаковы. Предполагается, что в продаже есть не менее 5 плюшек, 5 ватрушек и 5 пончиков. И по условию задачи нас не волнует порядок пирожков в выбираемой пятерке - верный признак сочетаний -

просто выбрали 5 штук и всё. В выборке обязательно будут одинаковые пирожки (так как выбираем 5 штук, а на выбор предложено 3 вида).
Ну вот, с условием разобрались и, если всмотреться в определение, то мы имеем сочетания с повторениями. Можно напрямую использовать формулу $C^5_{3(rep)} = \frac{(3+5-1)!}{(3-1)! \cdot 5!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$

И здесь всё логично и не сложно.

Размещения с повторениями

Пусть у нас есть множество, состоящее из n различных элементов, при этом ***любой элемент можно выбирать многократно***. Вопрос: сколькими способами можно выбрать m элементов, если ***важен порядок*** их расположения в выборке?
Для бОльшей ясности удобно представить, что элементы извлекаются последовательно (хотя это вовсе не обязательное условие). В частности, возможен случай, когда из n имеющихся элементов m раз будет выбран один и тот же элемент. Ещё раз - порядок в выборке важен!
Формула гласит: количество таких способов равно $A^m_{n(rep)} = n^m$ ("rep" - см. выше).

Пример для закрепления: Сколько существует четырёхзначных пин-кодов?
У нас есть множество десятичных цифр от 0 до 9 (всего 10). Для каждого из четырех разрядов пин-кода мы выбираем одну цифру из множества. Сколько способов выбрать одну цифру из 10? Правильно: $C^1_{10} = 10$ способами. А сколько тогда способов выбора для четырех разрядов? Логично ответить, что - произведение четырех десяток. Правильно. В итоге имеем 10000 способов. Но мы решили этот пример без размещений с повторениями. А формула для размещений с повторениями даёт $A^4_{10(rep)} = 10^4 = 1000$ то же самое.

Итак, мы рассмотрели все варианты выбора комбинаций по ***одному правилу***.

А как решать задачку, в которой несколько процедур выбора комбинаций по разным правилам (примеры - ниже)? А вот тут используются *комбинаторное правило суммы* и *комбинаторное правило произведения*. Правило суммы и правило произведения - основные принципы, которые используются в комбинаторике повсеместно.

Правило сумм. Пусть элемент a можно выбрать m способами из некоторого множества, а другой элемент b - n способами. Тогда выбор "либо a, либо b" [условие "ИЛИ"] возможен $m + n$ способами.

Правило произведений. Пусть элемент a можно выбрать m способами из некоторого множества, а элемент b - n способами. Тогда упорядоченная пара элементов $(a; b)$ [условие "И"] может быть выбрана mn способами.

Пример для закрепления: На полке стоят десять томов Пушкина, четыре тома Лермонтова и шесть томов Гоголя. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?
Вопрос подразумевает "***или одного Пушкина, или одного Лермонтова, или одного Гоголя***" - для подсчета итогового количества способов используем ***правило сумм***.
Одного Пушкина можно выбрать 10-ю способами; одного Лермонтова - 4-мя; одного Гоголя - 6-ю. Тогда всего способов: 10+4+6=20. (Хотя и так ясно: книг всего 20 - значит 20 способов достать одну).

Пример для закрепления: Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?
В разряд сотен можно записать любую из 9 цифр (1,2,3,4,5,6,7,8,9) - C^1_9=9 способов выбора. Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным. А вот в *разряд*

десятков можно выбрать любую из 10 цифр C_{10}^1=10 способами. По условию, число должно делиться на 5: то есть заканчиваться на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры - 2 варианта. Всего вариантов $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 180$.

Ещё пример: Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?
В данном случае подсчёт C_{23}^2 не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.
Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей ***или*** двух девушек, что указывает на верный путь решения условие "ИЛИ".
$C_{10}^2 = 45$ - способами можно выбрать 2 юношей;
$C_{13}^2 = 78$ - способами можно выбрать 2 девушек.
Таким образом, двух человек одного пола (без разницы - юношей ***или*** девушек) можно выбрать: $45 + 78 = 123$ способами.

Теперь порешаем задачи на применение всего вышерассмотренного вместе.

Задачка 1: Автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами). Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

Сколькими способами можно составить цифровую комбинацию номера? Цифровая комбинация номера - это 3-значное число от 001 до 999 (000 исключаем как недопустимый). И без комбинаторики понятно, что таких цифр 999.
Теперь про буквенную часть. Всего букв в исходном множестве 12. Берется по 3 штуки. Буквы могут повторяться. Порядок важен. Что это? Правильно: размещения с повторениями и даёт $A_{12(rep)}^3 = 12^3 = 1728$ комбинаций. А в итоговом наборе (условие "И") $999 \cdot 1728 = 1726272$ номеров.

Задачка 2: Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая цифра отлична от нуля?

Всего десятичных цифр для выбора - 10.

1. Первую (самую "левую") цифру выбираем из 9 цифр (0 не участвует) - 9 способов.
2. Вторую выбираем тоже из 9 цифр (из 10-ти не участвует выбранная в п. 1 цифра) - 9 способов.
3. Третью выбираем из 8 цифр (не участвует цифры, выбранные в п. 1 и 2) - 8 способов.
4. Четвертую - из 7-ми - 7 способов.

   .....

7. Седьмую выбираем из 4-х цифр - 4 способа.

А в итоговом наборе (условие "И") $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544320$ номеров.

=====================

Ну и подводя итог: в комбинаторных задачах самое важное - разобраться в условии, выбрать нужные правила составления комбинаций и условия "И"/"ИЛИ" для итогового набора.

Традиционно к разделу Комбинаторика относится и **Бином Ньютона**. Ну, отношение это весьма условно, однако будем соблюдать традиции.

Ещё с младших классов вы знаете формулы разложение маленьких степеней двучлена: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Двучлен по-научному - ***бином***, многочлен - полином.

А формула ***бинома Ньютона*** (где только Ньютон не отметился!) позволяет найти ***разложение*** для ***любых степеней*** двучлена вида $(a+b)^n$. И формула эта такова (чур, не бояться!):

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b + C_n^2 \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot ab^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$$

В разложении у каждого элемента $a^k b^m$ сумма степеней у a и b равна n (степени бинома). Посмотрите сами: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ - видите? Поэтому элемент $a^k b^m$ можно записать как $a^k b^{n-k}$.
Коэффициенты при $a^k b^{n-k}$ называются ***биномиальными коэффициентами***.

Биномиальный коэффициент при элементе $a^k b^{n-k}$ выражается формулой: $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

"Так это же наши знакомые ***сочетания из n по m!***" - воскликнете вы. И будете правы. Именно поэтому бином Ньютона "пристегнули" к Комбинаторике.

И тогда, чтоб совсем вас напугать, формулу бинома Ньютона можно записать по-взрослому:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i \cdot a^{n-i} b^i.$$

А давайте проверим эту самую формулу бинома Ньютона для $(a+b)^3$! А давайте!
$(a+b)^3 = C_3^0 \cdot a^3 + C_3^1 \cdot a^{3-1}b + C_3^2 \cdot a^{3-2}b^2 + C_3^3 \cdot b^3$. А уж сочетания мы считать умеем: $C_3^0 = 1; C_3^1 = 3; C_3^2 = 3; C_3^3 = 1$. И тогда $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ура, совпало!

Взгляните на слагаемые в первой формуле бинома Ньютона. У a показатель степени начинается с n и потом с шагом -1 убывает до нуля в последнем слагаемом. У b всё наоборот: начинается с 0 и с шагом 1 возрастает до n. Есть некая симметрия в поведении этих показателей.

Есть такая же симметрия у биномиальных коэффициентов: симметричные биномиальные коэффициенты равны! То есть $C_n^k = C_n^{n-k}$ (это вы легко можете проверить по формуле сочетаний).
У биномиальных коэффициентов есть ещё ***свойства***:
- сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n, то есть $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;
- сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на чётных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечётных местах.

А сколько слагаемых в разложении $(a+b)^2$? Три.
А сколько слагаемых в разложении $(a+b)^4$? Четыре.
А сколько слагаемых в разложении $(a+b)^n$? $n+1$. Правильно.

Это всё здорово, скажете вы. Ну а какой практический смысл в этом биноме Ньютона? Объясню. Я вам уже говорил, что математики ленивы. Как-то, в далёком 17-м веке, нужно было

Ньютону для своих домашних дел разложить выражение $(a+b)^{45}$. "Ой!", сказал Ньютон, "чёй-то мне лень раскрывать скобки у 45 сомножителей и писать это всё на бумаге гусиным пером. Наверняка ошибусь или запутаюсь! А проще придумать формулу на все случаи жизни чтоб было легко и приятно". Решил и придумал формулу. Так появился бином Ньютона (по крайней мере, так гласит легенда). Бином Ньютона - это быстрый и надёжный способ найти разложение $(a+b)^n$ для любых n. Ведь легче же считать C_n^k, чем раскрывать скобки у 45 сомножителей.

А уж самые ленивые из ленивых математиков, чтобы не считать факториалы в сочетаниях, придумали таблицу, называемую ***треугольником Паскаля***.

Это бесконечная таблица биномиальных коэффициентов. Каждое число в этом треугольнике - это соответствующий биномиальный коэффициент. По бокам этого треугольника расположены единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух ближайших верхних чисел. Поэтому если лень считать сочетания - пользуйтесь треугольником Паскаля.

Треугольник Паскаля

степени бинома

n																					
0										1											
1									1		1										
2								1		2		1						*10+5=15*			
3				*7+21=28*			1		3		3		1								
4						1		4		6		4		1							
5					1		5		10		10		5		1						
6				1		6		15		20		15		6		1					
7			1		7		21		35		35		21		7		1				
8		1		8		28		56		70		56		28		8		1			
9	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1		
10	1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1
	………………………………..																				

Ну вот, с Комбинаторикой заканчиваем. Важно сказать, что Комбинаторика не только считает "сколькими способами можно незаметно извлечь три банана из ящика с апельсинами", но и используется в теории вероятностей. Об этом мы поговорим в следующей Истории.